

Юрій Пир'єв, Збігнев Олесьяк

Львівський національний університет ім. І. Франка
Варшавський університет**ФРИКЦІЙНЕ ТЕПЛОУТВОРЕННЯ ПІД ЧАС РУХУ ПРУЖНОГО ТІЛА
ТИПУ «ЗЧЕПЛЕННЯ-КОВЗАННЯ»**

Розглянемо одновимірну модель термопружного контакту плити ($L \times a \times b$) масою M з ідеально провідними півпросторами, які рухаються з постійними швидкостями V (рис. 1). Відстань між півпросторами має довжину товщини плити L і в початковий момент зменшується на величину ε . Плита утримується у вертикальному положенні пружиною з жорсткістю C і може виконувати рух уздовж осі Z декартової системи координат XYZ . Внаслідок дії сил тертя F_{fr} на поверхнях контакту $X = 0$, $X = L$ відбувається теплоутворення. Між поверхнями контакту плити і півпросторів відбувається тепловіддача за законом Ньютона. Не контактуючі бічні поверхні плити теплоізовані і для їхніх розмірів правильне $L/a \ll 1$, $L/b \ll 1$, що виправдовує використання одновимірної моделі теплопровідності. Приймаємо, що згідно з законом Амонтона $F_{fr} = f(V_{rel})N(t)$, де $f(V_{rel})$ – коефіцієнт тертя (рис. 2), який залежить від відносної швидкості $V_{rel} = V - \dot{Z}(t)$, причому $f(-V_{rel}) = -f(V_{rel})$, $N(t)$ – нормальна сила. Приймаємо, що в початковий момент плита розташована на відстані Z_0 від положення стаціонарного стану системи, де для зручності розмістимо початок системи координат. Початкова швидкість плити дорівнює нулю. Треба визначити температуру $T(X, t)$ плити, переміщення $U(X, t)$, нормальні напруження $\sigma_{xx}(X, t)$ вздовж осі X , величину зміщення $Z(t)$ плити стосовно положення статичної рівноваги та її швидкість.

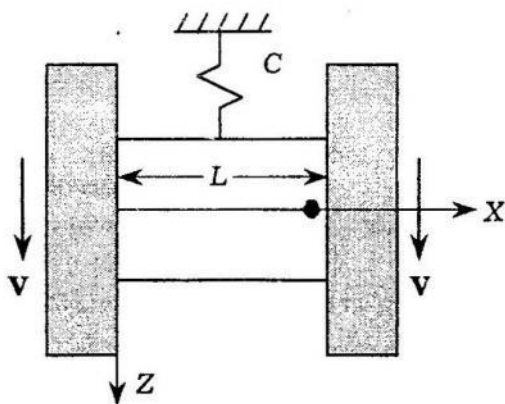


Рис. 1.

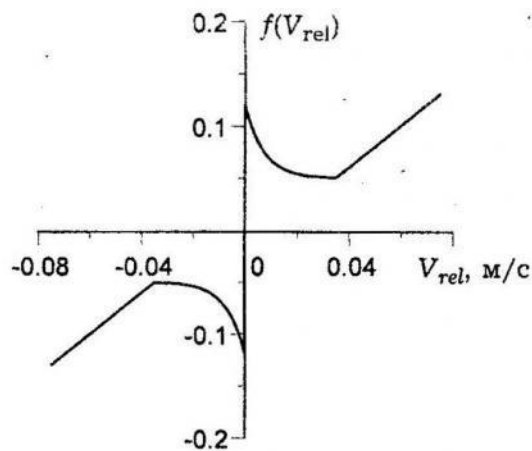


Рис. 2.

Задача зводиться до розв'язування системи диференціальних рівнянь квазістаціонарної незв'язаної термопружності:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial}{\partial X} U(X, t) - \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T(X, t) \right] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} T(X, t) = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} T(X, t) \quad (2)$$

та рівняння руху плити як абсолютно жорсткого тіла:

$$m \frac{d^2}{dt^2} Z(t) + c Z(t) = 2f(V_{rel}) P(t) - 2f(V) P_{st} \quad (3)$$

за таких механічних граничних умов:

$$U(0, t) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(L, t) = -\frac{\varepsilon}{2}, \quad (4)$$

теплових граничних умов:

$$\begin{aligned} K \frac{\partial T(0, t)}{\partial X} - \frac{1}{R} T(0, t) &= -f(V_{rel}) V_{rel} P(t), \\ K \frac{\partial T(L, t)}{\partial X} + \frac{1}{R} T(L, t) &= f(V_{rel}) V_{rel} P(t) \end{aligned} \quad (5)$$

і початкових умов:

$$T(X, 0) = 0, \quad Z(0) = Z_0, \quad \frac{d}{dt} Z(0) = 0. \quad (6)$$

Нормальні напруження в плиті знаходимо за формулою:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-2\nu} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial U}{\partial X} - \alpha T \right]. \quad (7)$$

У формулах (1)–(7) E – модуль Юнга; ν , K , k , α , R – коефіцієнти Пуассона, теплопровідності, температуропровідності, лінійного температурного розширення, термічного опору тепловіддачі від плити до півпросторів; $m = M/ab$; $c = C/ab$; $P(t) = N(t)/ab = -\sigma_{xx}(0, t)$ – контактний тиск; P_{st} – контактний тиск у положенні статичної рівноваги $Z = 0$.

