ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 161–163 Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 161–163

УДК 539.3

Григорій Кіт, Богдан Монастирський

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Львівський національний університет ім. І. Франка*

ПРО ТЕРМОПРУЖНИЙ КОНТАКТ ДВОХ ПІВПРОСТОРІВ З ОДНАКОВИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА НАЯВНОСТІ ПОВЕРХНЕВОГО ДЕФЕКТУ

Розв'язуючи термопружні контактні задачі для тіл з поверхневими дефектами порівняно з задачами про суто механічну взаємодію, треба зважати на те, що породжені поверхневими недосконалостями міжконтактні зазори, крім збурення механічних полів, спричиняють ще й збурення температури, яке зумовлює появу додаткових термічних напружень і переміщень. З огляду на це задача термопружності є складнішою, ніж задача пружності.

Однак можливі такі часткові випадки, коли розв'язок контактної термопружної задачі еквівалентний розв'язку пружної задачі в тому сенсі, що контактні параметри взаємодії тіл однакові. У цій праці розглянемо такий приклад.

Розглянемо два пружних півпростори з однаковими термопружними характеристиками. Нехай один із них має осесиметричну пологу заглибину малої висоти, форма якої описується функцією $f(r)$. Нехай тіла контактують під дією рівномірно розподіленого тиску p, прикладеного до них на нескінченності. Крім того, на нескінченності заданий тепловий потік q, перпендикулярний до площини контакту.

Використовуватимемо циліндричну систему координат. Введемо її так, щоб вісь Or лежала в площині контакту, а вісь Oz збігалася з віссю симетрії початкової заглибини.

Внаслідок наявності поверхневої заглибини між тілами на круговій ділянці деякого радіуса a буде міжконтактний зазор. Вважаємо, що береги зазору вільні від напружень і термоізольовані, а поза зазором виконуються умови ідеального теплового і безфрикційного механічного контакту.

Розв'язок задачі подамо у вигляді суми двох доданків: перший відповідає основному термонапруженому стану, що виникає в тілах з плоскими поверхнями при заданих умовах на нескінченності, другий відповідає збуренням, що зумовлені рельєфом поверхні та наявністю зазору.

Оминаючи тривіальні викладки для знаходження першого доданку, відразу випишемо граничні умови для збурень:

$$-k\frac{\partial T^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad 0 < r < a,$$

$$-k\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = -k\frac{\partial T^{(2)}}{\partial z}, \qquad T^{(1)} = T^{(2)}, \qquad a < r < \infty, \tag{1,a}$$

$$\sigma_{zr}^{(i)} = 0, \qquad 0 < r < \infty,$$

$$\sigma_{zz}^{(i)} = 0, \qquad 0 < r < a,$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \quad u_z^{(1)} + f(r) = u_z^{(2)}, \qquad a < r < \infty. \tag{1,б}$$

Розглянемо спочатку задачу теплопровідності. Зауважимо, що постановка цієї задачі є такою самою, як і у випадку безмежного тіла з круговою тріщиною. З огляду на це, використовуючи результат праці [3], можна легко одержати розв'язок нашої задачі. Ми не виписуватимемо його, а лише зауважимо одну його властивість:

$$T^{(1)}(r,0) = -T^{(2)}(r,0), \qquad 0 < r < a. \tag{2}$$

Розв'язуючи задачу термопружності, використаємо [1] подання напружень і переміщень у півпросторі, поверхня якого вільна від зсувних зусиль. На поверхні контакту нормальні напруження і переміщення мають вигляд

$$u_z^{(i)}(r,0) = \frac{1-\nu}{\mu}\int_0^\infty A^{(i)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

$$\sigma_{zz}^{(i)}(r,0) = (-1)^{i+1}\int_0^\infty \lambda\, A^{(i)}(\lambda)\, J_0(\lambda\, r)\, d\lambda - \frac{\mu(1+\nu)\alpha}{1-\nu}\, T^{(i)}(r,0), \tag{3}$$

де μ, ν, α – відповідно модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона, коефіцієнт лінійного теплового розширення; $J_0(r)$ – функція Бесселя першого роду.

