ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 169–173 Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 169–173

УДК 539.3

Ростислав Мартиняк, Андрій Криштафович, Ігор Мачишин

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

ОДНОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ТІЛ З УЗГОДЖЕНИМИ ПОВЕРХНЯМИ ЗА ДІЇ ДЖЕРЕЛ І СТОКІВ ТЕПЛА

Вступ. Під час взаємодії тіл з узгодженими поверхнями, які в недеформованому стані збігаються або дуже мало різняться між собою, область контакту сумірна з розмірами тіл або їхніх границь. Теорія Герца не може бути застосована до цього класу задач, оскільки описує локальний контакт тіл, який, зокрема, відбувається в разі неузгодженості їхньої форми. Натомість при взаємодії тіл з узгодженою формою можлива локальна відсутність прямого контакту в околі ділянок з малими збуреннями границь і зон прикладення навантаження. Вивчення такого типу контакту тіл передбачає розвиток теоретичних методів, які дають змогу врахувати наявність міжконтактних зазорів та їхню трансформацію у процесі навантаження.

Ефективним для плоских задач про локальну відсутність прямого механічного контакту півплощин з узгодженими границями виявився метод функцій міжконтактних зазорів [5]. Він використаний для дослідження взаємодії тіл з поверхневими заглибинами [1, 7] та вивчення порушень контакту, зумовлених підповерхневими зосередженими силами [2, 6]. У цій праці метод функцій міжконтактних зазорів розвивається стосовно задач одностороннього контакту тіл з врахуванням локальних розшарувань внаслідок дії зосереджених джерел і стоків тепла.

Повний контакт тіл. Дослідимо спочатку повний контакт тіл і визначимо умови, за яких зосереджені теплові чинники зумовлюють його порушення. Розглянемо взаємодію двох пружних ізотропних півпросторів, матеріали яких однакові. Вважаємо, що тіла перебувають в умовах плоскої деформації, тому розглянемо контакт двох півплощин D_1 і D_2, які є перерізами тіл площиною, паралельною площині деформації. Тіла контактують під дією рівномірно розподілених на нескінченності зусиль p вздовж усієї границі L, з якою сумістимо вісь абсцис Ox декартової системи координат xOy. Вважаємо, що у кожній півплощині D_k у довільному числі S_k внутрішніх точок (x_{ks}, y_{ks}), $s = \overline{1, S_k}$, діють стаціонарні джерела і стоки тепла інтенсивністю q_{ks} ($q_{ks} > 0$ – джерело, $q_{ks} < 0$ – стік), сумарна інтенсивність яких дорівнює нулю $\left(\sum_{k=1}^{2} \sum_{s=1}^{S_k} q_{ks} = 0 \right)$. Дослідимо термонапружений стан тіл за умови, що на лінії розмежування півплощин реалізується безфрикційний механічний і досконалий тепловий контакт.

Граничні умови такої задачі теплопровідності й термопружності мають вигляд:

на лінії контакту L $(y=0,\ -\infty<x<+\infty)$

$$T_0^- = T_0^+,\ q_{y0}^- = q_{y0}^+, \tag{1}$$

$$\sigma_y^- = \sigma_y^+ \le 0, \tag{2}$$

на нескінченності $\left(\sqrt{x^2+y^2}=\infty\right)$

$$T_0 = 0,\ \sigma_{y0} = -p,\ \sigma_{x0} = \tau_{xy0} = 0, \tag{3}$$

де T – температура; q_y, v – компоненти відповідно вектора теплового потоку і вектора переміщення в напрямі осі Oy; $q_y = -\lambda\,\partial T/\partial y$; σ_x – компоненти тензора напружень; індекс «0» біля функції означає, що вона відповідає повному контактові тіл, індекси «–» і «+» позначають граничні значення функції на лінії L відповідно у півплощинах D_1 і D_2.

Перша умова в (2) є необхідною і достатньою умовою взаємодії півплощин уздовж всієї межі L за одностороннього контакту. Невиконання цієї умови на деякій ділянці означає, що контакт тіл в околі цієї ділянки порушений.