Розв'язок крайової задачі (1)–(7) одержимо за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часом t . Для переходу в область оригіналів використовуємо теореми розкладення і добутку зображень. У результаті отримуємо задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння:

$$\ddot{z}(\tau) + z(\tau) = \Omega \left[f(V(1 - \dot{z}(\tau))) p(\tau) - \frac{f(V)}{1 - \gamma f(V)} \right], \quad z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = 0, \quad (8)$$

де безрозмірний контактний тиск є розв'язком інтегрального рівняння:

$$p(\tau) = 1 + 2\gamma \tilde{\omega} Bi \int_0^\tau G(\tau - \eta) f(V(1 - \dot{z}(\eta))) (1 - \dot{z}(\eta)) p(\eta) d\eta. \quad (9)$$

Безрозмірну контактну температуру $\theta(\tau) = \theta(0, \tau) = \theta(L/L_*, \tau)$ знаходимо за формулою:

$$\theta(\tau) = \tilde{\omega} \int_0^\tau g(\tau - \eta) f(V(1 - \dot{z}(\eta))) (1 - \dot{z}(\eta)) p(\eta) d\eta. \quad (10)$$

У подання (9), (10) входять вирази

$$g(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_3(\mu_m)}{\Delta'_1(\mu_m)} \exp(-\mu_m^2 \tilde{\omega} \tau), \quad G(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_2(\mu_m)}{\Delta'_1(\mu_m)} \exp(-\mu_m^2 \tilde{\omega} \tau),$$

$$\Delta'_1(\mu_m) = 0.5(2BiS_m + C_m - Bi^2(C_m - S_m)/\mu_m^2),$$

$$\Delta(\mu_m) = 2BiC_m + S_m(Bi^2 - \mu_m^2),$$

$$\Delta_2(\mu_m) = S_m - BiC_m^0, \quad \Delta_3(\mu_m) = 1 + C_m + BiS_m,$$

$$C_m = \cos(\mu_m), \quad S_m = \frac{\sin(\mu_m)}{\mu_m}, \quad C_m^0 = \frac{C_m - 1}{\mu_m},$$

де μ_m – корені характеристичного рівняння $\Delta(\mu_m) = 0$. У розв'язку (8)–(10) введені такі безрозмірні величини:

$$x = \frac{X}{L_*}, \quad z = \frac{Z}{L_*}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad v = \frac{\dot{Z}(t)}{V}, \quad z_0 = \frac{Z_0}{L_*}, \quad u = \frac{U}{L_*}, \quad p = \frac{P}{P_0},$$

$$p_{st} = \frac{P_{ps}}{P_0}, \quad \theta = \frac{T}{T_*}, \quad \tilde{\omega} = \frac{k}{L_*^2 \omega}, \quad Bi = \frac{R_0}{R}, \quad \Omega = \frac{2P_0}{m\omega V}, \quad \gamma = \tilde{E}\tilde{\alpha}\tilde{\omega}RV$$

і характерні параметри:

$$t_* = \frac{1}{\omega}, \quad L_* = \frac{V}{\omega}, \quad T_* = P_0 R_0 V, \quad P_0 = \tilde{E} \frac{\varepsilon}{L},$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad \tilde{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad R_0 = \frac{L}{K}.$$

Співвідношення (8)–(10) є системою нелінійних інтегрального і диференціального рівнянь. Розв'язок шукаємо методом Рунге-Кутта та ітерацій із використанням квадратурної формули трапецій.

Числовий аналіз виконано для сталевго шару ($\alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $K = 21 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$, $k = 5.9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu = 0.3$, $E = 19 \cdot 10^{10} \text{ Па}$) при $Bi = 4.76$, $\Omega = 12.8$, $\tilde{\omega} = 0.26 \cdot 10^{-2}$, $V = 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$ для різних значень z_0 . Суцільні криві на рис. 3–6 відповідають випадковій знехтування величиною теплового розширення $\gamma = 0$, штрихові криві $\gamma = 10$. Фазова картина руху плити зображена на рис. 3, 5. Поведінка безрозмірної контактної температури зображена на рис. 4, 6.

