ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 192–196 Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 192–196

УДК 539.3

Василь Шваб'юк, Володимир Максимович

Луцький державний технічний університет

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ НЕКЛАСИЧНИХ ТЕОРІЙ ЗГИНУ ПЛАСТИН ЗА ЛОКАЛІЗОВАНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

1. Віднесемо пластину завтовшки $2h$ до декартової системи координат (x, y, γ), в якій площина $\gamma = 0$ пристайна до її серединної поверхні. Розглянемо випадок, коли на торцевих поверхнях пластини виконуються такі граничні умови:

$$\sigma_\gamma = q^+ = q \qquad \text{при } \gamma = +h;$$
$$\sigma_\gamma = 0 \qquad \text{при } \gamma = -h;$$
$$\tau_{\gamma x} = \tau_{\gamma y} = 0 \qquad \text{при } \gamma = \pm h. \tag{1.1}$$

На основі співвідношень уточненої теорії пластин [4] нормальні переміщення навантаженої поверхні пластини можна визначити з рівності

$$W(x,y,h) = w(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\nu h^2}{1-\nu}\Delta w + \frac{h}{E}A_0\,q + \frac{h^3}{E}A_0'\,\Delta q, \tag{1.2}$$

де $A_0 = \dfrac{1+\nu}{16(1-\nu)}\left(13 - 16\nu + \nu^2\right)$, $A_0' = \dfrac{\nu(2-\nu)}{64(1-\nu)}$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$;

E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; $w(x,y)$ – переміщення серединної поверхні пластини. Переміщення $w(x,y)$ є розв'язком бігармонічного рівняння:

$$D\Delta^2 w = q - \varepsilon_1\,\Delta q - \varepsilon_2\,\Delta^2 q, \tag{1.3}$$

де $\varepsilon_1 = \dfrac{8-3\nu}{10(1-\nu)}h^2$, $\varepsilon_2 = \dfrac{2-\nu}{40(1-\nu^2)}h^4$, $D = \dfrac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$.

Треба зауважити, що в більшості прикладних теорій типу Тимошенка, які не враховують поперечного обтиснення, параметр ε_1 набуває дещо інших значень, параметр $\varepsilon_2 = 0$, а в рівності (1.2) всі члени, за винятком першого, також відсутні. Якщо обидва параметри (ε_1 і ε_2) дорівнюють нулю, то отримуємо випадок класичної теорії тонких пластин Кірхгофа.

Діючи на рівність (1.2) оператором Δ та беручи до уваги (1.3), одержуємо розрахункове рівняння для навантаженої поверхні пластини:

$$D\Delta^2 W = \left(1 - 0.8h^2\Delta\right)q + \delta_1\,\Delta^2 q - \delta_2\,\Delta^3 q, \tag{1.4}$$

де $\delta_1 = \dfrac{0.49h^4}{(1-\nu^2)}\left(1 + 0.09\nu - 1.75\nu^2(1+0.8\nu)\right)$, $\delta_2 = \dfrac{(2-\nu)\nu}{80(1-\nu^2)(1-\nu)}h^6$.

Виконавши в рівнянні (1.4) заміну змінних у вигляді

$$W = F + (\delta_1 - \delta_2 \Delta)\frac{q}{D}, \tag{1.5}$$

отримаємо розрахункове рівняння

$$D\Delta^2 F = \left(1 - 0.8h^2\Delta\right)q. \tag{1.6}$$

Воно тотожне відповідному рівнянню (1.9), що виведе у праці [2] символічним методом, якщо замість функції $F(x,y)$ підставити складову переміщення $w_0(x,y,h)$.

2. Вираз для вертикального переміщення пластини $W(x,y,h)$ у тривимірній задачі теорії пружності можна записати символічно за А. І. Лурьє [1]. Якщо до цього виразу застосувати формулу розкладу М. Є. Ващенка-Захарченка [2], то він може спроститись до вигляду

$$W(x,y,h) = F(x,y) + \frac{h}{4G}(1-\nu)q + \frac{h}{2G}P_2 - \frac{h}{2G}d^2Q_2, \tag{2.1}$$

де $P_2 = \sum\limits_i \dfrac{\varphi_2(\beta_i,1)}{\sin^2\beta_i}\cdot P_i, \qquad Q_2 = \sum \dfrac{f_2(\alpha_i,1)}{\cos^2\alpha_i}q_i,$

$$p_i(x,y) = -\frac{1}{2\pi h^2}\iint\limits_S p(\xi,\eta)\cdot K_0\left(\beta_i\cdot\frac{r}{h}\right)d\xi\, d\eta,$$

$$q_i(x,y) = -\frac{1}{2\pi h^2}\iint\limits_S p(\xi,\eta)\cdot K_0\left(\alpha_i\cdot\frac{r}{h}\right)d\xi\, d\eta, \tag{2.2}$$

$p = q/2$, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$; $d^2 = h^2\Delta$; φ_2, f_2 – функції, вирази для яких наведені в [2]; α_i, β_i – корені рівняння $\sin 2d \pm 2d = 0$, причому $\mathrm{Re}(\alpha_i,\beta_i) > 0$; S – область, у якій $q \neq 0$, $K_0(2)$ – функція Макдональда; $F(x,y)$ – функція, що визначається з рівняння (1.6).