Поля температури, напружень і переміщень, що задовольняють умови (1)–(3), подамо у півплощинах D_k через комплексні потенціали $F_0(z)$, $\Phi_{0k}(z)$ $(k=1,2)$ [3, 4] у вигляді

$$\sigma_{y0} - i\tau_{xy0} = \Phi_{0k}(z) - \Phi_{0k}(\bar z) + (z-\bar z)\,\overline{\Phi'_{0k}(z)} -$$

$$-\delta\sum_{s=1}^{S_k} m_{ks}\left\{2\ln\left(\frac{z-z_{ks}}{z-\bar z_{ks}}\left(\frac{\bar z - z_{ks}}{\bar z-\bar z_{ks}} - \frac{\bar z-\bar z_{ks}}{\bar z - z_{ks}} + (z-\bar z)\left[\frac{1}{\bar z-\bar z_{ks}} - \frac{1}{\bar z - z_{ks}}\right]\right\} - p,\right.\right.$$

$$2G\left(u_0' + iv_0'\right) = \kappa\Phi_{0k}(z) + \Phi_{0k}(\bar z) - (z-\bar z)\,\overline{\Phi'_{0k}(z)} +$$

$$+\delta\sum_{s=1}^{S_k} m_{ks}\left\{\ln\frac{\bar z-\bar z_{ks}}{\bar z - z_{ks}} - \kappa\ln\frac{z-z_{ks}}{z-\bar z_{ks}} + \frac{\bar z - z_{ks}}{\bar z-\bar z_{ks}} - \frac{\bar z-\bar z_{ks}}{\bar z - z_{ks}} + \right.$$

$$\left. +(z-\bar z)\left[\frac{1}{\bar z-\bar z_{ks}} - \frac{1}{\bar z - z_{ks}}\right]\right\} + \beta F_0(z) + \frac{3-\kappa}{4}p,$$

$$\Phi_k(z) = -\frac{\delta}{2}\left\{\sum_{s=1}^{S_k} m_{ks}\left[2\ln(z-\bar z_{ks}) - \frac{z-z_{ks}}{z-\bar z_{ks}}\right] + \sum_{s=1}^{S_l} m_{ls}\left[2\ln(z-z_{ls}) - \frac{z-\bar z_{ls}}{z-z_{ls}}\right]\right\},$$

$$\Phi_l(z) = \frac{\delta}{2}\left\{\sum_{s=1}^{S_k} m_{ks}\left[2\ln(z-\bar z_{ks}) + \frac{z-z_{ks}}{z-\bar z_{ks}}\right] + \sum_{s=1}^{S_l} m_{ls}\left[2\ln(z-z_{ls}) + 3\frac{z-\bar z_{ls}}{z-z_{ls}}\right]\right\}, \tag{4}$$

де $z\in D_k$; $k=1,2$; $l=3-k$; $\delta = \dfrac{\beta}{1+\kappa}$, $m_{ks} = -\dfrac{q_{ks}}{2\pi\lambda}$, $z = x+iy$ – комплексна змінна; $z_{ks} = x_{ks} + iy_{ks}$; ν, λ, α – відповідно коефіцієнти Пуассона, теплопровідності та лінійного теплового розширення; G – модуль зсуву.

Аналіз контактного тиску $P(x) = \sigma_y^{\pm}(x,0)$ між тілами, визначеного з використанням формул (4), засвідчує, що за певних значень інтенсивності теплових чинників і їх розташування цей тиск стає від'ємним, тобто перша з умов (2) порушується. Проілюструємо це на прикладі дії джерела і стоку інтенсивністю q_0, розташованих на осі Oy: джерело – в точці $z_1 = iy_1$ нижньої півплощини $(y_1 < 0)$, стік – у точці $z_2 = iy_2$ верхньої півплощини $(y_2 > 0)$. У цьому разі контактний тиск має вигляд

$$P(x) = p + \delta m\left[2\ln\left(\frac{x - iy_1}{x - iy_2}\right(+ \mathrm{Re}\left(\frac{x - iy_1}{x + iy_1} - \frac{x + iy_2}{x - iy_2}\right)\right],\ m = -\frac{q_0}{2\pi\lambda}. \qquad (5)$$

Бачимо, що від'ємний тиск з'являється в околі початку координат, якщо стік розміщений ближче до границі, ніж джерело, за виконання умови

$$2\delta m\ln\left(y_2 / y_1\right(< -p. \qquad (6)$$

Якщо стік перебуває на більшій відстані, ніж джерело, то від'ємний тиск може з'явитися на певній відстані від початку координат.