Висновок. У цій статті викладена методика та наведені основні результати розв'язку нової модельної задачі про фрикційний термопружний контакт тіла з рухомим оточуючим середовищем. Особливістю запропонованої моделі є врахування інерційності тіла, залежності коефіцієнтів тертя від відносної швидкості контактуючих тіл. Інерційність контактуючого тіла враховувалась також у працях [1, 2]. Розглядувану модель можна використовувати для обчислення контактних характеристик рухомих трибосистем. Розглянута задача є типовою моделлю для вивчення самозбуджувальних коливань (автоколивань).

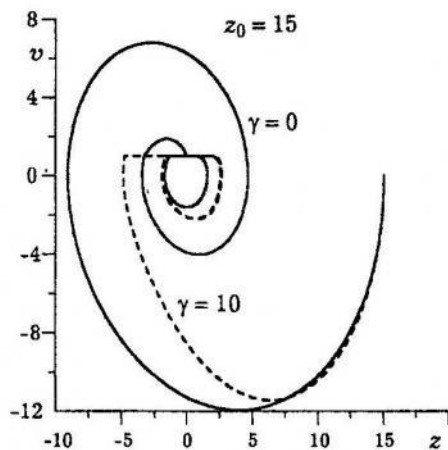


Рис. 3.

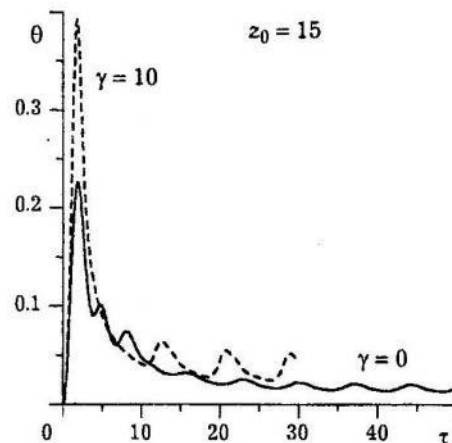


Рис. 4.

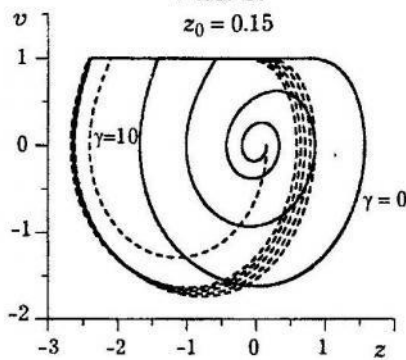


Рис. 5.

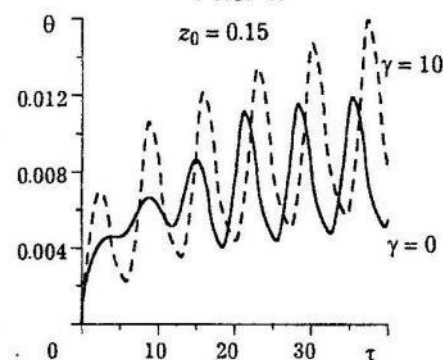


Рис. 6.

Автори вдячні Комітету наукових досліджень (The grant of the State Committee for Scientific Research of Poland, nr. 7 TO7A 030 12) за фінансову підтримку.

1. Пыр'єв Ю. А. Динамическая модель термоупругого контакта в условиях фрикционного нагрева и ограниченности теплового расширения // Трение и износ. – 1994. – 15, № 6. – С. 941–948.
2. Olesiak Z. S., Pyryev, Y. On dynamical thermoelastic contact of two solids with heat of friction generation and wear // Third Int. Congr. on Thermal Stresses. June 13–17, 1999. – Krakow (Poland), 1999. – P. 599–602.

Yuriy Pyryev, Zbignev Olesiak

GENERATION OF FRICTIONAL HEAT IN A «STICK-SLIP» RELATIVE MOTION OF ELASTIC SOLIDS

A new model of a one-dimensional thermoelastic contact problem has been proposed for the case of frictional heat generation and a «stick-slip» motion. A two dimensional heavy solid hanged on an elastic spring can oscillate in the vertical direction. The solid is in contact with two layers moving vertically with a constant velocity of small magnitude. The purpose of the paper is twofold: firstly the elastic strain is taken into account, secondly the effect of the generated heat of friction on the behaviour of the process is considered. Here the Cauchy problem has been reduced to a nonlinear ordinary differential equation. To obtain the solution we have made use of the Laplace transforms and have constructed a numerical algorithm. The results have been presented in the form of diagrams suitable for discussion.

Стаття надійшла до редколегії 15.06.99