ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
*Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 127–130 Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 127–130*

УДК 539.377

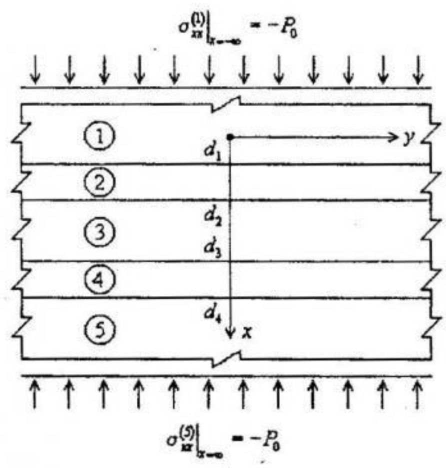
**Роман Кушнір**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики*
*ім. Я.С. Підстригача НАН України*

# ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ З НЕСТАЦІОНАРНИМ ФРИКЦІЙНИМ ТЕПЛОУТВОРЕННЯМ

У праці [3] запропонована методика визначення нестаціонарного температурного поля і зумовлених ним температурних напружень у стисненій кусково-однорідній структурі з фрикційним теплоутворенням. Вона ґрунтується на рівняннях термопружності однорідних тіл з використанням узагальнених функцій для опису всієї структури як єдиного цілого і виконання математичної постановки узагальненої задачі спряження стосовно цих рівнянь [2, 6] за умов неідеального термомеханічного контакту на поверхнях спряження різнорідних складових структури. У результаті одержуємо частково-вироджені диференціальні рівняння квазістатичної задачі термопружності з розривними коефіцієнтами. Побудову їхніх розв'язків виконуємо з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом і одного способу знаходження фундаментальної системи розв'язків звичайного диференціального рівняння довільного порядку з кусково-сталими коефіцієнтами [4].

За такою методикою знайдено розв'язок і проведено числовий аналіз задачі для двох стиснених на безмежності паралельно до осі $Ox$ зусиллями $P_0$ різнорідних півпросторів, між якими рухається зі сталою швидкістю $v_0$ і тертям паралельно до їхніх граничних поверхонь прошарок з відмінними від просторів фізико-механічними характеристиками [3, 5]. Побудуємо розв'язок цієї ж задачі за умови, що прошарок теж є кусково-однорідним (схема задачі зображена на рис.).




Для цього випадку треба розв'язати частково-вироджене диференціальне рівняння нестаціонарної задачі теплопровідності [3]:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{1}{a(x)}\frac{\partial t}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{4}\left\{\left[\left(1-K_{\lambda}^{(k)}\right)\frac{\partial t_{k+1}}{\partial x}\bigg|_{x=d_k} - \frac{f_k\, P_0\, v_0}{\lambda_t^{(k)}}\right]\delta_{-}(x-d_k) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{2\lambda_t^{(k+1)}}{h_k}\frac{\partial t_{k+1}}{\partial x}\bigg|_{x=d_k} + \frac{f_k \quad P_0 \quad v_0}{h_k}\right]\delta'_{-}(x-d_k)\right\} \qquad (1)$$

із початковою та граничними умовами

$$t(x,\ 0)=0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} t(x,\ \tau)=0\,, \tag{2}$$

де $f_k$ і $h_k$ – коефіцієнти тертя і термічної провідності, $K_\lambda^{(k)}=\lambda_t^{(k+1)}/\lambda_t^{(k)}$; шукана функція температури $t(x,\tau)$, а також коефіцієнти теплопровідності $\lambda_t(x)$ і температуропровідності $a(x)$ подають у вигляді

$$p(x)=p_1+\sum_{k=1}^{4}(p_{k+1}-p_k)\,S_-(x-d_k)\,, \tag{3}$$

де $p(x)$ і $p_k$ – відповідно температура та фізико-механічні характеристики всієї кусково-однорідної структури та її $k$-ї складової; $S_-(x)$ – асиметрична одинична функція.

