ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 143–147 *Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 143–147*

УДК 539.3

Петро Краснюк

Львівський національний університет ім. І. Франка

ТЕРМОПРУЖНА КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ КІЛЬЦЯ ТА ЦИЛІНДРА ЗА ФРИКЦІЙНОГО ТЕПЛОУТВОРЕННЯ

Контактні вузли, які складаються з обтисненого бандажем пружного циліндра, широко використовують у машинобудуванні, що робить актуальним як у теоретичному, так і у прикладному аспектах дослідження відповідних контактних задач. Одним із прикладів такої взаємодії є випадок обтиснення довгого циліндра тонким пружним кільцем. Відповідна пружна контактна задача для такої системи розглянута в [1], де одержано аналітичну формулу для контактного тиску.

Це повідомлення стосується дослідження статичної термопружної задачі взаємодії порожнинного циліндра та насадженої на нього без натягу кільцевої пластини постійної товщини, коли їхній контакт супроводжується стаціонарним теплоутворенням від дії сил тертя.

Постановка задачі. Нехай на довгий пружний циліндр (рис. 1) із внутрішнім радіусом a_1 та зовнішнім a_0 насаджено тонку кільцеву пластину з внутрішнім радіусом a_0 та зовнішнім a_2 постійної товщини 2δ (коли δ – мале порівняно з a_0). На поверхнях $r = a_j$, $j = 1, 2$ задаються радіальні напруження q_j, де q_1 змінюється вздовж осі циліндра, а зміною навантаження q_2 вздовж бічної поверхні пластини нехтуємо.

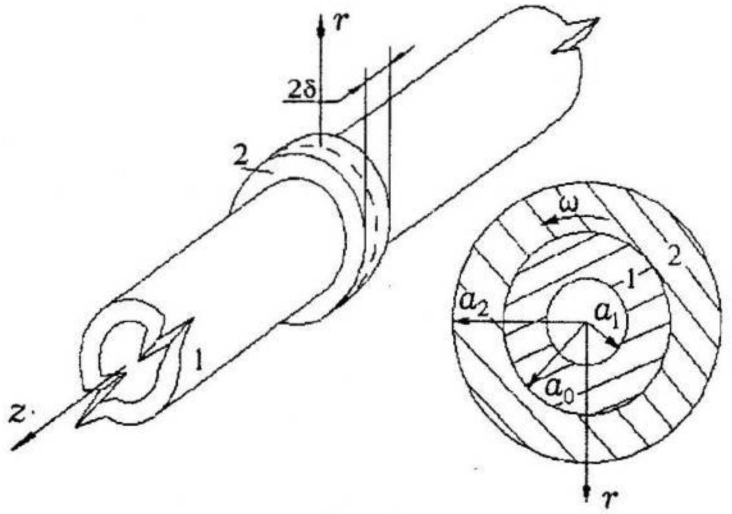

Рис. 1.

Припустимо, що пластина обертається стосовно циліндра з малою кутовою швидкістю ω. За рахунок дії сил тертя, які виникають на співдотичних поверхнях тіл і підпорядкованих закону Амонтона, відбувається теплоутворення, тепловий контакт тіл неідеальний, а між неконтактуючими поверхнями циліндра та пластини і довкіллям нульової температури відбувається теплообмін за законом Ньютона.

Розглядаючи задачу у статичній постановці, визначимо розподіл напружень, переміщень, температури і теплових потоків у трибосистемі за врахувуючи у кільцевій пластині відцентрових сил інерції.

Вважаючи переріз, що проходить через середину пластини нульовим, віднесемо цю трибопару до циліндричної системи координат, спрямувавши вісь z за віссю циліндра. Додатково припускаємо, що розподіл навантаження $q_1(z)$ є симетричним стосовно осі $z = 0$, а його поведінка на нескінченності така, що допускає використання інтегрального косинус-перетворення Фур'є.