Представимо формули (2.2) в інтегральному вигляді

$$P_2(x,y) = \int p(\xi,\eta)F_a(x-\xi, y-\eta)\,d\xi\, d\eta,$$

$$Q_2(x,y) = \int p(\xi,\eta)F_s(x-\xi, y-\eta)\,d\xi\, d\eta, \tag{2.3}$$

де

$$F_a = -\frac{1}{2\pi h^2}\sum_i \frac{\varphi_2(\beta_i,1)}{\sin^2\beta_i}K_0\left(\beta_i\frac{\rho}{h}\right),\ F_s = -\frac{1}{2\pi h^2}\sum_i \frac{f_2(\alpha_i,1)}{\cos^2\alpha_i}K_0\left(\alpha_i\frac{\rho}{h}\right),\ \rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Відомо [3], що $\mathrm{Re}\,\alpha_i \approx 2.11$, $\mathrm{Re}\,\beta_i \approx 3.75$, а в наступних коренях дійсна частина зростає приблизно на величину π.

Враховуючи, що при великих ξ, для функцій $F_a(\rho)$ і $F_s(\rho)$ можна записати: $F_a(\rho) = 0(\exp(-3.75\rho))$, $F_s(\rho) = 0(\exp(-2.11\rho))$ при $\rho \to \infty$.

Тобто, у формулах (2.3) основна частина значення інтегралів є наслідком інтегрування на крузі з центром у точці (x, y), радіус якого дорівнює товщині пластини.

З огляду на це, F_a і F_s є дельтоподібними функціями. Тому наближено приймаємо

$$F_j(x,y) \approx A_j\,\delta(x)\delta(y)\,, \qquad (j=a,s)\,, \tag{2.4}$$

де A_j – деякі сталі.

Будемо визначати ці сталі так, щоб інтеграли від лівої та правої частин в (2.4) збігалися.

Такий підхід дає змогу отримати прості формули, які є досить точними, якщо функція $p(x,y)$ є повільно змінною.

Після інтегрування з (2.4) одержуємо

$$A_a = \sum_i \frac{\varphi_2(\beta_i,1)}{\beta_i^{\,2}\sin^2\beta_i}\,, \qquad A_s = \sum_i \frac{f_2(\alpha_i,1)}{\alpha_i^{\,2}\cos^2\alpha_i}\,. \tag{2.5}$$

Для інтегрування використали формулу

$$\iint\limits_{S^*} K_0\left(\lambda\frac{r}{h}\right)ds = 2\pi\frac{h^2}{\lambda^2}\,,$$

де S^* – нескінченна область.

Отже, використовуючи результати праці [2], наближено знаходимо

$$P_2 = A_a\,p(x,y)\,,\; Q_2 = A_s\,p(x,y)\,,$$

де $A_a = \dfrac{81}{350}(1-\nu)\,,\; A_s = 0\,.$

Як наслідок, формула (2.1) при $p(x,y) = q/2$ набуває вигляду

$$W(x,y,h) = F(x,y) + 1.23\,h(1-\nu)\,q/(4G)\,. \tag{2.6}$$

Порівнюючи формули (1.5) і (2.6), бачимо, що при $\delta_2 \approx 0\,,\; \delta_1(\nu = 1/3) = = 1.3\,h^4/3$ вони між собою дуже близькі і їх можна об'єднати однією формулою:

$$W(x,y,h) = F(x,y) + k_i\,h(1-\nu)\,q/(4G)\,, \qquad (i=1,2)\,, \tag{2.7}$$

де $k_1 = 1{,}3$ – відповідає уточненій теорії [4], $k_2 = 1{,}2{,}3$ – асимптотичній формулі (2.6).

3. Для визначення переміщень у пластині від дії локалізованих навантажень скористаємось розв'язками задачі теорії пружності для самозрівноважених (головний вектор і момент дорівнюють нулю) сил P_j, що прикладені в точках (x_j, y_j) пластини. Такий розв'язок має вигляд

$$W(x,y) = \alpha\sum_{j=1}^{N} P_j\,\Phi^{T}\left(x-x_j, y-y_j\right), \tag{3.1}$$

де $\alpha = (1-\nu)/(4\pi h G)$, $\Phi(x,y)$ – записана у явному вигляді функція.

Наприклад, у випадку знаходження розв'язку рівняння (1.6) ця функція дорівнює

$$\Phi^{\acute{Y}} = \frac{1}{8\pi}\left(r^2 - 3.2h^2\right)\ln\left(\frac{r}{h}\right), \tag{3.2}$$

де $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$.