Отже, термічне навантаження зосередженими тепловими чинниками зістикованих тіл за одностороннього контакту може зумовлювати появу розшарувань. Вивчення такого порушення контакту потребує врахування у постановці задачі утворення міжконтактних зазорів.

Розшарування півплощин. Нехай джерела і стоки зумовлюють порушення прямого контакту півплощин уздовж N відрізків $L_n = [a_n, b_n]$ $\left(n = \overline{1, N}\right)$, які творять лінію $L' = \bigcup\limits_n L_n$. Границі тіл уздовж утворених зазорів незавантажені й теплоізольовані. На ділянках контакту $L'' = L \setminus L'$ реалізуються умови безфрикційного механічного і досконалого теплового контакту.

Гранично-контактні умови в цьому разі мають вигляд:

уздовж зазорів (на L')

$$q_y^- = q_y^+ = 0, \qquad \sigma_y^- = \sigma_y^+ = 0, \qquad (7)$$

уздовж ділянок контакту (на L'')

$$T^- = T^+. \qquad (8)$$

Подаючи [2, 5] розв'язок цієї задачі термопружності у комплексному вигляді через функції міжконтактних зазорів – стрибок температури границь тіл уздовж розшарувань $\gamma(x) = T^- - T^+$ і висоту зазорів $h(x)$, отримуємо

$$T = T_0 + \mathrm{Re}\,F(z), \qquad F(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'}\frac{\gamma'(t)}{t - z}\,dt,$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \sigma_{y0} - i\tau_{xy0} + \Phi_k(z) - \Phi_k(\overline{z}) + (z - \overline{z})\,\overline{\Phi_k'(z)},$$

$$2G(u' + iv') = 2G(u_0' + iv_0') + \kappa\,\Phi_k(z) + \Phi_k(\overline{z}) - (z - \overline{z})\,\overline{\Phi_k'(z)} + \beta F(z),$$

$$\Phi_2(z) = -\Phi_1(z) = (-1)^k \frac{K}{\pi} \int\limits_{L'} \frac{h'(t)}{t-z} dt, \quad z \in D_k, \quad K = \frac{1+\kappa}{G}.$$

Функції міжконтактних зазорів визначаються зі системи сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{L'} \frac{\gamma'(t)\,dt}{t-x} = -\frac{1}{2\lambda} q_{y0}(x,0), \quad x \in L', \quad \gamma(a_n) = \gamma(b_n) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{L'} \frac{h'(t)\,dt}{t-x} = \frac{1}{2} KP(x), \quad x \in L', \quad h(a_n) = h(b_n) = 0. \tag{10}$$

Враховуючи те, що границі тіл змикаються плавно на кінцях зазорів, треба шукати обмежений розв'язок рівняння (10). Саме N умов існування такого обмеженого розв'язку [3] і N умов $\int\limits_{L_n} \gamma'(x)\,dx = 0 \quad \left(n = \overline{1, N}\right)$ служать для визначення $2N$ невідомих координат кінців зазорів a_n, b_n.

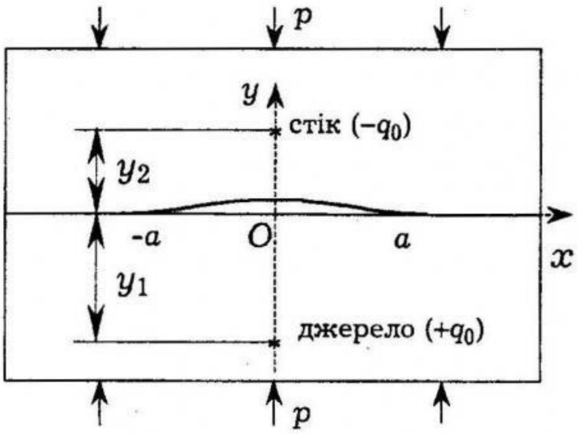

Рис. 1.