Тоді, за зроблених припущень, для циліндра розглядаємо осесиметричну задачу термопружності, яка математично зводиться до побудови розв'язку системи, яка охоплює диференціальні рівняння теплопровідності:

$$\partial_r^2 T_1 + r^{-1}\,\partial_r T_1 + \partial_z^2 T_1 = 0\,, \tag{1}$$

рівноваги, сумісності деформацій та співвідношення закону Гука (формули (1.2)–(1.4) з праці [2] при $j = 1$). Натомість у пластині реалізується узагальнений плоский напружений стан, тому тут одержимо систему, яка складається з рівняння теплопровідності тонких пластин:

$$\partial_r^2\, T_2 + r^{-1}\,\partial_r T_2 - \kappa^2\, T_2 = 0 \tag{2}$$

(де коефіцієнт κ характеризує інтенсивність тепловіддачі з основ пластини) та рівняння термопружності з урахуванням відцентрових сил інерції:

$$\partial_r^2\, u_r^{(2)} + r^{-1}\,\partial_r u_r^{(2)} - r^{-2}\, u_r^{(2)} + \omega^2\, \tilde{c}^{-2}\, r = \alpha_2\,(1 + \nu_2)\,\partial_r T_2\,. \tag{3}$$

При цьому розв'язки систем диференціальних рівнянь мають задовольняти граничні та контактні умови:

$$r = a_1: \qquad \partial_r\, T_1 = \gamma_1\, T_1\,; \quad \sigma_r^{(1)} = -q_1(z)\,; \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0\,; \tag{4}$$

$$r = a_2: \qquad \partial_r\, T_2 = -\gamma_2\, T_2\,; \quad \sigma_r^{(2)} = -q_2\,; \tag{5}$$

$$r = a_0,\ |z| \le \delta: \qquad \lambda_1 \langle \partial_r\, T_1 \rangle - \lambda_2\, \partial_r\, T_2 = f\,\omega\, a_0\, \langle p(z) \rangle\,; \tag{6}$$

$$\lambda_1 \langle \partial_r\, T_1 \rangle + \lambda_2\, \partial_r\, T_2 + h\,(\langle T_1 \rangle - T_2) = 0\,; \tag{7}$$

$$\left\langle u_r^{(1)} \right\rangle = u_r^{(2)}\,; \quad \left\langle \sigma_r^{(1)} \right\rangle = \sigma_r^{(2)} = -\langle p(z) \rangle\,; \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0\,; \tag{8}$$

$$r = a_0,\ \ |z| > \delta: \quad \partial_r\, T_1 = -\gamma_0\, T_1\,;\ \sigma_r^{(1)} = 0\,;\ \tau_{rz}^{(1)} = 0\,, \tag{9}$$

де $\gamma_j = \overline{\alpha}_j / \lambda_j$ $(\gamma_0 = \overline{\alpha}_0 / \lambda_1)$; $\tilde{c} = \sqrt{E_2 / \left(\rho_2 (1 - \nu_2^2)\right)}$; $p(z)$ – контактний тиск; T_j – температура; $\sigma_r^{(j)}$, $\tau_{rz}^{(j)}$ – радіальне і дотичне напруження; $u_r^{(j)}$ – радіальне переміщення; E_j – модуль Юнга; f, ν_j, λ_j, α_j, $\overline{\alpha}_j\,(\overline{\alpha}_0)$ – відповідно коефіцієнти тертя, Пуассона, теплопровідності, лінійного теплового розширення та теплообміну; h – термічна провідність площини контакту; ρ_2 – густина. У наведених та наступних формулах значення $j = 1$ стосується циліндра, $j = 2$ – пластини.

Оскільки товщина циліндричної пластини приймається малою, то на ділянці взаємодії досить забезпечити виконання усереднених за z теплофізичних (6), (7) та механічних (8) контактних умов, про що свідчить наявність доданків у трикутних дужках для компонент, які відповідають порожнистому циліндру (наприклад, $\left\langle u_r^{(1)} \right\rangle (r) = \dfrac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} u_r^{(1)}(r,z)\,dz$). У випадку циліндричної пластини таке означення є очевидним і випливає з умови узагальненого плоского напруженого стану.

