ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 148–151 Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 148–151

УДК 539.3

Роман Кульчицький-Жигайло

Львівський національний університет ім. І. Франка

КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛОУТВОРЕННЯ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ

1. Постановка задачі. Розглядається контактна задача термопружності про взаємодію жорсткої теплопровідної основи (півпростору) з пружним тілом, поверхня якого має форму еліптичного параболоїда. Тіло притискається до півпростору силою P і рухається вздовж його поверхні зі швидкістю V. Властивості матеріалу тіла описують такими співвідношеннями

$$\sigma_{11} = A_1 w_{1,1} + A_2 w_{2,2} + A_3 w_{3,3} - \beta_1 T\,, \tag{1}$$

$$\sigma_{22} = A_2 w_{1,1} + A_1 w_{2,2} + A_3 w_{3,3} - \beta_1 T\,, \tag{2}$$

$$\sigma_{33} = A_3 w_{1,1} + A_3 w_{2,2} + A_4 w_{3,3} - \beta_3 T\,, \tag{3}$$

$$\sigma_{12} = \tfrac{1}{2}(A_1 - A_2)\left(w_{1,2} + w_{2,1}\right), \tag{4}$$

$$\sigma_{13} = A_5\left(w_{1,3} + w_{3,1}\right), \qquad \sigma_{23} = A_5\left(w_{2,3} + w_{3,2}\right), \tag{5}$$

де w_i – компоненти вектора пружного переміщення; σ_{ij} – складові тензора напруження; A_i, β_i – фізико-механічні властивості матеріалу.

Під час ковзання внаслідок дії сил тертя утворюється тепло, яке витрачається на нагрівання рухомого тіла та виникнення в ньому термічних напружень і деформацій. Поза ділянкою контакту поверхня тіла вільна від навантаження і теплоізольована. Вважаємо, що інтенсивність теплоутворення дорівнює потужності сил тепла:

$$q = fVp\,, \tag{6}$$

де q – тепловий потік через поверхню тіла; p – контактний тиск; f – коефіцієнт тертя.

За цих припущень розподіли температури, переміщень і напружень одержимо, розв'язавши задачу математичної фізики:

рівняння рівноваги:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0\,, \tag{7}$$

$$\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0\,, \tag{8}$$

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} = 0\,; \tag{9}$$

рівняння теплопровідності:

$$T_{,11} + T_{,22} + K^2 T_{,33} = 0\,; \tag{10}$$

рівняння стану (1)–(5);

крайові умови на поверхні півпростору $z = 0$:

$$w_3 = h - x^2/2R_1 - y^2/2R_2\,, \qquad (x,y) \in \Omega\,, \tag{11}$$

$$\sigma_{33} = -p(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \qquad \sigma_{33} = 0, \quad (x,y) \notin \Omega\,, \tag{12}$$

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0\,, \tag{13}$$

$$q = -K_3\, T_{,3} = fVp(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \qquad q = 0, \quad (x,y) \notin \Omega\,; \tag{14}$$

умова рівноваги тіла:

$$\iint_\Omega p(x,y)\, dx\, dy = P\,, \tag{15}$$

де R_1, R_2 – головні радіуси кривини у вершині тіла; h – невідоме вертикальне переміщення тіла.

2. Метод розв'язування. Розв'язок задачі теплопровідності, одержаний за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є, в області трансформант має вигляд

$$\overline{T}(\xi,\eta,z) = T_0(\xi,\eta)\exp\left(-\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,z/K\right), \tag{16}$$

де

$$T_0(\xi,\eta) = \frac{fVK}{K_3}\frac{\overline{p}(\xi,\eta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \quad \overline{p}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\, e^{-ix\xi - iy\eta}\, dx\, dy\,. \tag{17}$$

Розв'язок задачі термопружності подаємо у вигляді суперпозиції двох розв'язків:

$$w_i = w_i^e + w_i^{\text{th}}, \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^{\text{th}}\,, \tag{18}$$

де w_i^e, σ_{ij}^e – розв'язок відповідної ізотермічної задачі з відомим розподілом контактного тиску $p(x,y)$; w_i^{th}, σ_{ij}^{th} – розв'язок задачі термопружності про нагрівання вільної від навантаження поверхні тіла тепловим потоком $q(x,y)$ (6).

