ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 197–204 *Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 197–204*

УДК 532.533, 539.3

Віталій Галазюк, Георгій Сулим

Львівський національний університет ім. І. Франка

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ СТОКСА ПРО ПОВІЛЬНЕ СТАЦІОНАРНЕ ОБТІКАННЯ ТОНКОГО КРУГОВОГО ДИСКУ ПОТОКОМ В'ЯЗКОЇ НЕСТИСЛОВОЇ РІДИНИ РОЗПОДІЛОМ СИЛОВИХ ЧИННИКІВ У ЙОГО ПЛОЩИНІ

Запропоновано новий підхід до моделювання задачі Стокса стосовно осесиметричного обтікання тонкого круглого диска потоком в'язкої нестисливої рідини за малих чисел Рейнольдса. Суть підходу полягає у тому, що поля швидкостей і тиску подають у вигляді суперпозиції однорідного поля, яке визначається розв'язком однорідної системи рівнянь руху, і збуреного – від розподілених у площині диска масових сил і диполів. Причому воно повинно заникати на нескінченності. У праці з'ясовано, що взаємодію потоку в'язкої рідини з нерухомим жорстким диском можна змоделювати відповідним вибором густини розподілу масових сил у площині диска, характер взаємодії (регулярний чи сингулярний розподіл напружень і компонент вектора $\Omega = 0.5\mathrm{rot}\mathbf{v}$) залежить від вихрового чи безвихрового характеру однорідного поля на нескінченності. Вихрова складова руху однозначно визначається розмірами диску, швидкості потоку на нескінченності і не залежить від в'язкості рідини.

1. Розподіл зосереджених чинників у площині простору в'язкої рідини. В основу проведених досліджень покладена лінеаризована система рівнянь руху

$$\mathrm{grad}p + 2\mu\mathrm{rot}\Omega = -\rho_0\mathbf{F},\quad \Omega = 0.5\mathrm{rot}\mathbf{v},\quad \mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1.1}$$

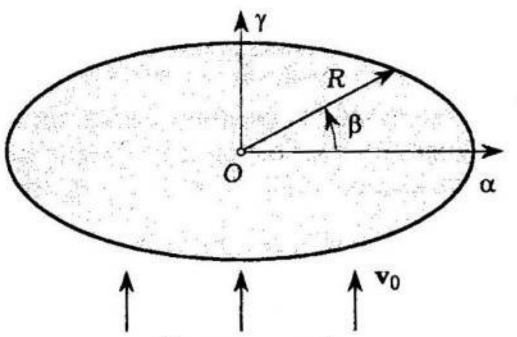

Схема задачі.

яка визначає [3, 4] стаціонарний рух в'язкої нестисливої рідини за малих чисел Рейнольдса і наявності масової сили $\mathbf{F}$. В осесиметричному випадку швидкість потоку $\mathbf{v} = \mathbf{v}(v_0 v_\alpha, 0, v_0 v_\gamma)$ і $\Omega = \Omega\left(0, v_0\omega_\beta/R, 0\right)$; тому у циліндричній системі координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$ з безрозмірними циліндричними координатами α, β, γ (див. рис.) система рівнянь (1.1) у координатній формі набуде вигляду

$$\frac{\partial p}{\partial\alpha}+\frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial\gamma}-\frac{\partial v_\gamma}{\partial\alpha}\right)=-\frac{\rho_0 R}{p_0}X_\alpha,\quad \frac{\partial p}{\partial\gamma}-\frac{1}{\kappa^2}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\alpha\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial\gamma}-\frac{\partial v_\gamma}{\partial\alpha}\right)\right]=-\frac{\rho_0 R}{p_0}X_\gamma; \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\alpha v_\alpha)+\frac{\partial v_\gamma}{\partial\gamma}=0, \tag{1.3}$$

де $p(\alpha,\gamma)$ – тиск; v_0, p_0, ρ_0 – характерні швидкість, тиск і густина; $\kappa = \sqrt{Rp_0/(\mu v_0)}$; μ – коефіцієнт в'язкості; R – характерна лінійна величина.