Побудова розв'язку. Ввівши дві невідомі функції

$$f_1(z) = \left(\partial_r\, T_1(a_0, z) + \gamma_0\, T_1(a_0, z)\right) H(\delta - |z|) \quad \text{та} \quad \langle f_2(z) \rangle = -\partial_r T_2(a_0) \tag{10}$$

(де $H(z)$ – функція Гевісайда), для кожної зі складових трибосистеми записуємо вирази для температури, напружень і переміщень у тілах стосовно функцій f_j та невідомого контактного тиску. Для того щоб одержати кінцевий розв'язок задачі, потрібно визначити характер зміни вздовж осі z контактного тиску та функцій f_j і задовольнити контактні умови при $r = a_0$, $|z| \le \delta$.

Стосовно контактного тиску приймемо, згідно з [1], що

$$p(z) = p_* \left(\delta^2 - z^2\right)^{\beta - 1}, \tag{11}$$

якщо β є першим додатним коренем характеристичного рівняння:

$$\mathrm{tg}(\pi\beta)\sin(\pi\beta) = -\frac{(1-\nu_1^2)\, E_2}{(1-\nu_2^2)\, E_1}\left(1 - 2\beta^2 - \cos(\pi\beta)\right).$$

Щодо функцій $f_j\,(z)$, то припустивши, що при $|z| \le \delta$: $T_1(a_0,\, z) = T_1(a_0)$ та скориставшись теплофізичними контактними умовами (6), (7), запишемо такі вирази:

$$f_1(z) = 0.5 f\omega a_0 \lambda_1^{-1}\, p_* (\delta^2 - z^2)^{\beta-1} + (\gamma_0 - 0.5 h \lambda_1^{-1})\, T_1(a_0) + 0.5 h \lambda_1^{-1}\, T_2(a_0),$$

$$f_2(z) = 0.5 f\omega a_0 \lambda_2^{-1}\, p_* (\delta^2 - z^2)^{\beta-1} + 0.5 h \lambda_2^{-1}\, T_1(a_0) - 0.5 h \lambda_2^{-1}\, T_2(a_0). \tag{12}$$

Формули для знаходження $T_j(a_0)$ одержимо, використавши вирази для температури циліндра та циліндричної пластини. Як наслідок,

$$T_j(a_0) = f\omega a_0\, p_* Q_j, \tag{13}$$

де

$$Q_1 = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{4\lambda_2}\delta^{2(\beta-1)}\Gamma(\beta)\Gamma^{-1}(\beta + \tfrac{1}{2})\Phi_2(a_0)\frac{h}{2\pi\delta\lambda_1}F_1\{\overline{\Phi}_1(a_0,\xi)\} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi}\delta\lambda_1}(2\delta)^{(\beta-\frac{1}{2})}F_2\{\overline{\Phi}_1(a_0,\xi)\}\left(1 + \frac{h}{2\lambda_2}\Phi_2(a_0)\right)\right]Q^{-1},$$

$$Q_2 = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{4\lambda_2}\delta^{2(\beta-1)}\Gamma(\beta)\Gamma^{-1}(\beta + \tfrac{1}{2})\Phi_2(a_0)\left(1 - \frac{1}{\pi\delta}\left(\gamma_0 - \frac{h}{2\lambda_1}\right)F_1\{\overline{\Phi}_1(a_0,\xi)\}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi}\delta\lambda_1}(2\delta)^{(\beta-\frac{1}{2})}F_2\{\overline{\Phi}_1(a_0,\xi)\}\frac{h}{2\lambda_2}\Phi_2(a_0)\right]Q^{-1},$$

$$Q=\left(1+\frac{h}{2\lambda_2}\Phi_2(a_0)\right)\left(1-\frac{\gamma_0}{\pi\delta}F_1\{\overline{\Phi}_1(a_0,\xi)\}\right)+\frac{h}{2\pi\delta\lambda_1}F_1\{\overline{\Phi}_1(a_0,\xi)\},$$

