ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 183–186 *Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 183–186*

УДК 539.3

Олександра Фльорко, Василь Чекурін

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

НЕЛОКАЛЬНА МОДЕЛЬ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ НАПІВПРОВІДНИКІВ

Напівпровідники великою мірою прозорі для електромагнітного поля в інфрачервоній (ІЧ) області спектра. Внаслідок цього ІЧ-промені, які падають на поверхню тіла, можуть проникати в його товщу, поглинаючись та розсіюючись на своєму шляху. Натомість теплове електромагнітне поле, що випромінюється внутрішніми точками тіла, може поширюватись на великі відстані і, досягши поверхні тіла, виходити за його межі. Потік енергії теплового випромінювання пропорційний до четвертого степеня абсолютної температури тіла, отже цей механізм перенесення тепла за високих температур може суттєво впливати на розподіл теплових потоків у тілі, а відтак – на температурні напруження. Тому розвиток методів його макроскопічного опису має важливе значення для термомеханіки таких тіл. Ми розглядаємо нелінійну математичну модель термопружності напівпровідникових тіл, які враховують обмін енергією в об'ємі і на поверхні через теплове електромагнітне випромінювання.

Рівняння балансу імпульсу та енергії. Розглядаємо напівпровідник, легований донорною домішкою, за досить високих температур, так що домішкові атоми цілком іонізовані. Для опису напруженого стану напівпровідника маємо з рівняння балансу імпульсу ґратки [1]

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{t}, \tag{1}$$

де $\mathbf{u}$ – вектор переміщення; σ – тензор напружень ґратки; $\mathbf{t}$ – складова, яка враховує пондеромоторну дію електромагнітного поля на заряджену ґратку і передавання імпульсу від електронної підсистеми. Складова $\mathbf{t}$ виражається через параметри електромагнітного поля та густину струму в тілі [1].

Обмежуючись випадком локальної термодинамічної рівноваги для тіла, записуємо рівняння балансу внутрішньої енергії для напівпровідника у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} + W_J + W_r, \tag{2}$$

де u – густина внутрішньої енергії; $\mathbf{J}$ – потік тепла; W_J – доданок, що враховує джоулеве тепловиділення, виражається через напруженість електричного поля та густину струму в тілі [1]; W_r – швидкість виникнення теплової енергії в одиниці об'єму напівпровідника внаслідок його взаємодії з ІЧ-випромінюванням.

Рівняння перенесення випромінювання. Для опису теплового випромінювання в тілі використовуємо рівняння перенесення [2]:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}I_\nu + \mathbf{s}\cdot\nabla I_\nu = J_\nu^e - \left(K_\nu^a + S_\nu\right)I_\nu + \frac{1}{4\pi}S_\nu\int_W p_\nu(\mathbf{s},\mathbf{s}')\,I_\nu(\mathbf{s}')\,d\Omega(\mathbf{s}'). \tag{3}$$

Тут $I_\varpi = I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s},t)$ – спектральна інтенсивність випромінювання; $\mathbf{r}$ – радіус-вектор довільної точки з області $\mathcal{V}$, зайнятої тілом; s, $\mathbf{s}'$ – одиничний вектор із початком у точці $\mathbf{r}\in V$, що визначає довільний напрям поширення випромінювання і змінюється в межах повного тілесного кута Ω; J_ν^e – спектральна інтенсивність теплового випромінювання напівпровідника; $K_\nu^a = K_\nu^a(\mathbf{s})$ та $S_\nu = S_\nu(\mathbf{s})$ – спектральні коефіцієнти поглинання та розсіювання випромінювання; $p_\nu(\mathbf{s},\mathbf{s}')$ – індикатриса розсіювання, яка визначає густину ймовірності того, що випромінювання, яке поширюється з напряму $\mathbf{s}'\in\Omega$, розсіється в точці $\mathbf{r}$ у напрямі $\mathbf{s}\in\Omega$; c – швидкість світла.

Складова $J_\nu^e = J_\nu^e(\mathbf{s})$ враховує відплив енергії електромагнітного поля ІЧ-діапазону, зумовлений випромінюванням зарядженими частинками з тіла внаслідок їхнього теплового руху. У наближенні локальної квазірівноваги цю складову можна подати у вигляді [2]

$$J_\nu^e = K_\nu^e(\mathbf{s})\,I_{\nu b}(T), \qquad I_{\nu b}(T) \equiv 2\pi\nu^3 c^{-2}\left[\exp(h\nu/k_B T) - 1\right]^{-1}, \tag{4}$$

де K_ν^e – спектральний коефіцієнт випромінювання середовищем.