Компоненти вектора масових сил $\mathbf{F}$ та їхніх диполів за допомогою дельта-функції Дірака та її похідної [5] локалізуємо у площині $\gamma = 0$, задавши у вигляді інтегралів Ганкеля

$$X_\alpha(\alpha,\gamma) = \frac{2p_0}{R\rho_0\kappa^2}\delta'(\gamma)\int_0^\infty\left[\kappa^2 A(\xi) - \xi B(\xi)\right]J_1(\xi\alpha)\,d\xi; \tag{1.4}$$

$$X_\gamma(\alpha,\gamma) = \frac{2p_0}{R\rho_0\kappa^2}\delta(\gamma)\int_0^\infty\left[\kappa^2 A(\xi) + \xi B(\xi)\right]\xi J_0(\xi\alpha)\,d\xi \tag{1.5}$$

з наперед невідомою густиною розподілу, яка визначається функціями $A(\xi)$, $B(\xi)$. Тут $\delta'(\gamma)$ – похідна від дельта-функції Дірака $\delta(\gamma)$; $J_0(\xi\alpha)$, $J_1(\xi\alpha)$ – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядку. Тоді розв'язок системи диференціальних рівнянь у частинних похідних (1.2) – (1.3) можна подати у вигляді:

$$v_\alpha(\alpha,\gamma) = \operatorname{sgn}\gamma\int_0^\infty\left[\xi B(\xi) - \kappa^2 A(\xi)\right]e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)\,d\xi + \kappa^2\gamma\int_0^\infty \xi A(\xi)e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)\,d\xi; \tag{1.6}$$

$$v_\gamma(\alpha,\gamma) = 1 - C\alpha^2 + \int_0^\infty \xi B(\xi)e^{-\xi|\gamma|}J_0(\xi\alpha)\,d\xi + \kappa^2|\gamma|\int_0^\infty \xi A(\xi)e^{-\xi|\gamma|}J_0(\xi\alpha)\,d\xi; \tag{1.7}$$

$$p(\alpha,\gamma) = 4\kappa^{-2}C\gamma - 2\operatorname{sgn}\gamma\int_0^\infty \xi A(\xi)e^{-\xi|\gamma|}J_0(\xi\alpha)\,d\xi, \tag{1.8}$$

де $\operatorname{sgn}(\gamma) = 1$ при $\gamma > 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$, $\operatorname{sgn}(\gamma) = -1$ при $\gamma < 0$; C – довільна стала, що визначає вихрову складову $C\alpha$ в однорідному потоці рідини. Зазначимо, що позаінтегральні члени у виразах (1.7), (1.8) є розв'язками однорідної системи (1.2)–(1.3) і визначають однорідні поля швидкостей і тиску у просторі течії в'язкої рідини за відсутності у ньому збурювальних чинників.

За відомими компонентами вектора швидкості і тиском можна обчислити усі інші характеристики течії в'язкої рідини. Зокрема,

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha,\gamma) = -4\kappa^{-2}p_0C\gamma + 2p_0\left\{\operatorname{sgn}\gamma\int_0^\infty\left[2A(\xi) - \kappa^{-2}\xi B(\xi)\right]\xi\times\right.$$
$$\left.\times e^{-\xi|\gamma|}J_0(\xi\alpha)\,d\xi - \gamma\int_0^\infty \xi^2 A(\xi)e^{-\xi|\gamma|}J_0(\xi\alpha)\,d\xi\right\}; \tag{1.9}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha,\gamma) = 2\mu\left\{-C\alpha + \delta(\gamma)\int_0^\infty\left[\xi B(\xi) - \kappa^2 A(\xi)\right]e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)\,d\xi -\right.$$
$$\left.-\int_0^\infty\left[\xi B(\xi) - \kappa^2 A(\xi)\right]\xi e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)\,d\xi - \kappa^2|\gamma|\int_0^\infty \xi^2 A(\xi)e^{-\xi|\gamma|}J_1(\xi\alpha)\,d\xi\right\}; \tag{1.10}$$

$$2\omega_\beta(\alpha,\gamma) = 2C\alpha + 2\delta(\gamma)\left\{\int_0^\infty \left[\xi B(\xi) - \kappa^2 A(\xi)\right] e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi + \right.$$

$$\left. +2\kappa^2 \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi \right\}. \tag{1.11}$$