$$F_1\{f(\xi)\}=\int_0^\infty f(\xi)\frac{1-\cos(2\xi\delta)}{\xi^2}d\xi\,;\quad F_2\{f(\xi)\}=\int_0^\infty f(\xi)\frac{J_{\beta-\frac{1}{2}}(\xi\delta)}{\xi^{\beta-\frac{1}{2}}}\frac{\sin(\xi\delta)}{\xi}d\xi\,,$$

$$\overline{\Phi}_1(r,\xi)=\{I_0(\xi r)[\xi K_1(\xi a_1)+\gamma_1K_0(\xi a_1)]+K_0(\xi r)[\xi I_1(\xi a_1)-\gamma_1 I_0(\xi a_1\;]\}$$
$$\times\{[\xi I_1(\xi a_0)+\gamma_0 I_0(\xi a_0)][\xi K_1(\xi a_1)+\gamma_1 K_0(\xi a_1\;]$$
$$-[\xi K_1(\xi a_0)-\gamma_0 K_0(\xi a_0)][\xi I_1(\xi a_1)-\gamma_1 I_0(\xi a_1\;]\}\quad,$$

$$\Phi_2(r)=-\frac{1}{\kappa}\frac{I_0(\kappa r)[\kappa K_1(\kappa a_2)-\gamma_2K_0(\kappa a_2)]+K_0(\kappa r)[\kappa I_1(\kappa a_2)+\gamma_2 I_0(\kappa a_2)]}{I_1(\kappa a_0)[\kappa K_1(\kappa a_2)-\gamma_2K_0(\kappa a_2)]-K_1(\kappa a_0)[\kappa I_1(\kappa a_2)+\gamma_2 I_0(\kappa a_2)]},$$

ξ – параметр інтегрального перетворення Фур'є; $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ – модифіковані функції Бесселя першого і другого роду, порядку ν; $J_\nu(z)$ – функція Бесселя першого роду, порядку ν; $\Gamma(\beta)$ – гамма-функція.

Задовольнивши останню граничну умову – кінематичну умову контакту з (8), запишемо формулу для p_*:

$$p_*=\left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1}\frac{2a_1}{\pi\delta}\int_0^\infty\overline{q}_1(\xi)\overline{\Delta}_2(a_2,\xi)\frac{\sin(\xi\delta)}{\xi}d\xi-\frac{q_2}{E_2}\frac{2a_0a_2^2}{a_2^2-a_0^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\omega^2a_0}{4(1-\nu_2^2)\tilde{c}^2}\left(a_2^2(3+\nu_2)+a_0^2(1-\nu_2)\right)\right]\left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1}\frac{2a_0}{\sqrt{\pi}\delta}(2\delta)^{\beta-\frac{1}{2}}\times\right.$$
$$\times\Gamma(\beta)F_2\{\overline{\Delta}_1(a_1,\xi)\}-\frac{\sqrt{\pi}a_0}{2E_2}\delta^{2(\beta-1)}\Gamma(\beta)\Gamma^{-1}(\beta+\frac{1}{2})\left(\frac{a_2^2+a_0^2}{a_2^2-a_0^2}+\nu_2\right)+f\omega a_0\times$$
$$\times\left\langle\alpha_1\left[\frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi}\delta\lambda_1}(2\delta)^{\beta-\frac{1}{2}}F_2\{\overline{H}_1(\xi)\}+Q_1\frac{\gamma_0}{\pi\delta}F_1\{\overline{H}_1(\xi)\}+(Q_2-Q_1)\frac{h}{2\pi\delta\lambda_1}F_1\{\overline{H}_1(\xi)\}\right]-\right.$$
$$\left.\left.-\alpha_2\left[\frac{a_0\sqrt{\pi}\delta^{2(\beta-1)}}{2\lambda_2(a_2^2-a_0^2)}\Gamma(\beta)\Gamma^{-1}(\beta+\frac{1}{2})H_2(a_0)+\frac{a_0h}{\lambda_2(a_2^2-a_0^2)}(Q_2-Q_1)H_2(a_0)\right]\right\rangle\right]^{-1},\quad(14)$$