Введемо до розгляду нові функції за формулами

$$h(r) = u_z^{(2)}(r,0) - f(r) - u_z^{(1)}(r,0),$$

$$[T](r) = T^{(2)}(r,0) - T^{(1)}(r,0). \tag{4}$$

Функція $h(r)$ описує висоту зазору, $[T](r)$ – стрибок температури на зазорі.

Виразимо нормальні напруження на поверхні контакту в термінах функцій $h(r)$ і $[T](r)$. Для цього нам треба вилучити функції $A^{(1)}$, $A^{(2)}$. Це неважко зробити, якщо врахувати означення функцій $h(r)$ і $[T](r)$, умову $\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(1)}$, $0 < r < \infty$ (вона випливає з граничних умов (1)) і подання (3).

Після нескладних обчислень одержимо

$$\sigma_{zz}^{(1)}(r,0) = \frac{\mu}{1-\nu}\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty \lambda^2 \int_0^\infty h(\rho)\rho J_0(\lambda\rho)d\rho J_0(\lambda r)d\lambda + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^\infty \lambda^2 \int_0^\infty f(\rho)\,\rho\, J_0(\lambda\rho)\, d\rho\, J_0(\lambda r)\, d\lambda + (1+\nu)\,\alpha\left(\frac{[T](r)}{2} + T^{(1)}(r,0)\right)\right) \tag{5}$$

Підставивши вираз (5) у граничні умови (1), матимемо рівняння для визначення висоти зазору $h(r)$:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \lambda^2 \int_0^\infty h(\rho)\,\rho\, J_0(\lambda\rho)\,d\rho\, J_0(\lambda r)\,d\lambda + (1+\nu)\,\alpha\left(\frac{[T](r)}{2} + T^{(1)}(r,0)\right) =$$

$$= \frac{(1-\nu)p}{\mu} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \lambda^2 \int_0^\infty f(\rho)\,\rho\, J_0(\lambda\rho)\,d\rho\, J_0(\lambda r)\,d\lambda. \qquad (6)$$

Тепер візьмемо до уваги умову (2) та означення функції $[T](r)$. Легко бачити, що температурні члени в співвідношеннях (5), (6) стають нульовими. Це означає, що контактні напруження $\sigma_{zz}(r)$ і висота зазору $h(r)$ не залежать від температурного поля, а визначаються лише прикладеними зусиллями на нескінченності та рельєфом поверхні.

Отже, контактні параметри взаємодії тіл інваріантні стосовно теплового потоку, і їх можна визначити, розв'язавши відповідну контактну задачу теорії пружності ($q = 0$). Методика її розв'язання описана в [2], тому не обговорюватимемо її; нашою метою було лише показати, що у розглядуваному випадку задача термопружності еквівалентна задачі пружності в сенсі рівності контактних параметрів.

---

1. *Бородачев Н. М.* О решении задачи теории термоупругости в случае осевой симметрии // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 5. – С. 86.
2. *Кіт Г. С., Монастирський Б. Є.* Контактна задача для півпростору та жорсткої основи з осесиметричною виїмкою // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 7–11.
3. *Кит Г. С., Побережный О. В.* О напряженном состоянии нагреваемого материала, имеющего внутренние дефекты типа трещин // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1969. – **5**, № 3. – С. 345–350.
4. *Kit H. S., Monastyrskyy B. Ye.* Thermoelastic interaction of two bodies under conditions of local contact absence // Proceedings of the 3rd International Congress on thermal stresses «Thermal Stresses'99», Cracow (Poland). – 1999. – P. 123–126.

Hrygoriy Kit, Bohdan Monastyrskyy

ON THERMOELASTIC INTERACTION OF TWO HALF-SPACES OF THE SAME MATERIALS WITH ALLOWANCE FOR AXISYMMETRIC SURFACE DEFECT

The paper considers the special case of thermoelastic interaction of two semi-infinite bodies, one of which possesses axisymmetric sloping recess. The bodies are subjected to uniform pressure and heat flux at infinity. It is established, that in the case considered the contact parameters – gap height, contact stresses – are indifferent to the temperature distribution and can be found from corresponding elastic problem.

Стаття надійшла до редколегії 17.09.99