З виразів (1.6), (1.8)–(1.11) випливає, що розподіл (1.4), (1.5) масових сил спричиняє появу у площині $\gamma = 0$ стрибка швидкостей $v_\alpha(\alpha, \pm 0)$, тиску $p(\alpha, \pm 0)$, нормального напруження $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0)$, а також існування неперервних, хоча й сингулярних у площині $\gamma = 0$ значень дотичних напружень $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0)$ і компоненти повороту $\omega_\beta(\alpha, \pm 0)$, якщо тільки $\xi B(\xi) - \kappa^2 A(\xi) \neq 0$.

Зазначимо, що за умови

$$\xi B(\xi) = \kappa^2 A(\xi), \quad A(\xi) = \frac{PR\rho_0}{8\pi p_0} \tag{1.12}$$

вирази компонент вектора швидкості й тиску (1.6)–(1.8) дають змогу одержати розв'язок задачі про дію зосередженої масової сили

$$X_\gamma(\alpha,\gamma) = \frac{P\delta(\alpha)\,\delta(\gamma)}{2\pi\alpha} \tag{1.13}$$

в необмеженому просторі в'язкої рідини. При цьому

$$v_\alpha(\alpha,\gamma) = \frac{PR\rho_0\kappa^2}{8\pi p_0}\gamma \int_0^\infty \xi e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha)\, d\xi = \frac{PR\rho_0\kappa^2}{8\pi p_0} \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)^3}}; \tag{1.14}$$

$$v_\gamma(\alpha,\gamma) = \frac{PR\rho_0\kappa^2}{8\pi p_0}\left\{\int_0^\infty e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi + |\gamma| \int_0^\infty \xi e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi\right\} =$$

$$= \frac{PR\rho_0\kappa^2}{8\pi p_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} + \frac{\gamma^2}{\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)^3}}\right\}; \tag{1.15}$$

$$p_\alpha(\alpha,\gamma) = -\frac{2PR\rho_0}{8\pi p_0} \operatorname{sgn}\gamma \int_0^\infty \xi e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha)\, d\xi = -\frac{2PR\rho_0}{8\pi p_0} \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha^2+\gamma^2)^3}}. \tag{1.16}$$

Як і треба було сподіватися, вираз складової вектора швидкості $v_\gamma(\alpha,\gamma)$ з точністю до сталого множника [2] збігається з вертикальною складовою вектора пружного переміщення у класичній задачі Кельвіна механіки деформівного твердого тіла за умови, що модуль зсуву матеріалу прямує до нуля.

2. Загальна постановка задачі Стокса. Знайдемо таку густину розподілу $A(\xi)$, $B(\xi)$ зосереджених чинників, щоб в області $0 \le \alpha \le 1$ площини $\gamma = 0$ внаслідок присутності нерухомого кругового диска виконувалися умови непроникності і прилипання, тобто

$$v_\gamma(\alpha, \pm 0) = 0,\ v_\alpha(\alpha, \pm 0) = 0 \quad (0 \le \alpha \le 1,\ \gamma = 0). \tag{2.1}$$

Крайові умови (2.1) доповнимо фізично обґрунтованою умовою відсутності стрибка тиску у площині $\gamma = 0$ при $\alpha \in [1; \infty)$. Ця умова разом з (2.1) буде виконана, якщо тільки

$$\xi B(\xi) \equiv \kappa^2 A(\xi), \tag{2.2}$$

причому $A(\xi)$ внаслідок виразів (1.7), (1.9) та умови (2.1) є розв'язком парних інтегральних рівнянь

$$\kappa^2 \int_0^\infty A(\xi) J_0(\xi\alpha)\, d\xi = C\alpha^2 - 1 \quad (0 \le \alpha \le 1); \tag{2.3}$$

$$\int_0^\infty \xi A(\xi) J_0(\xi\alpha)\, d\xi = 0 \quad (1 \le \alpha < \infty). \tag{2.4}$$

