

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 55



Львів 1999

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 55

Видається з 1965 року

Львів

Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка

1999

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 1999. Випуск 55. 200 с.

Visnyk of the Lviv University. Series Mathematics and Mechanics. 1999. No. 55. 200 p.

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, postgraduates and students.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Лянце* (відп. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України *Я. Бурак*; канд. фіз.-мат. наук, доц. *Ю. Головатий* (відп. секр.); канд. фіз.-мат. наук, доц. *О. Горбачук*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Я. Єлейко*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Зарічний*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Комарницький* (заст. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. *С. Лавренюк*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Скасків*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *О. Сторож*; д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Сулим*.

Адреса редакційної колегії:

79002 Львів, вул. Університетська, 1, Львівський національний університет
механіко-математичний факультет, кафедра диференціальних рівнянь

Тел. (0322) 79-45-93

E-mail: diffeq@franko.lviv.ua

Chair of Differential Equations, Department of Mechanics and Mathematics,
Lviv National University, Universytetska 1, Lviv, 79002

Відповідальний за випуск *С. Лавренюк*

Редактор *Н. Плиса*

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного
університету імені Івана Франка

ISSN 0201-758X

ISSN 0460-0509

© Львівський національний університет імені Івана Франка, 1999

УДК 539.3

Віктор Божидарник, Олеся Максимович

Луцький державний технічний університет

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ ПЛАСТИНОК З ОТВОРАМИ І ТРИЩИНАМИ

У праці [1] наведено інтегральні рівняння задачі теорії пружності для анізотропних пластинок з отворами довільної форми. Нижче на основі результатів [1] розглянуто задачі про пружну рівновагу анізотропних багатозв'язних пластинок, послаблених криволінійними тріщинами. Для розв'язування рівнянь застосовано метод механічних квадратур [4]. Інші підходи до дослідження анізотропних пластинок описані у працях [2, 3, 5].

Розглянемо спочатку випадок, коли пластинка займає область D , що обмежена контурами $L_0, L_1, \dots, L_N$, які не перетинаються. Прийнято, що область D є внутрішньою стосовно контура L_0 та пластинка перебуває під дією навантаження, яке прикладене до її межі. Віднесемо область D до декартової системи координат (x, y) та позначимо прикладені до межі пластинки зусилля через (X, Y) . Розглянемо системи координат $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, які одержують із системи (x, y) афінним перетворенням $x_j = x + \alpha_j y$, $y_j = y + \beta_j y$ ($j = 1, 2$), де $s_j = \alpha_j + i\beta_j$ – корені характеристичного рівняння [2], причому $\text{Im}(s_j) > 0$ ($j = 1, 2$). Позначимо в цих системах через D_1 і D_2 області, в які при афінних перетвореннях перейде область D , а L_j криві, відповідають контурам, – через $L_j^{(1,2)}$ ($j = 0, \dots, N$). Поставлена задача зводиться до знаходження комплексних потенціалів $\phi(z_1), \psi(z_2)$, які на межі області задовольняють умови [2]

$$2\text{Re}[\phi(z_1) + \psi(z_2)] = - \int_0^s Y ds + C_1, \quad 2\text{Re}[s_1 \phi(z_1) + s_2 \psi(z_2)] = \int_0^s X ds + C_2, \quad (1)$$

де $z_1 = x + s_1 y$, $z_2 = x + s_2 y$, C_1, C_2 – дійсні сталі.

На основі [1] інтегральні зображення для комплексних потенціалів $\Phi(z) = d\phi(z)/dz$, $\Psi(z) = d\psi(z)/dz$ запишемо у вигляді

$$\Phi(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^{(1)}} \frac{Q(\tau)}{\tau - z_1} d\tau, \quad (2)$$

$$\Psi(z_2) = \frac{1}{2\pi i(s_2 - \bar{s}_2)} \left[\int_L \frac{X + \bar{s}_2 Y}{t_2 - z_2} ds - (s_1 - \bar{s}_2) \int_{L^{(1)}} \frac{Q(t_1) dt_1}{t_2 - z_2} - (\bar{s}_1 - \bar{s}_2) \int_{L^{(1)}} \frac{\overline{Q(t_1)} d\bar{t}_1}{t_2 - z_2} \right],$$