Пружну складову вектора переміщень $\mathbf{w}^e$ шукаємо у вигляді

$$w_1^e = \Phi_{1,1} + \Phi_{2,1}, \quad w_2^e = \Phi_{1,2} + \Phi_{2,2}, \quad w_3^e = \lambda_1\,\Phi_{1,3} + \lambda_2\,\Phi_{2,3}, \tag{19}$$

де $\lambda_i = \dfrac{\gamma_i^2 A_1 - A_5}{A_1 + A_5}$, γ_i є коренями характеристичного рівняння

$$A_1 A_5 \gamma^4 + \left(A_3^2 + 2A_3 A_5 - A_1 A_4\right)\gamma^2 + A_4 A_5 = 0\,, \tag{20}$$

а функції Φ_i є розв'язками диференціальних рівнянь

$$\Phi_{i,11} + \Phi_{i,22} + \gamma_i^2 \Phi_{i,33} = 0\,. \tag{21}$$

Знайшовши за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є невідомі функції Φ_i, для пружної складової вертикального переміщення поверхні тіла одержимо співвідношення

$$\overline{w}_3^e(\xi,\eta,0) = W_p \frac{\overline{p}(\xi,\eta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \quad W_p = \frac{A_1(\gamma_1+\gamma_2)}{A_1A_4 - A_3^2}. \tag{22}$$

Зазначимо, що під час знаходження виразів (22), було закладено припущення $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Однак відповідні вирази для випадку $\gamma_1 = \gamma_2$ можна отримати з (22), підставляючи $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_0$.

Частинний розв'язок рівнянь термопружності (1)–(5), (7)–(9) шукаємо у вигляді

$$w_1^{\mathrm{th}} = \Psi_{,1}, \quad w_2^{\mathrm{th}} = \Psi_{,2}, \quad w_3^{\mathrm{th}} = \mu\Psi_{,3}\,. \tag{23}$$

Несуперечливі рівняння одержуємо у випадку

$$\mu = \frac{\beta_1 K^2(A_3+A_5) + \beta_3\left(A_5 - A_1K^2\right)}{\beta_1\left(A_4 - K^2A_5\right) - \beta_3(A_3+A_5)}\,.$$

Термопружну складову вектора переміщень $\mathbf{w}^{\mathrm{th}}$ отримуємо внаслідок додавання до переміщень (23) загального розв'язку однорідних рівнянь (1)–(5), (7)–(9) і задоволення умов ненавантаженості поверхні тіла.

В результаті термопружну складову вертикального переміщення поверхні тіла знаходимо у вигляді

$$\overline{w}_3^{\mathrm{th}} = W_t \frac{\overline{p}(\xi,\eta)}{\xi^2+\eta^2}, \quad W_t = \frac{K^2(U_2 - U_1U)fV}{\left[A_1A_5K^4 + \left(A_3^2 + 2A_3A_5 - A_1A_4\right)K^2 + A_4A_5\right]K_3}, \tag{24}$$

де

$$U_1 = \beta_1\left(A_4 + A_3K^2\right) - \beta_3\left(A_1K^2 + A_3\right),$$

$$U_2 = \beta_1 K^2(A_3+A_5) + \beta_3\left(A_5 - A_1K^2\right),$$

$$U = \frac{A_5\left(A_1K(\gamma_1+\gamma_2) + A_3 - \sqrt{A_1A_4}\right)}{A_1A_4 - A_3^2}.$$

Зазначимо, що формулами (24) можна безпосередньо користуватись, якщо K не є коренем характеристичного рівняння (20). Інакше у цих формулах треба спочатку зробити граничний перехід при $K \to \gamma_1$ чи $K \to \gamma_2$.

Порівнюючи залежності (22), (24) з відповідними залежностями для ізотропного тіла, доходимо висновку, що вони відрізняються між собою лише коефіцієнтами. Це означає, що розв'язок контактної задачі для тіл з розглянутих вище матеріалів зберігає всі характерні властивості розв'язку, побудованого для випадку однорідного ізотропного тіла, зокрема, існує гранична ділянка контакту у формі круга з радіусом [4]:

$$a_{kr} = 2/g, \qquad g = W_t/W_p, \tag{25}$$

що досягається в разі необмеженого збільшення притискної сили.

Працю виконано в рамках проекту № 7 T07C 006 12, що фінансується Комітетом Наукових Досліджень Польщі.

1. *Barber J. R.* Thermoelastic contact of a rotating sphere and a half-space // Wear. – 1975. – **35**, No. 2. – P. 283–289.
2. *Barber J. R.* Some thermoelastic contact problems involving frictional heating // Q. J. Mech. Appl. – 1976. – **29**. – P. 1–13.
3. *Yevtushenko A. A., Kulchytsky-Zhyhailo R. D.* Two axi-symmetrical contact problems with the steady-state frictional heating // J. Theoret. Appl. Mech. – 1996. – **34**. – P. 767–779.
4. *Yevtushenko A. A., Kulchytsky-Zhyhailo R. D.* Approximate solution of the thermoelastic contact problem with frictional heating in the general case of the profile shape // J. Mech. Phys. Solids. – 1996. – **44**, No. 2. – P. 243–250.

Roman Kulchytsky-Zhyhailo

CONTACT PROBLEMS WITH HEAT GENERATION FOR NONHOMOGENEOUS BODIES

The purpose of the paper is to present some potential function method for solving three-dimensional thermoelastic contact problems for the bodies of nonhomogeneous materials with heat generation. The problem is reduced to three equations of Laplace's type.

Стаття надійшла до редколегії 14.09.99