Їхній розв'язок заснуємо на властивостях розривних інтегралів Вебера-Шафхейтліна [1]

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(\alpha\xi) J_\mu(\beta\xi)}{\xi^\lambda} d\xi = \frac{\alpha^\nu \Gamma((\nu+\mu-\lambda+1)/2)}{2^\lambda \beta^{\nu-\lambda+1} \Gamma((-\nu+\mu+\lambda+1)/2)\, \Gamma(\nu+1)} \times$$
$$\times F\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}; \frac{\nu-\mu-\lambda+1}{2}; \nu+1; \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \tag{2.5}$$
$$(0 \le \alpha < \beta;\quad \mathrm{Re}(\nu+\mu-\lambda+1) > 0;\quad \mathrm{Re}\,\lambda > -1);$$

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(\alpha\xi) J_\mu(\beta\xi)}{\xi^\lambda} d\xi = \frac{\beta^\mu \Gamma((\nu+\mu-\lambda+1)/2)}{2^\lambda \alpha^{\mu-\lambda+1} \Gamma((\nu-\mu+\lambda+1)/2)\, \Gamma(\mu+1)} \times$$
$$\times F\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}; \frac{-\nu+\mu-\lambda+1}{2}; \mu+1; \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \tag{2.6}$$
$$(0 \le \beta < \alpha;\ \ \mathrm{Re}(\nu+\mu-\lambda+1) > 0;\ \ \mathrm{Re}\,\lambda > -1).$$

У виразах (2.5) і (2.6) $\Gamma(x)$ − гамма-функція, $F\left(a; b; c; x^2\right)$ − гіпергеометрична функція Ґаусса, задана гіпергеометричним рядом

$$F\left(a; b; c; x^2\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\,\Gamma(b+k)\, x^{2k}}{\Gamma(c+k)\, k!} \tag{2.7}$$

з одиничним радіусом збіжності при $c - a - b > 0$, причому

$$F(a; b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \ (c - a - b > 0),$$

$$F(a; b; c; x^2) = (1-x^2)^{c-a-b} F(c-a; c-b; c; x^2). \tag{2.8}$$

Зауважимо, що при $a = -k$ або $b = -k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ ряд (2.7) зводиться до полінома степеня $2k$ [1], який можна виразити через ортогональні поліноми Якобі.

Відзначимо такі властивості інтеграла Вебера- Шафхейтліна:

а) інтеграли (2.5) і (2.6) неперервні у точці $\alpha = \beta$ за умови $\lambda > 0$;

б) інтеграл (2.6) тотожно дорівнює нулю для всіх $\alpha > \beta$, якщо $\nu - \mu + \lambda + 1 = -2k \ \left(k \in \mathbb{N}_0\right)$.

Шукану функцію $A(\xi)$ подамо у вигляді ряду Неймана

$$A(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{J_{2n+p+1}(\xi)}{\xi^{p+1}}, \quad r > -1 \tag{2.9}$$

з неозначеними коефіцієнтами a_n. З огляду на властивості (2.6) розривного інтеграла Вебера – Шафхейтліна рівняння (2.4) виконується за довільних $p > -1$, а рівняння (2.3) після обчислення інтеграла (2.5) зведеться до функційного рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+0.5) F\left(n+0.5; -n-p-0.5; 1; \alpha^2\right)}{2^{p+1}\Gamma(n+p+3/2)} - \kappa^{-2} C\alpha^2 = -\kappa^{-2} \ (0 \le \alpha \le 1). \tag{2.10}$$

