ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.–мат. 1999. Вип. 55. С. 174–177 Ser. mech.–math. 1999. No. 55. P. 174–177

УДК 539.3

Олександр Гачкевич, Віра Михайлишин

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ СКЛАДЕНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянемо систему тіл, які мають спільні контактуючі поверхні. Тіла перебувають в умовах теплових і (або) механічних навантажень, які можуть спричиняти пластичні напруження і деформації. Беремо до уваги температурні залежності характеристик матеріалу та анізотропне зміцнення. Для опису складної історії навантаження виходимо з теорії течіння.

Нехай деформівні контактуючі тіла, які займають області Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n ($\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Omega_i = \Omega$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\Omega_i = \varnothing$), обмежені границями Γ_1, Γ_2, ... , Γ_n ($\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{n}\Gamma_i$), віднесені до ортогональної декартової системи координат (x_1, x_2, x_3). На частині $\Gamma_i^u \subset \Gamma_i$ задані переміщення $\{u_i^*\}$, на частині $\Gamma_i^\sigma \subset \Gamma_i$ – зовнішнє силове навантаження $\{R_i\}$ ($\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Gamma_i^u = \Gamma^u$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Gamma_i^\sigma = \Gamma^\sigma$). На частинах поверхонь Γ_{ij}, що є поверхнями контакту ($\Gamma_{ij} \subset \Gamma_i, \Gamma_{ij} \subset \Gamma_j$, $\bigcup\limits_{j=1}^{n}\Gamma_{ij} \neq \varnothing$ для кожного i), задані контактні граничні умови, які визначають тип контактної взаємодії. Тут $\Gamma_i^u \bigcup \Gamma_i^\sigma \bigcup\limits_{j=1}^{n}\Gamma_{ij} = \Gamma_i$, $\Gamma_i^u \bigcap \Gamma_i^\sigma = \varnothing$, $\Gamma_i^u \bigcap \Gamma_{ij} = \varnothing$, $\Gamma_i^\sigma \bigcap \Gamma_{ij} = \varnothing$. Припускається, що деформації малі, а механічна взаємодія не веде до зміни контактуючих зон Γ_{ij}. Силами тертя нехтуємо.

Процес деформування вважаємо квазістатичним, що дає змогу незалежно знайти температурне поле і параметри напружено-деформованого стану при неізотермічних процесах.

Задача про визначення температурного поля передбачає розв'язання нестаціонарного рівняння теплопровідності [2] з відповідними початковою і граничними умовами [2], що пов'язані з характером теплообміну в системі. Тепловий контакт між складовими системи вважається ідеальним.

Формулюючи задачу про визначення параметрів напруженого стану і величини контактної сили за пружно-пластичного деформування, будемо опиратись на теорію пластичного неізотермічного течіння з урахуванням ізотропно-кінематичного зміцнення [7]. Як критерій початку виникнення пластичних деформацій приймемо умову Мізеса, модифіковану на випадок ізотропно-кінематичного зміцнення [7].

Тоді замкнена система рівнянь моделі для визначення переміщень $\{u\}$, деформацій $\{\varepsilon\}$ і напружень $\{\sigma\}$ в області Ω охоплює: рівняння рівноваги (масовими силами нехтуємо) [6], геометричні співвідношення Коші [6], а також рівняння стану [7] розглядуваного варіанту теорії течіння. Ці рівняння разом зі статичними, кінематичними [6] і контактними граничними умовами формулюють квазістатичну термопружно-пластичну задачу. На поверхнях Γ_{ij} розглядаємо три типи контактної взаємодії: зчеплення, зазор без проковзування, зазор з проковзуванням [3].

Отримання точного розв'язку задачі, що складається з рівняння рівноваги, геометричних співвідношень Коші, рівняння стану, статичних, кінематичних та контактних граничних умов, є проблематичним.

Побудуємо наближений розв'язок задачі на основі її варіаційного формулювання з використанням покрокової апроксимації нелінійного процесу деформування [6], ітераційних схем, які лінеаризують вихідну термопружно-пластичну задачу [5], та методу скінченних елементів [4] (розв'язувальні рівняння якого випливають з варіаційного рівняння [1]).