Локальна швидкість випромінювання напівпровідником енергії ІЧ-електромагнітного поля виражається через параметр J_ν^e: $W_r^e = \int_0^\infty \int_\Omega J_\nu^e\, ds\, d\nu$, а швидкість поглинання – через інтенсивність випромінювання I_ν: $W_r^a = \int_0^\infty \int_\Omega K_\nu^a I_\nu\, ds\, d\nu$. Отже, складова W_r у рівнянні (4), що враховує обмін енергією між напівпровідником та ІЧ-електромагнітним полем, визначається як

$$W_r = W_r^a - W_r^e = \int_0^\infty \int_\Omega \left(K_\nu^a\, I_\nu - K_\nu^e\, I_{\nu b}(T)\right) d\Omega(\mathbf{s})\, d\nu. \tag{5}$$

Рівняння (1)–(3), (5) разом із рівняннями макроскопічної електродинаміки напівпровідників, фізичними співвідношеннями, рівняннями сумісності деформацій утворюють замкнену систему інтегро-диференціальних рівнянь термопружності.

Умови на поверхні тіла. Визначаючи граничні умови на параметри кондуктивного та променевого теплообміну, враховуватимемо поглинання, випромінювання та розсіювання поверхнею ∂V ІЧ-електромагнітного поля. У результаті прийдемо до таких співвідношень:

$$-\text{æ}\nabla T\cdot\mathbf{n} = h\left(T_c - T\right) + \tilde{W}_r, \tag{6}$$

$$I_\nu^-(\mathbf{s}_2) = K_\nu^e(\mathbf{s}_2)\,I_{\nu b}(T) + \int_{W_1} p_\nu(\mathbf{s}_2,\mathbf{s}_1)\,I_\nu^-(\mathbf{s}_1)\,\mathrm{d}\Omega(\mathbf{s}_1) + \int_{W_2}\left(1 - K_\nu^a(\mathbf{s}_2')\right)p_\nu(\mathbf{s}_2,\mathbf{s}_2')\,I_\nu^+(\mathbf{s}_2')\,\mathrm{d}\Omega(\mathbf{s}_2'),$$

$$I_\nu^+(\mathbf{s}_1) = K_\nu^e(\mathbf{s}_1)I_{\nu b}(T) + \int_{\Omega_1}\left(1 - K_\nu^a(\mathbf{s}_1')\right)p_\nu(\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_1')I_\nu^-(\mathbf{s}_1')\,d\Omega(\mathbf{s}_1') + \int_{\Omega_2} p_\nu(\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2)I_\nu^+(\mathbf{s}_2)\,d\Omega(\mathbf{s}_2), \tag{7}$$

де $æ$ – питома теплопровідність напівпровідника; $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до ∂V; h – коефіцієнт конвективного теплообміну; T_c – температура зовнішнього середовища; $\tilde{W}_r$ – поверхневий приплив тепла до тіла, зумовлений взаємодією поверхні з тепловим електромагнітним полем:

$$\tilde{W}_r = \int_0^\infty \int_{\Omega_2} \left(K_\nu^a(\mathbf{s}_2) I_\nu^-(\mathbf{s}_2) - K_\nu^e(\mathbf{s}_2) I_{\nu b}(T) \right) d\Omega(\mathbf{s}_2) d\nu + \int_0^\infty \int_{\Omega_1} \left(K_\nu^a(\mathbf{s}_1) I_\nu^+(\mathbf{s}_1) - K_\nu^e(\mathbf{s}_1) I_{\nu b}(T) \right) d\Omega(\mathbf{s}_1) d\nu .$$

Знаками «+» та «–» у формулах (7) позначені інтенсивності ІЧ-випромінювання з зовнішньої та внутрішньої сторін поверхні ∂V; одиничні вектори $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_1' \in \Omega_1$ напрямлені назовні від поверхні ∂V, натомість $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_2' \in \Omega_2$ – в її середину.

Перші доданки в правих частинах рівнянь (7) враховують власне теплове випромінювання матеріальних точок поверхні тіла. Другий доданок у правій частині першого рівняння (7) враховує внутрішнє теплове випромінювання, що розсіюється поверхнею ∂V в область V тіла, а третій – зовнішнє теплове випромінювання, яке проникає через поверхню в тіло. Другий доданок у правій частині другого рівняння (7) враховує внутрішнє випромінювання, що виходить через ∂V за межі області V, а третій – враховує зовнішнє випромінювання, яке відбивається поверхнею ∂V.

Наближення температури випромінювання. Інтегруючи рівняння перенесення випромінювання за змінною $\mathbf{s}$ у межах повного тілесного кута Ω та за змінною ν, одержуємо рівняння балансу енергії для ІЧ- випромінювання:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J}_r - W_r . \tag{8}$$

Тут u_r – густина енергії теплового випромінювання; $\mathbf{J}_r$ – його потік:

$$u_r = u_r(\mathbf{r},t) \equiv \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_\Omega I_\nu(\mathbf{s},\mathbf{r},t) d\Omega(\mathbf{s}) d\nu, \quad \mathbf{J}_r = \mathbf{J}_r(\mathbf{r},t) \equiv \int_0^\infty \int_\Omega \mathbf{s} I_\nu(\mathbf{s},\mathbf{r},t) d\Omega(\mathbf{s}) d\nu . \tag{9}$$