Оскільки при $p = 0.5$ гіпергеометрична функція Гаусса $F(n+0.5; -n-1; 1; \alpha^2)$ вироджується у поліном степеня $2n \ \left(k \in \mathbb{N}_0\right)$. Тому при $p = 0.5$ ліва частина функційного рівняння (2.10) за довільної сталої C є рядом за повною системою функцій з невизначеними коефіцієнтами, який за апроксимаційною теоремою Веєрштрасса має єдиний набір коефіцієнтів для кожної неперервної на проміжку $0 \le \alpha \le 1$ правої частини. Зокрема, у розглядуваному випадку, прийнявши, що $a_n \equiv 0 \ (k \in \mathbb{N})$, при $n = 0$ одержимо рівняння стосовно коефіцієнта a_0 і сталої C:

$$a_0 \frac{\Gamma(0,5)\kappa^2}{2\sqrt{2}\Gamma(2)}\left(1 - \alpha^2/2\right) = C\alpha^2 - 1, \tag{2.11}$$

звідки

$$a_0 = -\frac{2\sqrt{2}}{\kappa^2\sqrt{\pi}}, \ \ C = 0.5. \tag{2.12}$$

Тому відповідно до формул (2.2) і (2.9)

$$\kappa^2 A(\xi) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{J_{3/2}(\xi)}{\xi^{3/2}}, \ \ \xi B(\xi) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{J_{3/2}(\xi)}{\xi^{3/2}}, \tag{2.13}$$

де $J_{3/2}(\xi)$ – функцій Бесселя першого роду дробового порядку.

Отже, щоб одержати фізично несуперечливі розв'язки задачі про обтікання тонкого кругового диска потоком в'язкої нестисливої рідини в однорідному потоці, повинна бути присутня вихрова складова $C\alpha$ (див. (1.11)), яка не заникає на нескінченності [3] і однозначно визначається першою крайовою умовою (2.1), тобто тільки розмірами диска, швидкістю потоку v_0 і не залежить від в'язкості рідини.

Зазначимо, що при $p = 0.5$ і будь-якому іншому значенні сталої $C \ne 0.5$ функційне рівняння (2.10), а отже і рівняння (2.11) розв'язку не мають.

За відомими з (2.13) функціями $A(\xi), B(\xi)$ та формулами (1.4) і (1.5) знайдемо закон розподілу масових сил $X_\gamma(\alpha, \gamma)$ і диполів $X_\alpha(\alpha, \gamma)$, які реалізують граничні умови (2.1) обтікання диска потоком в'язкої нестисливої рідини. Зокрема в області $0 \le \alpha \le 1$ площини $\gamma = 0$ одержимо

$$X_\alpha(\alpha, \gamma) \equiv 0, \quad X_\gamma(\alpha, \gamma) = -\frac{16p_0}{\pi R \rho_0 \kappa^2}\sqrt{1-\alpha^2}\,\delta(\gamma) \quad (0 \le \alpha \le 1, \ \gamma = 0); \qquad (2.14)$$

$$X_\alpha(\alpha, \gamma) \equiv 0, \quad X_\gamma(\alpha, \gamma) \equiv 0 \quad (1 \le \alpha < \infty, \ \gamma = 0). \qquad (2.15)$$

Залежності ((2.10) і (2.11) підтверджують, що при $p = 0.5$ компоненти вектора масової сили є неперервними у точці $\alpha = 1$ і, як треба було очікувати, всі характеристики течії в'язкої рідини будуть у цій точці також неперервними.

3. Узагальнений постулат Жуковського-Чаплигіна. Знайдемо розподіл швидкостей, напружень і компоненти ω_β вектора $\Omega = 0.5\mathrm{rot}\mathbf{v}$ у площині $\gamma = 0$ від зосереджених чинників, заданих законом (2.14), (2.15). Для цього у вирази (1.6), (1.7), (1.9)–(1.11) підставимо значення (2.13) функцій $A(\xi), B(\xi)$. Після обчислення розривних інтегралів Вебера – Шафхейтліна за формулами (2.5) і (2.6) одержимо, що в області $0 \le \alpha \le 1$ площини $\gamma = 0$ (на поверхні диска)

