

Георгій Сулим¹, Михайло Фльорко¹, Василь Чекурін²

¹Львівський національний університет ім. І. Франка

²Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

ЗАЛИШКОВІ НАПРУЖЕННЯ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

З огляду на відпрацювання методів неруйнівного контролю залишкових напружень, що виникають в околі з'єднань різнорідних циліндричних елементів, актуальною є проблема побудови адекватних математичних моделей для опису напружено-деформованого стану таких об'єктів, формулювання та розв'язування відповідних обернених задач. Кількісні дослідження напружень у таких об'єктах потрібні для з'ясування класів функцій, у яких доцільно шукати розв'язки обернених задач, та оцінки множини можливих вхідних даних цих задач.

Математична модель залишкових напружень. Розглянемо ізотропне кусково-однорідне тверде тіло B , яке має форму порожнистого циліндра і складається з різнорідних частин B_1 та B_2 , з'єднаних по площині кільця S нормального перерізу. Тіло перебуває у стані пружної рівноваги за відсутності зовнішніх навантажень. Залишкові напруження формуються внаслідок різниці механічних і теплофізичних властивостей матеріалу складових та його непружного поведіння під час переходу тіла до актуального стану.

Для кожної складової B_λ , $\lambda = 1, 2$ виконуються рівняння рівноваги, які за умов осової симетрії у циліндричній системі координат (r, φ, z) мають вигляд [2]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^\lambda}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^\lambda}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr}^\lambda - \sigma_{\varphi\varphi}^\lambda) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}^\lambda}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^\lambda}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}^\lambda}{r} = 0. \quad (1)$$

Компоненти деформації ε_{ij}^λ задовольняють в об'ємі V_λ складові рівняння сумісності:

$$\frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}}{r} = 0, \quad r \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

і пов'язані з компонентами тензора напружень співвідношеннями закону Гука:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} + \delta_{ij} \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma, \quad \sigma \equiv \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}, \quad i, j \in \{r, \varphi, z\}. \quad (3)$$

На циліндричних $r = R_1$, $r = R_2$ і торцевих $z = -L_1$, $z = L_2$ поверхнях виконуються умови незавантаженості:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^\lambda|_{r=R_1} &= \sigma_{rz}^\lambda|_{r=R_1} = \sigma_{rr}^\lambda|_{r=R_2} = \sigma_{rz}^\lambda|_{r=R_2} = 0, \\ \sigma_{zz}^\lambda|_{z=-L_1} &= \sigma_{rz}^\lambda|_{z=-L_1} = \sigma_{zz}^\lambda|_{z=L_2} = \sigma_{rz}^\lambda|_{z=L_2} = 0.\end{aligned}\quad (4)$$

На поверхні контакту S справджуються умови зрівноваженості складових:

$$\sigma_{zz}^2|_{z=0} - \sigma_{zz}^1|_{z=0} = \sigma_{rz}^2|_{z=0} - \sigma_{rz}^1|_{z=0} = 0, \quad (5)$$

а також умови

$$u_r^2 - u_r^1 = v(r), \quad u_z^2 - u_z^1 = w(r), \quad (6)$$

які визначають стрибки тангенційної та нормальної складових вектора переміщень на поверхні S . Тут $v(r)$ та $w(r)$ – функції, що враховують непружну поведінку матеріалу в околі контакту складових та відмінність їхніх фізичних властивостей.

Співвідношення (1)–(6) формують математичну модель залишкових напружень у кусково-однорідному циліндричному тілі, які зумовлені несумісністю деформації на поверхні поділу різнорідних складових. Треба наголосити, що математична модель (1)–(6) незамкнена, оскільки функції $v(r)$, $w(r)$ невідомі.

Обернена задача неруйнівного контролю залишкових напружень. Зондуючи тіло зовнішніми полями – поляризованим світлом, ультразвуком чи магнітним полем, можна експериментально визначати деякі параметри її напруженого стану. Вимірювані параметри J_k залежать від розподілу напружень σ_{ij}^d у певній області d проникнення зондувального поля у тіло. Отже, J_k можна розглядати як функціонал поля напружень у цій області:

$$J_k = F_k^d(\sigma_{ij}). \quad (7)$$

Скануючи тіло полем, визначаємо параметри J_k у деякій множині $D = \{d\}$ і одержуємо експериментальні залежності