Для рівняння, яке описує згин тонких пластин Кірхгофа, ця функція набуває вигляду

$$\Phi^{K} = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln\left(\frac{r}{h}\right). \tag{3.3}$$

Повний розв'язок рівняння (1.6) в разі довільного навантаження $q(x,y)$ можна записати як

$$F = \frac{1}{D}\iint_{s} q(\xi,\eta)\,\Phi(x-\xi, y-\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{3.4}$$

Числові обчислення для переміщень в пластині виконаємо за її навантаження у трьох кругових областях радіусом R з центром у точках $(\pm 1, 0)$, (0,0). У кожній з областей приймається параболічний розподіл зусиль, тобто

$$\frac{1}{q_0} q(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(1 - r_{1,2}^2/R^2\right) & \text{при} \quad r_{1,2} < R; \\ \quad 1 - r_0^2/R^2 & \text{при} \quad r_0 < R, \end{cases}$$

де $r_{1,2}^2 = (x \pm l)^2 + y^2$; $r_0{}^2 = x^2 + y^2$.

Для знаходження інтегралів (3.1), (3.4) розроблено числовий алгоритм, який ґрунтується на кубатурних формулах від інтегралів, які мають інтегровані особливості. Результати підрахунку переміщень уздовж осі Ox при $l = R = h$ наведені в табл. 1. Чисельник відповідає відношенню $R/h = 2$, знаменник − $R/h = 1$. Значення у круглих дужках дорівнюють відносним похибкам у відсотках відповідних формул.

Таблиця 1

x/h	Точний розв'язок	Формула (2.7)	Теорія Кірхгофа
0	198.96 57.415	198.18 (0.11) 58.692 (2.22)	171.54 (13.78) 44.717 (22.64)
2	167.08 44.751	166.78 (0.18) 45.185 (0.97)	149.64 (10.44) 38.551 (13.85)
4	110.45 30.264	110.52 (0.06) 30.690 (1.41)	99.580 (9.84) 25.600 (15.4)
6	44.868 13.673	44.869 (0.00) 14.029 (2.60)	40.481 (9.78) 10.443 (23.6)
7.5	0	0	0

Як видно з табл. 1 уточнені рівняння (1.4), (2.6) є практично точними при розмірах площинок навантажень, більших за півтовщину пластини. Водночас точність класичної теорії тонких пластин Кірхгофа тут зовсім невелика.

З метою перевірки точності обчислень з використанням кубатурних формул наведемо аналітичний розв'язок рівняння Кірхгофа − Лява для випадку однієї області навантаження:

$$q = C\begin{cases} 1 - r^2/R^2, & r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

де C, R – сталі.

Після перетворень в (1.3), коли $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv 0$, знаходимо

$$w\frac{D}{CR^4} = \begin{cases} -\dfrac{r^6}{576} + \dfrac{\rho^2}{64}\left(\rho^2+1\right) - \dfrac{17}{576} + \dfrac{1}{48}\left(3\rho^2+1\right)\ln\rho, & \rho < 1; \\ \dfrac{1}{48}\left(3\rho^2+1\right)\ln\rho, & \rho > 1, \end{cases} \quad \rho = \frac{r}{R}. \qquad (3.5)$$

Зазначимо, що вибравши $C = 2/(\pi R^2)$ і, зробивши граничний перехід при $R \to 0$ одержуємо значення функції $F(x,y)$, яке збігається з фундаментальним розв'язком (3.3) для зосередженої сили.

Результати підрахунку величини $\tilde{w} = Dw/(CR^4)$ за формулою (3.5) та основі формули (3.3) наведені в табл. 2.

Таблиця 2

x/h	1	2	3	4
$\tilde{w}$	0.251	1.165	3.079	6.248
ε	1.001	1.001	0.999	0.999

Тут $\varepsilon = w_N/w$; w_N – значення величини (3.2), обчислене з використанням кубатурних формул з кроком $\delta = 0.25h$ і $R = 2h$.

Аналіз табл. 2 свідчить про те, що похибка кубатурної формули не перевищує 1%, і підтверджує достовірність результатів наведених у табл. 1.

1. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1995. – 492 с.
2. *Максимович В. М.* Напряженное состояние неравномерно нагретых, нагруженных по граничным поверхностям пластин // Прикл. математика и механика. – 1979. – **3**, № 6. – С. 1066–1072.
3. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 368 с.
4. *Швабюк В. И.* Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально изотропных плит // Прикл. математика. 1980. – **16**, № 4. – С. 71–77.

Vasyl Shabyuk, Volodymyr Maksymovych

COMPARATIVE ANALYSIS OF PRECISION NONCLASSICAL THEORIES OF PLATE FOR BENDING UNDER LOCALIZED LOADING

The precision of nonclassical theories of isotropic plates bending which are under the action of localized loading is investigated. The solutions of the problem were obtained either with the help of specified theories of plates bending taking into account the transversal shear and the reduction deformation or in the framework of three-dimensional theory of elasticity. The examples of numerical calculations are presented.

Стаття надійшла до редколегії 29.09.99