Розв'язок $\{u\}$ задачі задовольняє на множині кінематично допустимих переміщень принцип віртуальної роботи [1], математичний вираз якого для дискретного часового кроку Δt_N $\left(N=0,1,2,\ldots N^*-1\right)$ має вигляд

$$\iiint\limits_{\Omega}\{\delta\Delta\varepsilon\}'_N\{\Delta\sigma\}_N\,d\Omega-\iint\limits_{\Gamma^\sigma}\{\delta\Delta u\}'_N\{\Delta R\}_N\,d\Gamma+\{\varphi\}_{N+1}=0. \tag{1}$$

Залежність (1) виникає як результат апроксимації нескінченно малих приростів величин їхніми скінченними аналогами. Доданок $\{\varphi\}_{N+1}$ – нев'язка варіаційного рівняння, нагромаджена до кінця кроку навантаження. Варіаційне рівняння (1) з використанням співвідношень Коші і виразу $\{\Delta\sigma\}_N$, одержаного на основі рівняння стану, записуємо

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\{\delta\Delta u\}'_N[B]'\left[D^{ep}\right]_{N+1}[B]\{\Delta u\}_N\,d\Omega&=\iint\limits_{\Gamma^\sigma}\{\delta\Delta u\}'_N\{\Delta R\}_N\,d\Gamma+\\&+\iiint\limits_{\Omega}\{\delta\Delta u\}'_N[B]'\left[D^{ep}\right]_{N+1}\left\{\Delta\varepsilon^T\right\}_N d\Omega-\\&-\iiint\limits_{\Omega}\{\delta\Delta u\}'_N[B]'\left[\Delta D^{ep}\right]_N\left(\{\varepsilon\}_N-\left\{\varepsilon^p\right\}_N-\left\{\varepsilon^T\right\}_N\right)d\Omega-\\&-\iiint\limits_{\Omega}\{\delta\Delta u\}'_N[B]'\{Q\}_{N+1}\Delta T_N\,d\Omega,\end{aligned} \tag{2}$$

де $[B]$ – матриця диференціальних операторів [4]; $\left\{\varepsilon^p\right\}_N$, $\left\{\varepsilon^T\right\}_N$ – відповідно вектори пластичної та температурної деформацій; $\left[D^{ep}\right]_{N+1}$ – пружно-пластична матриця стану; тензор $\left[\Delta D^{ep}\right]$ і вектор $\{Q\}_{N+1}$, пов'язані зі зміною пружності та міцності залежно від температури [7]; символ «′» означає операцію транспонування.

Як приклад розглянемо з'єднання сталевих труб за допомогою латунної муфти, яка в нагрітому стані, що характеризується однорідним розподілом температури $T_M = 220°C$, вільно насаджується без натягу на труби і рівномірно охолоджується до температури середовища $T_C = 20°C$. Припускаються, що температура труб не змінюється і дорівнює температурі середовища T_C. Напруження досліджені у віднесеній до циліндричної системи координат двовимірній області, зайнятій чвертю діаметрального перерізу, за граничних умов $u_z^{(1)}\big|_{z=0} = 0$, $u_z^{(2)}\big|_{z=0} = 0$ (відсутність зазору між трубами і симетрія задачі). У зоні контакту Γ_{12} зовнішньої поверхні труби і внутрішньої поверхні муфти припускається, що $u_r^{(1)}\big|_{\Gamma_{12}} = u_r^{(2)}\big|_{\Gamma_{12}}$, $u_z^{(1)}\big|_{\Gamma_{12}} = u_z^{(2)}\big|_{\Gamma_{12}}$. Індекси «(1)» і «(2)» відносяться відповідно до переміщень у трубі та муфті. При заданих обмеженнях на геометричні розміри неконтактуючої кусково-лінійної поверхні муфти знайдений оптимальний профіль, який забезпечує мінімальний перепад контактного тиску p_k.

Числові обчислення виконані для труб із внутрішнім радіусом $R = 17$ мм і товщиною стінки $h_2 = 3$ мм при довжині $d = 35$ мм досліджуваної ділянки труби (рис. 2). Характеристики для сталі прийняті такими: модуль Юнга $E = 196$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.28$, межа плинності $\sigma_T = 422$ МПа, лінійний коефіцієнт термічного розширення $\alpha_T = 11 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$; для латуні: $E = 98$ ГПа, $\nu = 0.25$, $\sigma_T = 255$ МПа, $\alpha_T = 16 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$.