де $Q(t_1) = \Phi(t_1) - A_j$ при $t_1 \in L_j^{(1)}$; $L^{(k)} = L_0^{(k)} + L_1^{(k)} + \dots + L_N^{(k)}$, ($k = 1, 2$). Тут за додатний напрям обходу контурів обраний такий, область D якого залишається ліворуч та введено в розгляд комплексні сталі A_j і B_j ($j = 0, \dots, N$), що задовольняють умови

$$\begin{aligned}
A_j + \bar{A}_j + B_j + \bar{B}_j &= 0, \\
s_1 A_j + \bar{s}_1 \bar{A}_j + s_2 B_j + \bar{s}_2 \bar{B}_j &= 0, \\
s_1^2 A_j + \bar{s}_1^2 \bar{A}_j + s_2^2 B_j + \bar{s}_2^2 \bar{B}_j &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Комплексні потенціали задовольняють додаткові умови, які забезпечують однозначність переміщень. Такі умови на основі [2] записані у вигляді

$$\int_{L_j} Q(z_1) dz_1 = - \frac{C_1^{(1)} Y^{(j)} + C_2^{(1)} X^{(j)}}{C}, \quad j = 0, \dots, N, \tag{4}$$

де $C_i^{(j)}$, C – сталі, вирази для яких наведені в [2]; $X^{(j)}$, $Y^{(j)}$ – проекції на осі Ox і Oy головного вектора всіх сил, що прикладені до контуру L_j . Для знаходження функції Q , через яку записаний загальний розв'язок задачі, використаємо формулу для знаходження вектора зусиль на довільній кривій $\Gamma \in D$ [6]:

$$i(X + iY) = (1 + is_1) z'_1 \Phi(z_1) + (1 + i\bar{s}_1) \bar{z}'_1 \overline{\Phi(z_1)} + (1 + is_2) z'_2 \Psi(z_2) + (1 + i\bar{s}_2) \bar{z}'_2 \overline{\Psi(z_2)}, \tag{5}$$

де $z'_j = dz_j/ds$, ds – диференціал дуги на кривій Γ . Підставивши в (5) потенціали (2) і перейшовши до границі $(x, y) \rightarrow L$, одержимо граничні інтегральні рівняння для знаходження функції Q у вигляді

$$i(X + iY)/2 = (1 + is_1) z'_1 \Phi(z_1) + (1 + i\bar{s}_1) \bar{z}'_1 \overline{\Phi(z_1)} + (1 + is_2) z'_2 \Psi(z_2) + (1 + i\bar{s}_2) \bar{z}'_2 \overline{\Psi(z_2)}, \tag{6}$$

де $(x, y) \in L$. Інтеграли Коші, які входять у комплексні потенціали (2), на контурі інтегрування розглядають в сенсі головного значення.

Розглянемо випадок, коли отвори L_i ($i = M + 1, \dots, N$) вироджуються у тріщини. На основі (2) інтегральне зображення загального розв'язку задачі набуває вигляду

$$\Phi(z_1) = \Phi_0(z_1) + \Phi_T(z_1), \quad \Psi(z_2) = \Psi_0(z_2) + \Psi_T(z_2), \tag{7}$$

де функції з індексом «0» визначаються за формулами (2) при $N = M$,

$$\begin{aligned}
\Phi_T(z_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{T^{(1)}} \frac{S(\tau) d\tau}{\tau - z_1}, \quad \Psi_T(z_2) = \frac{1}{2\pi i(s_2 - \bar{s}_2)} \left[\int_T \frac{[X] + \bar{s}_2[Y]}{t_2 - z_2} ds - \right. \\
&\quad \left. - (s_1 - \bar{s}_2) \int_{T^{(1)}} \frac{S(t_1) dt_1}{t_2 - z_2} - (\bar{s}_1 - s_2) \int_{T^{(1)}} \frac{\overline{S(t_1)} d\bar{t}_1}{t_2 - z_2} \right],
\end{aligned} \tag{8}$$