$$J_k = J_k(d), \quad d \in D. \quad (8)$$

Результати вимірювань (8) разом із функціоналом (7), який є моделлю взаємодії випромінювання з полем напружень, використовують для неруйнівного контролю поля напружень. Однак внаслідок того, що не всі зони тіла доступні для зондування зовнішнім полем (наприклад, зона шва) і методи неруйнівного контролю мають обмеження за їхньою роздільною здатністю, чутливістю тощо, експериментальних даних (8) може бути недостатньо для безпосереднього відновлення напружено-деформованого стану уповні. Проте за допомогою результатів вимірювань (8) та моделі взаємодії зондувального поля з полем напружень (7) разом зі співвідношеннями (1)–(6) можна знизити рівень недоозначеності математичної моделі до рівня, достатнього для формулювання умовно коректної оберненої задачі. Враховуючи це, обернену задачу визначення напружено-деформованого стану циліндра можна сформулювати так [4]: знайти поля напружень σ_{ij}^λ та де-

формацій ε_{ij}^λ , які в об'ємі складових V_λ задовольняють рівняння (1)–(3), на вільній поверхні – умови (4), а на границі поділу складових S – умови (5) й узгоджуються у певному сенсі з результатами неруйнівного контролю (8) та моделлю взаємодії зондувального випромінювання з шуканим полем напружень (7). Варіаційний підхід до розв'язання такої задачі розглядається в праці [3], а приклади його застосування – у публікаціях [4, 5].

Функціонали поля напружень. У випадку поляризаційно-оптичного методу неруйнівного контролю [1] областими проникнення d є відрізки прямих від точок входження променів світла в тіло до точок їх виходу. Поляризація світлового променя, що розглядається у наближенні плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі, задається комплексним вектором $\mathbf{E} = [E_1, E_2]^T$, де E_1, E_2 – компоненти вектора напруженості електричного поля в площині фронту хвилі. Зміна поляризації світлового променя під час його проходження через тіло в напрямках, нормальних до осі циліндра, описується системою рівнянь [6]:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} + \frac{2\omega P \sigma_{pz}}{c\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1+t^2/l^2}} \operatorname{ch} \eta \sin \delta &= 0, \\ \frac{d\delta}{dt} - \frac{2\omega P \sigma_{pz}}{c\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1+t^2/l^2}} \operatorname{sh} \eta \cos \delta &= \frac{\omega P}{c\sqrt{\varepsilon}} \left(\sigma_{zz} - \frac{\sigma_{pp} + t^2/l^2 \sigma_{\varphi\varphi}}{1+t^2/l^2} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

де η та δ – дійсна та уявна частини логарифма відношення компонент вектора $\mathbf{E}$; l – відстань від осі циліндра до променя; t – скалярний параметр, що визначає радіус-вектор точки на промені d ; P – стала фотопружності матеріалу; ε – діелектрична проникність матеріалу в недеформованому стані; ω – циклічна частота світлової хвилі; c – швидкість світла.

Якщо $l = 0$, то маємо радіальне просвічування. Система (9) спрощується

$$\frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{\omega P}{c\sqrt{\varepsilon}} (\sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi}). \quad (10)$$

Із другого рівняння (10) одержуємо функціонал вигляду (7), який пов'язує радіальний розподіл напружень у тілі з приростом різниці фаз δ_R , набутої поляризованим світлом під час проходження променя крізь стінку циліндра:

$$\delta_R = \frac{\omega P}{c\sqrt{\varepsilon}} \int_{R_2}^{R_1} (\sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi}) dr. \quad (11)$$

Якщо $l \in [R_2, R_1]$, то реалізується тангенційне просвічування. З другого рівняння (9) випливає, що оптичний параметр $\delta_t \equiv \lim_{l \rightarrow R_1} (\delta/2\sqrt{R_1^2 - l^2})$ пов'язаний із функціоналом поля напружень [6]:

$$\delta_\tau = -\frac{\omega P}{c\sqrt{x}} \sigma_{zz}|_{p=R_1}. \quad (12)$$

Оптичні параметри δ_R та δ_τ можна визначити методами оптичної поляризації [1]. Вимірюючи їхнє значення для двох складових тіла на різних відстанях від поверхні S з'єднання, одержуємо експериментальні залежності:

$$\delta_R = \delta_R^\lambda(z), \quad \delta_\tau = \delta_\tau^\lambda(z), \quad z \in D_\lambda, \quad (13)$$

де $D_1 \subseteq [-L_1, 0]$ та $D_2 \subseteq [0, L_2]$ – множини напрямів просвічування.

