

Юрій Пир'єв, Роман Мокрик

Львівський національний університет імені І. Франка
Львівський науково-практичний центр (АПН України)

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ТЕРМОПРУЖНОГО КОНТАКТУ ДВОХ ТІЛ

У цій праці прийнята максимально спрощена геометрія контактуючих тіл, щоб уможливити якнайповніше врахування фізики явищ, які відбуваються в контактуючих тілах.

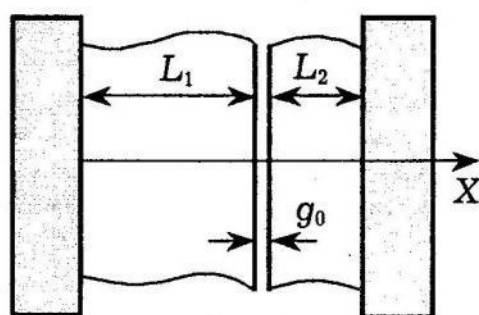


Рис. 1.

Розглядаємо одновимірну модель термопружного контакту двох плоско-паралельних шарів (рис. 1). Два шари ($n = 1, 2$) завтовшки L_n з модулями Юнга E_n , коефіцієнтами Пуассона ν_n , термічного розширення α_n , теплопровідності K_n і температуропровідності k_n розміщені між двома ідеально провідними стінками, температура яких змінюється за законом

$$T_n^w = T_n^o \varphi_n(t) \quad (\varphi_n(t) = 0, t < 0; \varphi_n(\infty) = 1).$$

Перший шар ($n = 1$) закріплений на лівій поверхні, другий ($n = 2$) – на правій. На початку ($t < 0$) має наявний проріз g_0 ($g_0 > 0$) або натяг ($g_0 < 0$).

Вважаємо, що $|g_0/L_n| \ll 1$.

Між контактуючими поверхнями шарів виникає термічний опір R , який можна описати функцією $R_s(g)$ прорізу g чи функцією $R_c(P)$ контактного тиску P [1, 2]. Вважаємо також, що ці функції є монотонно спадними в разі зменшення прорізу та збільшення контактного тиску $R_s(0) = R_c(0)$. Функції термічного опору детально розглянуті у праці [2].

Запропонована конструкція, яка перебуває при $t \in (0, \infty)$ у термічному контакті, може бути при $t \in t_s$ в умовах наявності прорізу $g(t) > 0$ або при $t \in t_c$ в умовах пружного контакту $P(t) > 0$, $t_s \cup t_c = (0, \infty)$. Потрібно визначити температури $T_n(X, t)$ шарів, переміщення $U_n(X, t)$, нормальні напруження $\sigma_{xx}(X, t)$ вздовж осі X і величину прорізу $g(t)$. Задача зводиться до розв'язку крайової задачі теплопровідності:

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} T_n(X, t) = \frac{1}{k_n} \frac{\partial}{\partial t} T_n(X, t); \quad (1)$$

$$K_1 \frac{\partial T_1(L_1, t)}{\partial X} = K_2 \frac{\partial T_1(L_1, t)}{\partial X}, \quad K_1 \frac{\partial T_1(L_1, t)}{\partial X} = \frac{T_2(L_1, t) - T_1(L_1, t)}{R(q)}; \quad (2)$$

$$T_1(0, t) = T_1^w(t), \quad T_2(L_1 + L_2, t) = T_2^w(t), \quad T_n(X, 0) = 0, \quad n = 1, 2; \quad (3)$$

$$R(q) = R_s(q) H(q) + R_c(-P_0 q) H(-q), \quad (4)$$

де $H(\tau) = 0, \tau < 0; H(\tau) = 1, \tau > 0$, $q(t)$ визначається

$$q(t) = g_0 - \tilde{\alpha}_1 \int_0^{L_1} T_1(\xi, t) d\xi - \tilde{\alpha}_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} T_2(\xi, t) d\xi. \quad (5)$$