Як приклад розглянемо утворення одного розшарування вздовж відрізка $[-a, a]$ (рис. 1) під дією джерела і стоку тепла інтенсивності q_0, прикладених відповідно у точках $z_1 = iy_1$ і $z_2 = iy_2$, яке відбувається за виконання умови (6). Висота і довжина зазору в цьому разі визначаються зі співвідношень

$$h'(x) = -\frac{\alpha(1+\nu)}{\lambda} K\delta m \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}\, y_k}{\sqrt{y_k^{\,2} + a^2}(x^2 + y_k^{\,2})} - \operatorname{arctg} \frac{y_k \sqrt{a^2 - x^2}}{x\sqrt{y_k^{\,2} + a^2}} \right],$$

$$p + 2\delta m \sum_{k=1}^{2} \left[y_k \Big/ \sqrt{y_k^{\,2} + a^2} - \ln \left| \left(y_k + \sqrt{y_k^{\,2} + a^2} \right) \Big/ a \right| \right] = 0. \tag{11}$$

Залежність довжини зазору від відстані стоку до межі для різних значень параметра термомеханічного навантаження $p_q = \dfrac{p}{q_0}(\alpha / E\lambda)$, який характеризує співвідношення між зовнішнім тиском і потужністю стоку (E - модуль Юнга), проілюстрована на рис. 2. Зростання параметра p_q, що при фіксованому зовнішньому тиску відповідає зменшенню потужності теплових чинників, зумовлює зменшення довжини розшарування. На рис. 3 зображено форму зазорів для різних відстаней стоку сталої потужності до межі. Наближення стоку до межі зумовлює збільшення довжини зазору та його максимальної висоти, яка досягається посередині зазору.

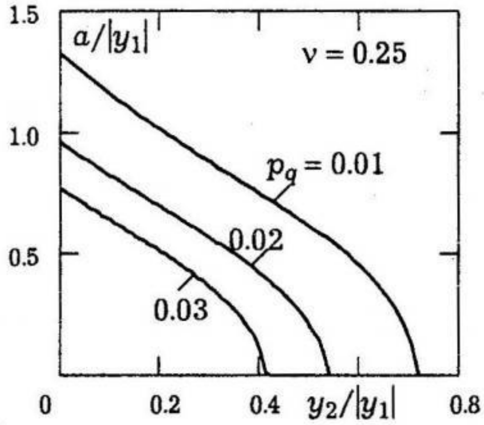

Рис. 2.

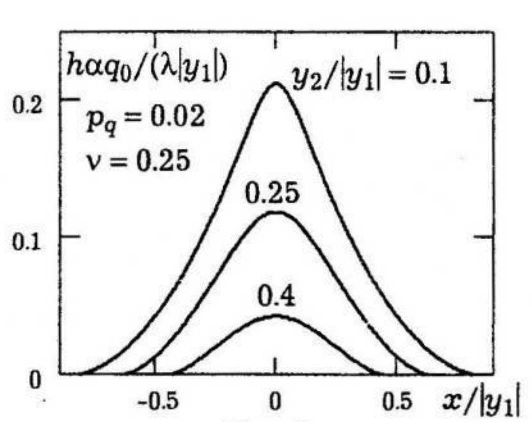

Рис. 3.

1. *Мартиняк Р.М.* Контактна взаємодія двох півпросторів при наявності поверхневої виїмки, частково заповненої нестисливою рідиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1990. – **26**, № 2. – С. 91–94.
2. *Мартыняк Р.М.* Взаимодействие упругих полуплоскостей при неполном механическом контакте // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – № 22. – С. 81–92.
3. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
4. *Прусов И.А.* Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во БГУ, 1979. – 200 с.
5. *Швецъ Р. М., Мартиняк Р. М.* Інтегральні рівняння контактної задачі термо-пружності для шорстких тіл // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 11. – С. 37–40.
6. *Швецъ Р. М., Мартиняк Р. М., Кричтафович А. А.* Неповний механічний контакт двох пружних півплощин із ортотропних матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1990. – **26**, № 3. – С. 65–69.
7. *Shvets R. M., Martynyak R. M. and Kryshtafovych A. A.* Discontinuous contact of an anisotropic half-plane and a rigid base with disturbed surface // Int. J. Engng. Sci. – 1996. – **34**, No. 2. – P. 183–200.

Rostyslav Martynyak, Andrew Kryshtafovych, Igor Machyshyn

UNILATERAL CONTACT OF BODIES WITH CONFORMING SURFACES UNDER AN ACTION OF HEAT SOURCES AND SINKS

Thermoelastic interaction of half-planes possessing conforming boundaries is investigated under the conditions of unilateral contact. It is established that concentrated heat matters can induce direct contact fault of such bodies. To solve the problem on separation of half-planes due to an action of heat sources and sinks, the method of intercontact gap functions is used. Numerical results are exposed for the case of one intercontact gap arisen.

Стаття надійшла до редколегії 02.07.99