Розв'язок крайової задачі (1), (2) будуємо з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом $\tau$. У результаті, як і в [3], одержуємо вираз для трансформанти функції температури:

$$\overline{t}(x,\ s)=Q_1(x,s)+\sum_{k=1}^{4}Q_{k+1}(x,s)\,S_-(x-d_k)\,, \tag{4}$$

де $\overline{t}(x,s)=\int\limits_0^\infty t(x,\tau)\ e^{-s\tau}\,d\tau, \qquad a_k=a\,;$

$$Q_1(x,s)=Ce^{x\sqrt{s/a}}\,,\ Q_{k+1}(x,s)=\Big(\sum_{l=1}^{k}\frac{dQ_l(x,s)}{dx}\Big|_{x=d_k}\Big)\ \Theta_k^*(x)+\Theta_k^0(x)\,, \quad k=\overline{1,4}\,;$$

$$\Theta_k^0(x)=-\,F_k(s)\left[\frac{\operatorname{sh}\sqrt{s/a}(x-d_k)}{\lambda_t^{(k+1)}}+\frac{1}{h_k}\sqrt{\frac{s}{a}}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a}}(x-d_k)\right],\quad F_k(s)=\frac{f_k\,P_0\,v_0}{s}\sqrt{\frac{a}{s}}\,,$$

$$\Theta_k^*(x)=\left[\left(K_\lambda^{(k)}\right)^{-1}-1\right]\frac{\sqrt{a}\operatorname{sh}\sqrt{s/a}(x-d_k)}{\sqrt{s}}+\frac{2\lambda_t^{(k)}}{h_k}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{a}}(x-d_k)\,;$$

$$C=-\Big(\sum_{k=1}^{4}e^{-\sqrt{s/a}\,d_k}\tilde{Q}_k\Big)\Big(2+\sum_{k=1}^{4}\hat{\mathcal{P}}_k(d_k)\,e^{-\sqrt{s/a}d_k}\bar{\Theta}_k^*\Big)^{-1};$$

$$\tilde{Q}_1=\bar{\Theta}_1^0, \qquad \tilde{Q}_k=\Big(\sum_{m=1}^{k-1}\frac{d\tilde{\mathcal{P}}_m(x)}{dx}\Big|_{x=d_k}\Big)\,\bar{\Theta}_k^*+\bar{\Theta}_k^0, \quad k=\overline{2,4}\,;$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_1(x)=\Theta_1^0(x)\,,\quad \tilde{\mathcal{P}}_m(x)=\Big(\sum_{l=1}^{m-1}\frac{d\tilde{\mathcal{P}}_l(x)}{dx}\Big|_{x=d_m}\Big)\Theta_m^*(x)+\Theta_m^0(x), \quad m\ge 2;$$

$$\hat{\mathcal{P}}_1(x)=\sqrt{s/a}\ e^{\sqrt{s/a}x}\,,\quad \hat{\mathcal{P}}_k(x)=\hat{\mathcal{P}}_{k-1}(x)+\hat{\mathcal{P}}_{k-1}(d_{k-1})\frac{d\Theta_{k-1}^*(x)}{dx}, \qquad k=\overline{2,4}\,;$$

$$\bar{\Theta}_k^0=-F_k(s)\Big(\frac{1}{\lambda_t^{(k+1)}}+\frac{1}{h_k}\sqrt{\frac{s}{a}}\Big),\quad \bar{\Theta}_k^*=\sqrt{\frac{a}{s}}\left[\left(K_\lambda^{(k)}\right)^{-1}-1\right]+\frac{2\lambda_t^{(k)}}{h_k}\,.$$

Зумовлене цим нестаціонарним температурним полем термопружне переміщення знаходимо з такого диференціального рівняння [3, 5]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta(x)\, t(x,\tau) + C_u\,, \tag{5}$$

де $\beta(x) = \dfrac{\alpha_t(x)[1+\nu(x)]}{1-\nu(x)}$; $C_u$ – стала інтегрування; $\alpha_t(x)$ і $\nu(x)$ – відповідно температурний коефіцієнт лінійного розширення і коефіцієнт Пуассона, які подають у вигляді (2).

У рівнянні (5) вже враховані умови рівності переміщень ($u_k = u_{k+1}$) на поверхнях спряження $x = d_k$, а для відшукання сталої $C_u$ використовуємо такі умови контакту на цих поверхнях [1, 5]:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k+1)} = -P_0 \qquad \text{при} \qquad x = d_k\,, \tag{6}$$

де $\sigma_{xx}^{(k)} = \mu_k æ_k \left(\dfrac{\partial u_k}{\partial x} - \beta_k t_k\right)$, $\mu_k = \dfrac{E_k}{2(1+\nu_k)}$, $æ_k = \dfrac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k}$, $E_k$ – модуль пружності $k$-ї складової кусково-однорідної структури.