При $t \in t_s$ правильне $q(t) > 0$, $q(t) = g(t)$, а при $t \in t_c$, виконується $q(t) < 0$, $q(t) = -P(t)P_0^{-1}$,

$$\text{де } P_0 = \left(\frac{L_1}{\tilde{E}_1} + \frac{L_2}{\tilde{E}_2} \right)^{-1}, \quad \tilde{\alpha}_n = \alpha_n \frac{1 + \nu_n}{1 - \nu_n}, \quad \tilde{E}_n = \frac{E_n(1 - \nu_n)}{(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)}.$$

Досліджено стійкість стаціонарних розв'язків крайової задачі. Для цього нестационарний розв'язок подано у вигляді

$$T_n(X, t) = T_n(X) + T_n^*(X, t), \quad q(t) = \hat{q} + \hat{q}^*(t); \quad (6)$$

$$T_n(X) = \frac{T_n^0 [R(\hat{q}) \pm R_n (L_1 - X) / L_n + R_{3-n}] \mp T_{3-n}^0 R_n (\delta_{n2} (L_1 + L_2) - X) / L_n}{R(\hat{q}) + S}.$$

Тут $\hat{q}$ є розв'язком нелінійного рівняння

$$\hat{q} = Q_\infty + \beta f(\hat{q}), \quad (7)$$

де

$$Q_\infty = g_0 - (\tilde{\alpha}_1 L_1 T_1^0 - \tilde{\alpha}_2 L_2 T_2^0), \quad \beta = \frac{1}{2} \alpha L (T_1^0 - T_2^0),$$

$$\alpha L = \tilde{\alpha}_1 L_1 R_1^s - \tilde{\alpha}_2 L_2 R_2^s, \quad f(\hat{q}) = \frac{1}{R(\hat{q})/S + 1},$$

$$R_n^s = \frac{R_n}{S}, \quad R_n = \frac{L_n}{K_n}, \quad S = R_1 + R_2.$$

Аналіз рівняння (7) виявив, що воно може мати єдиний або неєдиний розв'язок.

Підставляючи вирази (6) в рівняння (1)–(5) і лінеаризуючи граничну умову, одержуємо задачу з лінійними граничними умовами на збурені поля.

За допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часом t знайдений розв'язок задачі на збурені поля. Поведінка цього розв'язку визначається коренями характеристичного рівняння:

$$\Delta(s) = 2\xi \left(\frac{\tilde{\alpha}_1 L_1 R_1^s}{\alpha L} \frac{\operatorname{ch} q_1 L_1 - 1}{(q_1 L_1)^2} \operatorname{ch} q_2 L_2 - \frac{\tilde{\alpha}_2 L_2 R_2^s}{\alpha L} \frac{\operatorname{ch} q_2 L_2 - 1}{(q_2 L_2)^2} \operatorname{ch} q_1 L_1 \right) - \\ - (1 - f) \operatorname{ch} q_1 L_1 \operatorname{ch} q_2 L_2 - f \left(R_1^s \frac{\operatorname{sh} q_1 L_1}{q_1 L_1} \operatorname{ch} q_2 L_2 + R_2^s \frac{\operatorname{sh} q_2 L_2}{q_2 L_2} \operatorname{ch} q_1 L_1 \right) = 0, \quad (8)$$

де $q_n = \sqrt{s/k_n}$, $\xi = \frac{1}{2} \alpha L (T_1^0 - T_2^0) f'(\hat{q})$.

Аналіз коренів характеристичного рівняння (8) засвідчує, що зазвичай $\operatorname{Re}(s_m) < 0$, для $m = 3, 4, \dots$. При $m = 1, 2$ корені залежно від параметрів за-

дачі розміщені у лівій або правій половині комплексної площини s . Характеристичну функцію $\Delta(s)$ можна подати у вигляді

$$\Delta(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j d_j, \quad (9)$$

де $d_0 = 1 - \xi$; коефіцієнти d_j , $j = 1, 2, \dots$ через їхню громіздкість не наводяться.

Подання (9) дає змогу записати корені s_1, s_2 в околі початку координат в аналітичному вигляді, а це дає змогу аналітично знайти наближені області стійкості задачі.