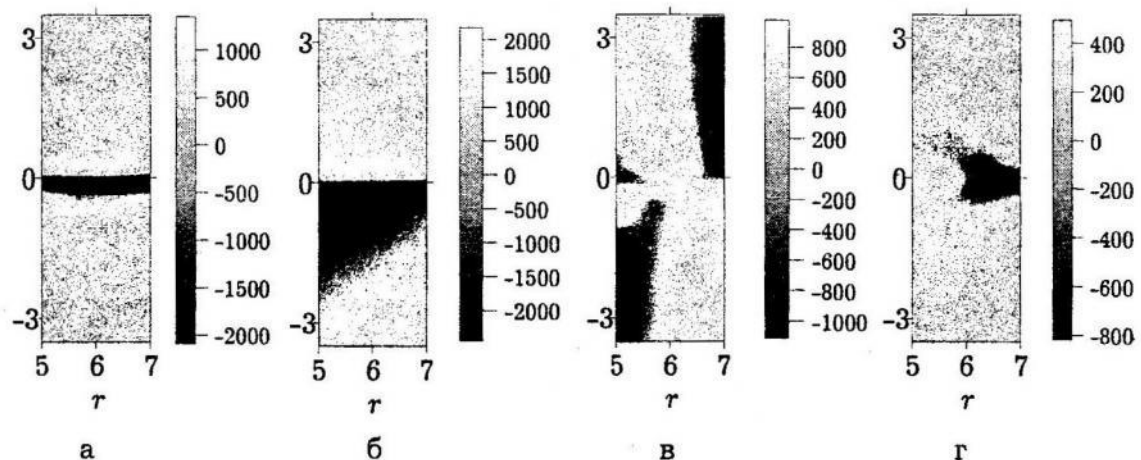
Залежності (13) разом із формулами (11), (12) утворюють означену на множині напрямів $D = D_1 \cup D_2$ множину функціоналів поля напружень.

Дослідження поля напружень у рамках прямої задачі. Якщо функції $v(r)$ та $w(r)$ відомі, то, розв'язуючи крайову задачу (1)–(6), знаходимо залишкові напруження, зумовлені несумісністю деформацій на поверхні контакту його складових.

На рис. зображено розподіл залишкових напружень у тілі B , знайдений внаслідок розв'язання прямої задачі (1)–(6) методом скінченних елементів. Розглядався випадок складових з однаковими модулями пружності і коефіцієнтами Пуассона. Функції $w(r)$ та $v(r)$, які відповідно до формул (6) визначають стрибки компонент вектора переміщення на поверхні S , взяті у вигляді

$$w(r) = 0, \quad v(r) = Ar,$$

де A – стала. Якщо вважати, що $A = -(\alpha_2 - \alpha_1)(T - T_0)$, то прийдемо до випадку напружень, які виникають у складеному циліндрі внаслідок різниці коефіцієнтів температурного розширення α_1 та α_2 його складових під час переходу від температури T_0 до T .



Розподіл напружень у перерізі $\varphi = \text{const}$: а – σ_{rr} , б – $\sigma_{\varphi\varphi}$, в – σ_{zz} , г – σ_{rz}

Результати числових досліджень свідчать про суттєво тривимірний характер напруженого стану в зоні контакту різнорідних складових частин B_1 та B_2 .

1. Александров А. Я., Ахметзянов М. Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого твердого тела. – М: Наука, 1973. – 576 с.
2. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – М.: Высш. шк., 1975. – 528 с.
3. Чекурін В. Ф. Варіаційний метод розв'язування задач томографії напруженого стану твердих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – № 5. – С. 23–32.
4. Чекурин В. Ф. Вариационный метод решения прямых и обратных задач теории упругости для полубесконечной полосы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 2. – С. 58–70.
5. Чекурин В. Ф. Обратная задача неразрушающего контроля уровня закалики листового стекла // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 86–97.
6. Чекурін В. Ф. Обернена задача неруйнівного оптичного контролю залишкових напружень в циліндричних оболонках // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 2. – С. 151–156.

Heorhiy Sulym, Mychaylo Fl'orko, Vasyl Chekurin

RESIDUAL STRESSES IN PIECE-WISE HOMOGENEOUS HOLE CYLINDER

A mathematical model for residual stresses in piece-wise homogeneous solid cylinder, consisting of two parts with different mechanical properties, is considered. Functionals, coupling measured optical parameters and stress distribution in the body, are established. In the frame of the model, using the finite element method, the residual stresses in the hole cylinder, consisting of two parts with different heat expansion coefficients, were studied.

Стаття надійшла до редколегії 29.06.99