Обмежуючись досить малими відхиленнями від локальної теплової рівноваги між випромінюванням і тілом та розглядаючи середовище стосовно його радіаційних властивостей як сіре, тобто приймаючи, що коефіцієнти K_ν^e, K_ν^a та S_ν не залежать від частоти ν: $K_\nu^e = K^e$, $K_\nu^a = K^a$, $S_\nu = S$, подаємо інтенсивність випромінювання $I_\nu = I_\nu(\mathbf{s},\mathbf{r},t)$ у вигляді лінійної функції змінної $\mathbf{s}$:

$$I_\nu(\mathbf{s},\mathbf{r},t) = I_{\nu b}(T_r(\mathbf{r},t)) - \frac{1}{\beta} \frac{\partial I_{\nu b}(T_r(\mathbf{r},t))}{\partial T_r} \nabla T_r \cdot \mathbf{s} , \tag{10}$$

де $T_r(\mathbf{r},t)$ – локальна температура випромінювання; $\beta = K^a + S$. З урахуванням цього, з формул (9), (10) отримуємо

$$u_r = \frac{4\pi}{c} I_b(T_r), \qquad \mathbf{J}_r = -\frac{4\pi}{3\beta} \frac{\partial I_b(T_r)}{\partial T_r} \nabla T_r, \qquad W_r = K^a I_b(T_r) - K^e I_b(T) , \tag{11}$$

де $I_b(T_r) \equiv n^2 \sigma_B T^4 / \pi$, $I_b(T_r) \equiv n^2 \sigma_B T_r^4 / \pi$, σ_B – стала Стефана – Больцмана; n – коефіцієнт заломлення ІЧ-випромінювання.

У результаті приходимо до такого рівняння на температуру випромінювання T_r:

$$c(T_r)\frac{\partial T_r}{\partial t} = \nabla\cdot(æ_r(T_r)\nabla T_r) - \frac{n^2\sigma_B}{\pi}\left(K^a T_r^4 - K^e T^4\right). \tag{12}$$

Тут використано позначення $c_r(T_r) = 16n^2\sigma_B c^{-1}T_r^3$, $æ_r(T_r) = 16n^2\sigma_B(3\beta)^{-1}T_r^3$.

Отже, в такому наближенні перенесення енергії тепловим випромінюванням описується параметром T_r, означеним у просторі змінних $(\mathbf{r}, t)$, який задовольняє рівняння дифузійного типу (12).

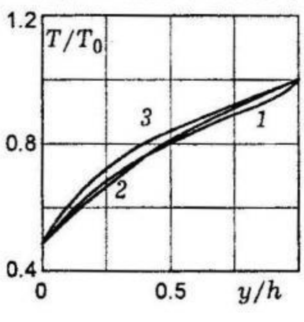
Розглядаючи внутрішню енергію u напівпровідника як функцію температури T та деформації ε, з рівняння (2) одержуємо

$$c_\varepsilon(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla\cdot(æ(T)\nabla T) + \frac{n^2\sigma_B}{\pi}\left(K^a T_r^4 - K^e T^4\right) + W_J - \beta_T : \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}, \tag{13}$$

де $c_\varepsilon(T) = (\partial u/\partial T)_\varepsilon$, $\beta_T = (\partial u/\partial\varepsilon)_T$.

Рівняння (12) та (13) утворюють математичну модель теплообміну в об'ємі напівпровідника у наближенні температури випромінювання.

Теплообмін у шарі, частково прозорому для ІЧ-випромінювання. Розглянемо шар $y \in [0, d]$, що частково прозорий для випромінювання в інфрачервоній області спектра і не розсіює інфрачервоне випромінювання. Шар нагрівається від абсолютно чорної поверхні $y = \text{const} > d$, що має задану температуру T_1. Проміжок між поверхнею та шаром розглядаємо в наближенні вакууму. Поверхня і шар обмінюються теплом лише за рахунок променевого механізму. Поверхня шару $y = 0$ абсолютно чорна, а її температура фіксована $T = T_0$. Розглядаємо стаціонарний процес теплообміну і стан механічної рівноваги тіла. Обмежимося випадком малих відхилень температури в шарі від її значення T_0, за якого характеристики матеріалу можна вважати незалежними від температури.



На рис. зображено розподіл температури в шарі, визначений за різними моделями: *1* – розв'язок рівнянь перенесення енергії та теплопровідності у точній постановці; *2* – у наближенні температури випромінювання і *3* – з використанням дифузійного наближення для рівняння перенесення випромінювання [2]. Як видно з цих результатів, модель температури випромінювання дає точніші результати, ніж дифузійне наближення.

1. *Бурак Я. И., Чекурин В. Ф.* Физико-механические поля в полупроводниках. Математические основы теории. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с.
2. *Оцисик М. Н.* Сложный теплообмен / Пер. с англ. под ред. Н.А. Анфимова. – М.: Мир, 1975. – 616 с.

Alexandra Fl'orko, Vasyl Chekurin

A NONLOCAL MODEL FOR HIGH-TEMPERATURE THERMOELASTOCITY

A nonlinear mathematical model of thermo-elasticity of semiconductors, that takes into account both heat conducting and ray heat energy exchange in the body volume and its surface, is considered. In the frame of the model the temperature field in the strip in nonlocal nonlinear formulation are studied.

Стаття надійшла до редколегії 28.06.99