Числовий аналіз задачі проведений для випадку сталого ($\alpha_1 = 14 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $K_1 = 21 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$, $k_1 = 5.9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu_1 = 0.3$, $E_1 = 19 \cdot 10^{10} \text{ Па}$) та мідного ($\alpha_2 = 22 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $K_2 = 173 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$, $k_2 = 0.672 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu_2 = 0.32$, $E_2 = 7.2 \cdot 10^{10} \text{ Па}$) шарів. Для конкретності розглянемо поведінку коренів для різних співвідношень товщин шарів $L = L_2/L_1$. Показано, що $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \infty$,

$$\text{де } r_1 = \sqrt{\frac{k}{\gamma}}, \quad r_2 = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt[4]{\gamma}}, \quad r_3 = \sqrt{k}, \quad \gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad k = \frac{k_2}{k_1}, \quad \gamma_n = \frac{\tilde{\alpha}_n k_n}{K_n}.$$

Для нашого випадку $r_1 = 2.29$, $r_2 = 2.78$, $r_3 = 3.37$. Залежно від того, якому з цих проміжків належить параметр L , маємо різні випадки.

При $L \in (0, r_1)$ (наприклад, $L = 2$) результати досліджень зображені на рис. 2. На рис. 2,а зображені області зміни параметрів f, ξ за яких розв'язки є стійкими.

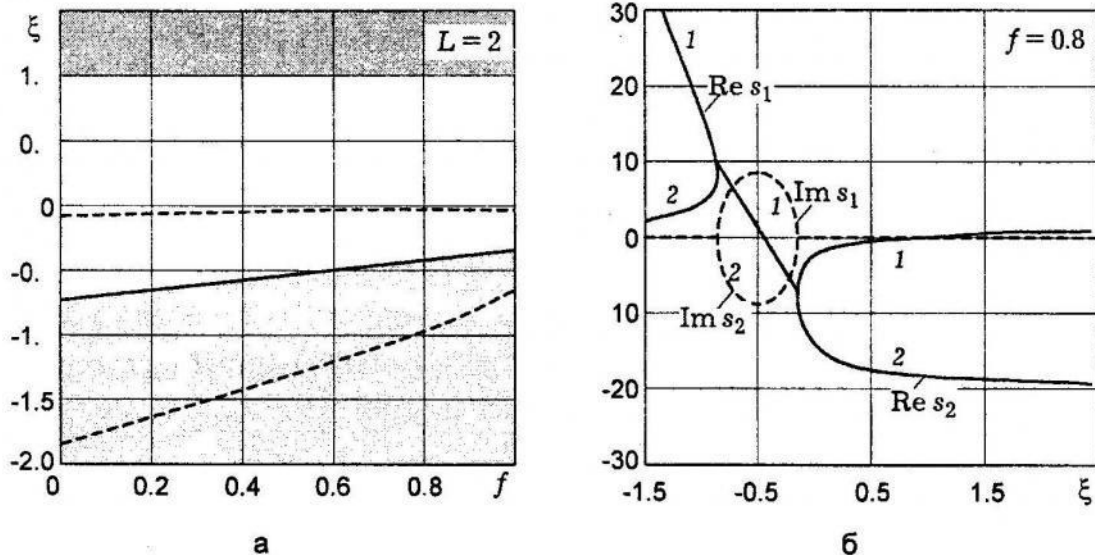


Рис. 2.

Область  на рис. 2,а відповідає єдиному нестійкому розв'язку. Область  на рис. 2,а відповідає випадку неєдиного і нестійкого роз-

в'язку. Не заштрихована область  на рис. 3,а відповідає єдиному і стійкому розв'язку. Область значень параметрів між двома штриховими кривими відповідає коливному характеру поведінки нестационарного розв'язку в околі стаціонарного розв'язку. На рис. 2,б відображена поведінка дійсної (суцільні криві) та уявної (штрихові криві) частин коренів характеристичного рівняння s_1 (криві 1), s_2 (криві 2) залежно від параметра ξ для випадку $f = 0.8$.