Застосувавши до рівняння (5) інтегральне перетворення Лапласа, зінтегруємо його. Одержимо таке зображення для термопружного переміщення:

$$\begin{aligned}
\overline{u}(x,s) = {} & C\beta_1\sqrt{\frac{a}{s}}\left\{e^{x\sqrt{s/a}}[1-S_-(x-d_1)] + e^{d_1\sqrt{s/a}}S_-(x-d_1)\right\} + \\
& + \beta_2 S_-(x-d_1)\int\limits_{d_1}^{x}\sum_{k=1}^{2}Q_k(x)\,dx - \beta_2 S_-(x-d_2)\int\limits_{d_2}^{x}\sum_{k=1}^{2}Q_k(x)\,dx + \\
& + \beta_3 S_-(x-d_2)\int\limits_{d_2}^{x}\sum_{k=1}^{3}Q_k(x)\,dx - \beta_3 S_-(x-d_3)\int\limits_{d_3}^{x}\sum_{k=1}^{3}Q_k(x)\,dx + \\
& + \beta_4 S_-(x-d_3)\int\limits_{d_3}^{x}\sum_{k=1}^{4}Q_k(x)\,dx - \beta_4 S_-(x-d_4)\int\limits_{d_4}^{x}\sum_{k=1}^{4}Q_k(x)\,dx + \\
& + \beta_5 S_-(x-d_4)\int\limits_{d_4}^{x}\sum_{k=1}^{5}Q_k(x)\,dx + C_u\,x,
\end{aligned} \tag{7}$$

де $C_u\,x = C_u^{(1)}\,x + \sum\limits_{k=1}^{4}\left[C_u^{(k+1)} - C_u^{(k)}\right](x-d_k)S_-(x-d_k)$, $\quad C_u^{(k)} = -\dfrac{1}{\mu_k æ_k}\dfrac{P_0}{s}$.

Для випадку, коли на поверхнях спряження $x = d_2$ і $x = d_3$ складових прошарку враховується лише їхній термоопір $R_k = 2/h_k$ $(k = 2,\ 3)$, у формулах (4) і (7) треба прийняти $f_2 = f_3 = 0$.

Як часткові випадки з формул (4) і (7) при $\lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(k)}$, $\alpha_t^{(2)} = \alpha_t^{(k)}$, $E_2 = E_k$ і $\nu_2 = \nu_k$ $(k = 3,\ 4)$, $d_1 = 0$ одержуємо трансформанти температури і переміщення у стисненій на безмежності тришаровій структурі [3, 5], а також прийнявши додатково, що $\lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(5)}$, $\alpha_t^{(2)} = \alpha_t^{(5)}$, $E_2 = E_5$, $\nu_2 = \nu_5$,

$d_4 \to \infty$, $h_5 \to \infty$ – для відповідної задачі про контактну взаємодію двох різнорідних півпросторів із урахуванням фрикційного нагріву [1].

Щоб одержати розв'язок сформульованої квазістатичної задачі термопружності відновлюємо оригінали $t(x,\tau)$ і $u(x,\tau)$ зображень $\bar{t}(x,s)$ та $\bar{u}(x,s)$ за допомогою числового спектрального методу обернення у базисі ортогональних многочленів Якобі [5]. Це дає змогу проводити числовий аналіз залежностей від часової і просторової координат нестаціонарного температурного поля і зумовленого ним термопружного переміщення, які виникають внаслідок контактної взаємодії складових такої кусково-однорідної структури, при різних співвідношеннях їхніх фізико-механічних характеристик.

---

1. *Грилицький Д. В.* Термопружні контактні задачі в трибології. – К., 1996. – 204 с.
2. *Коляно Ю. М., Кулик О. М., Кушнір Р. М.* Про постановку узагальненої задачі спряження для рівнянь термопружності кусково-однорідних тіл // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 2. – С. 43–47.
3. *Кушнір Р. М.* Використання методу узагальнених задач спряження в термопружності кусково-однорідних тіл при неідеальному контакті // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 1. – С. 108–116.
4. *Кушнір Р. М.* Про побудову розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь з кусково-сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 9. – С. 54–57.
5. *Кушнір Р. М., П'янило Я. Д.* Дослідження термонапруженого стану кусково-однорідного вузла тертя // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 3. – С. 98–102.
6. *Kushnir R. M.* Thermoelasticity of piecewise-homogeneous structures: method of investigation utilizing the distribution technique // Thermal Stresses '97: Proc. of the 2nd Int. Symp. of Thermal Stresses and Related Topics, June 8–11, 1997. – Rochester, New York: Rochester Inst. of Techn., 1997. – P. 557–560.

**Roman Kushnir**

## THERMOELASTIC STATE OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS STRUCTURE INVOLVING NONSTATIONARY FRICTIONAL HEATING

*A nonstationary themperature field and thermal displacement caused by them in two compressible inhomogeneous half-spaces with piecewise-homogeneous layer moving between them with friction are determined using the method of generalized coupling problems.*

Стаття надійшла до редколегії 27.07.99