коли $\overline{q}_1(\xi)$ – косинус-перетворення Фур'є функції обтискуючого навантаження $q_1(z)$,

$$\overline{H}_1(\xi)=(1-\nu_1^2)\xi^{-2}\left[\Delta_2(a_1,\xi)\Delta^{-1}(a_1,\xi)\,\partial_r\overline{\Phi}_1(a_1,\xi)-\right.$$
$$\left.-\left(\Delta_1(a_1,\xi)\Delta^{-1}(a_1,\xi)-(1-\nu_1)^{-1}\right)\partial_r\overline{\Phi}_1(a_0,\xi)\right],$$

$$H_2(a_0)=\frac{a_0}{\kappa^2}-\frac{a_2}{\kappa^2}\frac{I_1(\kappa a_2)[\kappa K_1(\kappa a_2)-\gamma_2K_0(\kappa a_2)]-K_1(\kappa a_2)[\kappa I_1(\kappa a_2)+\gamma_2I_0(\kappa a_2)]}{I_1(\kappa a_0)[\kappa K_1(\kappa a_2)-\gamma_2K_0(\kappa a_2)]-K_1(\kappa a_0)[\kappa I_1(\kappa a_2)+\gamma_2I_0(\kappa a_2)]},$$

а вирази для $\Delta_1(a_1,\xi)$, $\Delta_2(a_1,\xi)$ і $\Delta(a_1,\xi)$ наведені в [2].

За наведеними вище формулами обчислюємо контактний тиск і температуру тіл на ділянці контакту і, як наслідок, знаходимо розподіл температури, теплових потоків, напружень і переміщень у складових трибосистеми.

Аналіз результатів. Для ілюстрації обрано графік залежності p_* від величини кутової швидкості обертання ω (зміна якої визначає інтенсивність теплоутворення), для різних значень відношення коефіцієнтів лінійного теплового розширення тіл. Показано існування такого співвідношення між α_1 і α_2, за якого p_* змінює знак (криві 1, 2 на рис. 2), що свідчить про відрив пластини від циліндра. Тому основним результатом праці є виконане аналітичній формі дослідження явища відшарування пружних тіл за фрикційного теплоутворення.

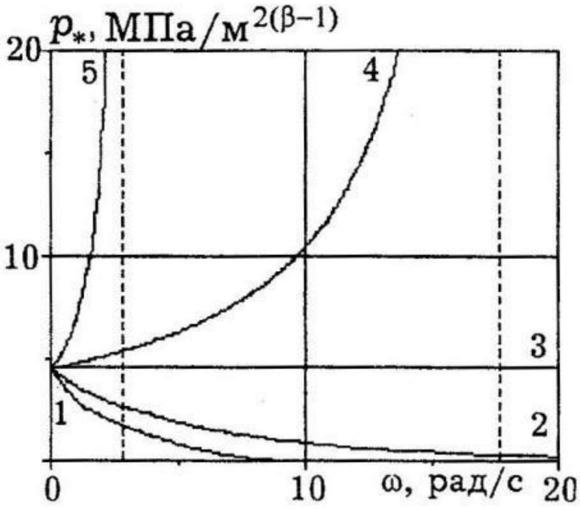

Рис. 2.

1. *Арутюнян Н. Х.* О контактном взаимодействии упругого кольца с упругим цилиндром // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – № 2. – С. 204–206.
2. *Грилицкий Д. В., Краснюк П. П.* Термоупругий контакт двух цилиндров с нестационарным фрикционным теплообразованием // Прикладная механика и техническая физика. – 1997. – **38**, № 3. – С. 112–121.

Peter Krasnyuk

THERMOELASTIC CONTACT INTERACTION BETWEEN THE RING AND THE CYLINDER UNDER THE FRICTIONAL HEAT GENERATION

In the present paper the static thermoelastic contact problem of embracing of the hollow cylinder by a round ring slice of finite length which is put on it without stretch, when their interaction is accompanied by stationary frictional heat generation, is investigated.

Стаття надійшла до редколегії 25.06.99