При $L \in (r_1, r_2)$ (наприклад $L = 2.5$) результати досліджень зображені на рис. 3:

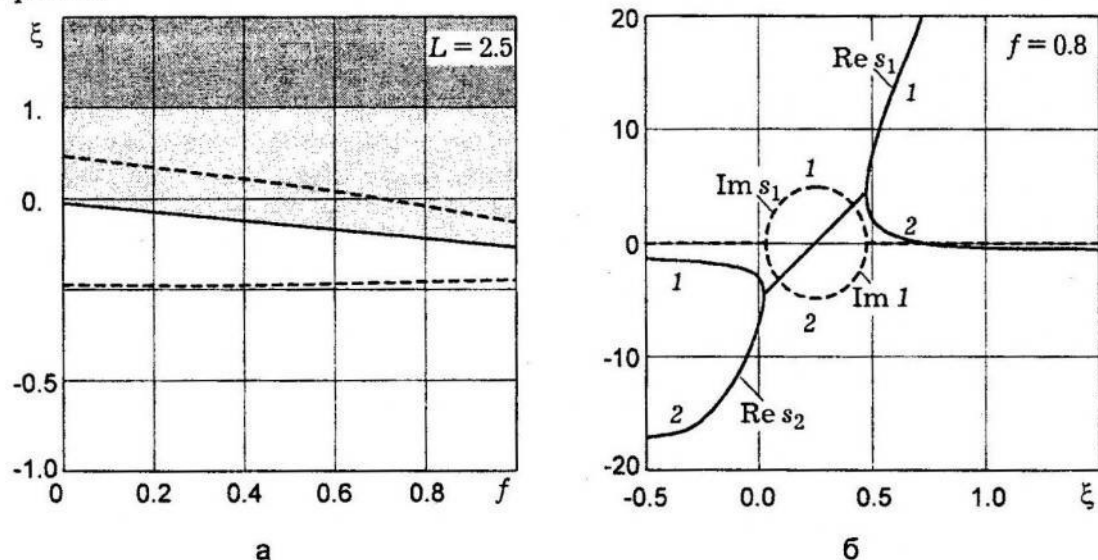


Рис. 3.

При $L \in (r_2, r_3)$ (наприклад $L = 2.9$) результати досліджень зображені на рис. 4:

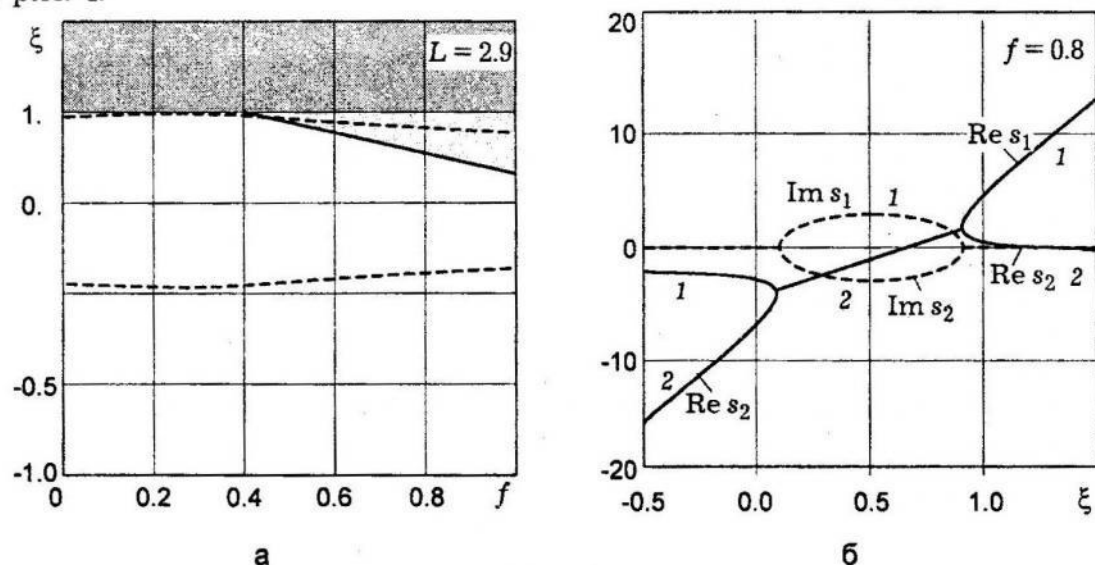


Рис. 4.