$$v_\alpha(\alpha, \pm 0) = 0, \ v_\gamma(\alpha, \pm 0) = 0; \qquad (3.1)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = -\mu\alpha, \quad \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = \mp\frac{8p_0}{\pi\kappa^2}\sqrt{1-\alpha^2}; \qquad (3.2)$$

$$\omega_\beta(\alpha, \pm 0) = -\alpha \qquad (3.3)$$

і в області $1 \le \alpha < \infty$ площини $\gamma = 0$ (поза диском)

$$v_\alpha(\alpha, \pm 0) = 0, \ v_\gamma(\alpha, \pm 0) = 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{\pi\alpha}\left[\left(2-\alpha^2\right)\alpha \arcsin\frac{1}{\alpha} + \alpha\sqrt{\alpha^2-1}\right]; \qquad (3.4)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = -\mu\alpha, \quad \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = 0; \qquad (3.5)$$

$$\omega_\beta(\alpha, \pm 0) = \alpha - \frac{4}{\pi}\left[\alpha \arcsin\frac{1}{\alpha} - \sqrt{1-\alpha^{-2}}\right]. \qquad (3.6)$$

Під час побудови залежностей (3.4), (3.6) використали формулу підсумовування гіпергеометричної функції Ґаусса

$$F\left(0,5;\, 0,5;\, 2,5;\, \alpha^{-2}\right) = \frac{3}{4}\left[\left(2-\alpha^2\right)\alpha \arcsin\frac{1}{\alpha} + \alpha\sqrt{\alpha^2-1}\right]. \qquad (3.7)$$

Формули (3.1)–(3.6) підтверджують виконання крайових умов (2.1), а також неперервність за змінною α усіх характеристик руху в'язкої рідини на краю диска $\alpha = 1$, $\gamma = 0$. Зокрема виконання умови

$$\lim_{\alpha \to 1+0} \omega_\beta(\alpha, \pm 0) = \lim_{\alpha \to 1-0} \omega_\beta(\alpha, \pm 0) \qquad (3.8)$$

забезпечує несуперечливість запропонованого розв'язку задачі про течію в'язкої рідини на краю диска $\alpha = 1$, $\gamma = 0$ другій теоремі Гельмгольца щодо збереження інтенсивності вихрових трубок [4]. Нормальне напруження $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0)$ також неперервне, тобто

$$\lim_{\alpha\to 1+0} \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = \lim_{\alpha\to 1-0} \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0). \tag{3.9}$$

Зазначимо, що граничну рівність (3.8) можна було би вважати узагальненням на випадок в'язкої рідини класичного постулату Жуковського – Чаплигіна щодо течії ідеальної рідини в області з кутовою точкою [3, 4].

4. Розв'язок з класичною кореневою особливістю. Покажемо, що розв'язок поставленої задачі з класичною кореневою особливістю у виразі для компонент тензора напружень та вектора $\Omega = 0.5\mathrm{rot}\mathbf{v}$ можна одержати з результатів п. 2 як частковий випадок. Для цього вважатимемо, що однорідний потік в'язкої рідини є безвихровим, тобто стала $C \equiv 0$. Тоді функційне рівняння (2.6) стосовно невизначених коефіцієнтів a_n набуде вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+0,5)\, F\left(n+0,5;\, -n-p-0,5;\, 1;\, \alpha^2\right)}{2^{p+1}\Gamma(n+p+1,5)} = -\kappa^{-2} \qquad (0 \le \alpha \le 1) \tag{4.1}$$

і його єдиний розв'язок внаслідок апроксимаційної теореми Вейєрштрасса існує тільки при $p = -0.5$. Тому, вважаючи $a_n \equiv 0$ $(n \in \mathbb{N})$, одержимо

$$a_0 = -\frac{\sqrt{2}}{\kappa^2\sqrt{\pi}} \tag{4.2}$$

і внаслідок рівності (2.2) та ряду (2.5)

$$\kappa^2 A(\xi) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{J_{1/2}(\xi)}{\xi^{1/2}}, \quad \xi B(\xi) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{J_{1/2}(\xi)}{\xi^{1/2}}. \tag{4.3}$$