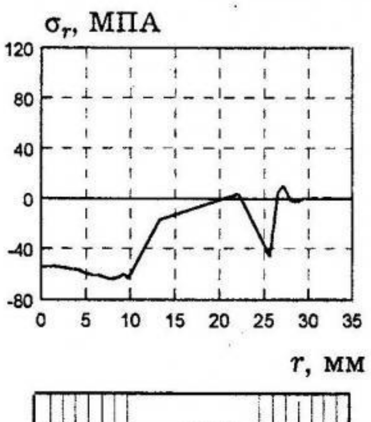

Рис. 1.

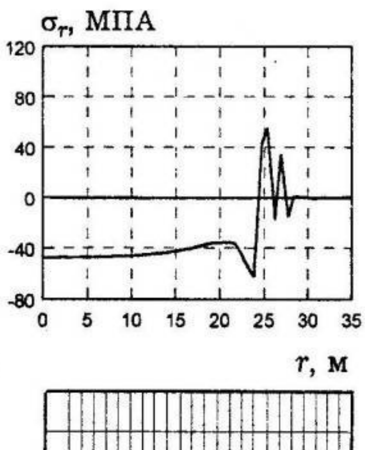

Рис. 2.

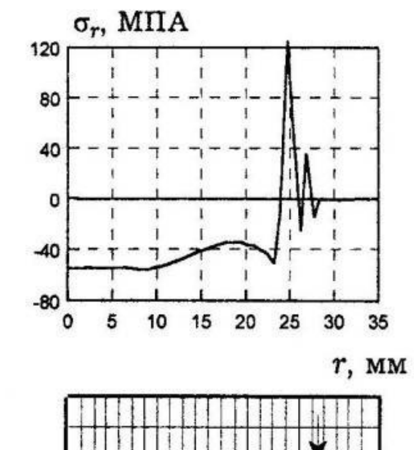

Рис. 3.

Матеріали вважаються ідеально пружно-пластичними.

У разі пошуку оптимальної форми профілю фіксованими є товщина муфти $h_1 = 5$ мм при $z = 0$ і максимальна довжина в напрямі осі Oz – $d_1 = 25$ мм; варійованими – d_2,, d_3, b ($0 \le b \le 2h_1$ – рис. 3). Оптимальний профіль муфтового з'єднання ($d_2 = 10$ мм, $d_3 = 10.9$ мм, $b = 2.5$ мм) зображений на рис. 1. Для цього варіанту максимальний перепад нормальних напружень на поверхні труби, близькій і коаксіальній до контактної, становить 74.26 МПа. Для муфти постійної товщини (рис. 2, $d_3 = 25$ мм, $b = 5$ мм) збурення контактного тиску в 1.58 раза більше порівняно з оптимальною. Максимальне збурення контактного тиску p_k досягається при $d_2 = 10$ мм, $d_3 = 22$ мм, $b = 1.6$ мм (рис. 3) і є в 2.44 раза більше, ніж в оптимальному варіанті (рис. 1).

---

1. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Пер с англ. – М: Мир, 1987. – 542 с.
2. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. – К.: Вища шк., 1975. – 216 с.
3. *Кузьменко В. И.* О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел // Прикл. матем. и механика. – 1979. – **43**, № 5. – С 893 – 901.
4. *Метод* конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. Сахарова А. и Альтенбаха И. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
5. *Михайлишин В. С.* Ітераційні процедури в задачах неізотермічної пружнопластичності з ізотропно-кінематичним зміцненням // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1999. – **35**, № 4. – С. 102–112.
6. *Писаренко Г. С., Можаровский Н. С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справ. пособие. – К.: Наук. думка, 1981. – 496 с.
7. *Allen D. H., Haisler W. E.* A theory for analysis of thermoplastic materials // Comput. & Struct. – 1981. – **13**, No. 1. – P. 129–135.

Alexander Gachkevych, Vira Myhaylyshyn

NUMERICAL INVESTIGATION FOR ELASTIC-PLASTIC BEHAVIOR OF COMPOUND MECHANICAL SYSTEMS

A methodology has been proposed for description of elastic-plastic behavior of deformable bodies under complex thermal force loading. The methodology is based on the finite element method, «steps» one and linearizing method of elastic solutions. As an example, an optimal form as to contact pressure has been found for a coupling furnished as a result of its thermal shrinkage.

Стаття надійшла до редколегії 06.09.99