При $L \in (\eta_2, \infty)$ (наприклад $L = 4$) результати досліджень зображені на рис. 5.

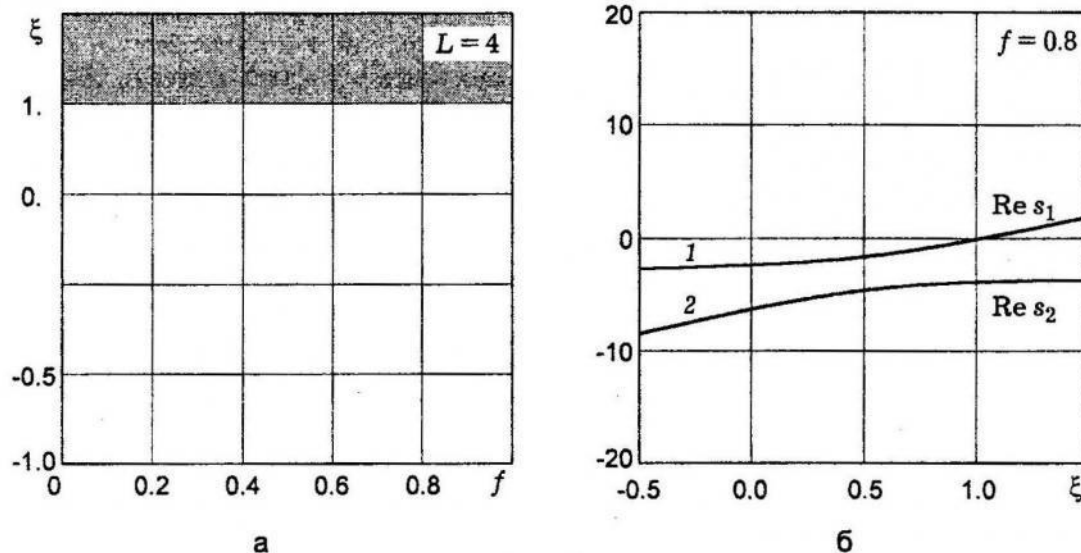


Рис. 5.

Отже, для розглядуваної моделі виявлені області стійкості стаціонарного розв'язку. У працях [1, 2] виконано числовий аналіз нестационарного розв'язку розглядуваної задачі. Показана поведінка нестационарного розв'язку в разі виходу на стаціонарний розв'язок у випадку не єдиного розв'язку, єдиного і стійкого розв'язку, єдиного і нестійкого розв'язку.

1. Olesiak Z. and Pyryev Y. Transient response in a One-dimensional Model of Thermoelastic Contact // Trans. of ASME. J. Appl. Mech. – 1996. – 63. – P. 575–581.
2. Olesiak Z. and Pyryev Y. On nonuniqueness and stability in Barbre's model of thermoelastic contact / Transient response in a One-dimensional Model of Thermoelastic Contact // Trans. of ASME. J. Appl. Mech. – 1996. – 63. – P. 582–586.

Yuriy Pyryev, Roman Mokryk

INVESTIGATION OF STABILITY OF THERMOELASTIC CONTACT FOR TWO BODIES

At the present work one-dimensional model of thermoelastic contact of two bodies is investigated. Between the contacting bodies there is assumed the thermal contact resistance, which depends of contact pressure or gap. The linearisation technique in the vicinity of the steady-state solution was applied to the considered non-linear problem. The behavior of characteristic equation roots of linearized problem is investigated. It is shown that steady-state solution can be stable or non-stable. The partial cases of unique and stable, unique and nonstable, non-unique solution are considered.

Стаття надійшла до редколегії 21.07.99