За відомими функціями $A(\xi)$, $B(\xi)$ та формулами (1.4), (1.5) знайдемо закон розподілу масових сил $X_\gamma(\alpha, \gamma)$ і диполів $X_\alpha(\alpha, \gamma)$, які реалізують крайові умови (2.1) у припущенні, що однорідний потік в'язкої рідини у просторі без диску є безвихровим. Зокрема одержимо

$$X_\alpha(\alpha, \gamma) \equiv 0, \quad X_\gamma(\alpha, \gamma) = -\frac{8p_0}{\pi R \rho_0 \kappa^2}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\delta(\gamma) \ \ (0 \le \alpha \le 1,\ \ \gamma = 0); \tag{4.4}$$

$$X_\alpha(\alpha, \gamma) \equiv 0, \quad X_\gamma(\alpha, \gamma) \equiv 0 \ \ (1 < \alpha < \infty,\ \ \gamma = 0). \tag{4.5}$$

Тепер з'ясуємо розподіл швидкостей, напружень і компоненти ω_β вектора Ω у площині $\gamma = 0$ від зосереджених чинників, заданих законом (4.5) і (4.6). Для цього у вирази (1.6), (1.7), (1.9)–(1.11) підставимо значення (4.3) функцій $A(\xi), B(\xi)$. Після обчислення розривних інтегралів Вебера – Шафхейтліна за формулами (2.5) і (2.6) одержимо, що в області $0 \le \alpha < 1$ площини $\gamma = 0$

$$v_\alpha(\alpha, \pm 0) = 0, \ \ v_\gamma(\alpha, \pm 0) = 0; \tag{4.6}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = 0, \quad \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{4p_0}{\pi\kappa^2} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}; \tag{4.7}$$

$$\omega_\beta(\alpha, \pm 0) = 0 \tag{4.8}$$

і в області $1 \le \alpha < \infty$ площини $\gamma = 0$

$$v_\alpha(\alpha, \pm 0) = 0, \quad v_\gamma(\alpha, \pm 0) = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{\alpha}; \tag{4.9}$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = 0, \quad \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = 0; \tag{4.10}$$

$$\omega_\beta(\alpha, \pm 0) = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}. \tag{4.11}$$

Формули (4.5) і (4.6) свідчать, про те що за виконання крайових умов (2.1) припущення про безвихровий рух однорідного потоку в'язкої спричиняє сингулярний розподіл напружень $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0)$ на поверхні диска, а також розривний характер вихрового руху у площині $\gamma = 0$, що призводить до порушення граничної рівності (3.8).

Отже, для того щоб під час обтікання тіла з кутовою точкою стаціонарним потоком в'язкої нестисливої рідини за малих чисел Рейнольдса уникнути сингулярності напружень і забезпечити у кутовій точці неперервність компонент вектора Ω необхідно спричинити на нескінченності детерміновану завихреність однорідного потоку рідини.

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. *Божидарник В. В., Сулим Г. Т.* Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
3. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 757 с.
4. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
5. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965. – 412 с.

Vitaliy Galazyuk, Heorhiy Sulym

MATHEMATICAL MODELLING OF THE STOKES PROBLEM ON SLOW STATIONARY FLOWING AROUND THIN DISC BY A FLOW VISCOUS NONCOMPRESSIBLE LIQUID BY DISTRIBUTION OF FORCE FACTORS IN ITS PLANE

In the Stoces problem on axis-symmetric flowing around thin disc by a flow of viscous fluid with small Reynolds numbers we propose to represent the velocity and pressure fields as a superposition of a homogeneous field determined by a solution of homogeneous system of motion equations and a perturbed one, by distributed in the disc plane mass forces and dipoles. Whether the torsion and rotation distribution is regular or singular depends on curly or curliness character of the homogeneous fiel at infinity.

Стаття надійшла до редколегії 16.09.99