де $S(t_1) = [\Phi]$. Тут прийнято позначення вигляду $[F] = F^+(t_1) - F^-(t_1)$, де F – довільна функція; $F^+(t_1)$, $F^-(t_1)$ – граничні значення функції $F(z_1)$ у разі підходу ліворуч і праворуч до тріщини стосовно обраного напрямку інтегрування; $t_1 \in T_j^{(1)}$; $T^{(k)} = T_1^{(k)} + T_2^{(k)} + \dots + T_{N-M}^{(k)}$, ($k = 1, 2$), T_j ($j = 1, \dots, N - M$) – контури розрізів. На підставі (4) одержуємо додаткову умову, яку задовольняє функція S :

$$\int_{T_j} S(z_1) dz_1 = -\frac{C_1^{(1)} Y^{(j)} + C_2^{(1)} X^{(j)}}{C}, \quad j = 1, \dots, N-M. \quad (9)$$

Співвідношення (6) при врахуванні зображень є системою сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій Q та S . Для розв'язування інтегральних рівнянь (6) використаємо метод механічних квадратур. Для цього наведемо квадратурні формули для інтегралів, які входять у зображення (2) і (8). Розглядаючи отвори, розглядатимемо випадок, коли параметричне рівняння контурів L_j записане у вигляді відрізків ряду Фур'є:

$$x = \sum_{n=-K}^K a_n^{(j)} e^{in\theta}, \quad y = \sum_{n=-K}^K b_n^{(j)} e^{in\theta}, \quad j = \overline{0, M},$$

де $a_n^{(j)}, b_n^{(j)}$, K – сталі; $0 \leq \theta < 2\pi$. Тоді рівняння контурів $L_j, L_j^{(1,2)}$ запишемо:

$$t_k = \omega_k^{(j)}(\sigma), \quad \text{де } t_0 = t, \quad \omega_k^{(j)}(\sigma) = \sum_{n=-K}^K (a_n^{(j)} + s_n b_n^{(j)}) \sigma^n, \quad s_0 = 1, \quad \sigma = e^{i\theta}.$$

Розглянемо інтеграл, який входить у рівняння (6)

$$Z_j(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j^{(1)}} \frac{Q(\tau)}{\tau - z_1} d\tau, \quad j = 1, \dots, M.$$

Для цього інтегралу можна застосувати відомі квадратурні формули [4]. Тоді запишемо

$$Z_j(z_1) \cong \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \frac{Q_k^{(j)} t_{1k}'^{(j)} \sigma_k^{(j)}}{t_{1k}^{(j)} - z_1},$$

де $t_{1k}^{(j)} = \omega_1^{(j)}(\sigma_k)$, $t_{1k}'^{(j)} = \omega_1'^{(j)}(\sigma_k)$, $Q_k^{(j)} = Q(t_{1k}^{(j)})$, $\sigma_k = \exp(ih_j k)$, $h_j = 2\pi/N_j$, N_j – кількість вузлових точок на контурі L_j . Наведена формула правильна для довільних точок, що не належать контуру $L_j^{(1)}$, та для точок $z_1 = \omega_1^{(j)}(\zeta_v^{(j)})$, де $\zeta_v^{(j)} = \exp(i\theta_v^{(j)})$, $\theta_v^{(j)} = h_j(v + 0.5)$, $v = 1, \dots, N_j$. Зазначимо, що в останньому випадку інтеграл розглядається в сенсі головного значення.

Аналогічно маємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_j^{(1)}} \frac{Q(t_1)}{t_2 - z_2} dt_1 \cong \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \frac{Q_k^{(j)} t_{1k}'^{(j)} \sigma_k^{(j)}}{t_{2k}^{(j)} - z_2}.$$

Формула правильна для довільних точок, які не належать контуру $L_j^{(2)}$, та для точок $z_2 = \omega_2^{(j)}(\zeta_v^{(j)})$. В інтегральне зображення розв'язку входять також інтеграли вздовж розрізів $T_j^{(1)}$ ($j = 1, \dots, N-M$) вигляду

$$W_j(z_1) = \int_{T_j^{(1)}} \frac{S(t_1)}{t_1 - z_1} dt_1.$$

Прийmemo, що параметричне рівняння контурів $T_j, T_j^{(1)}, T_j^{(2)}$ ($j = 1, \dots,$

$N - M$) записане у вигляді $t = g_j(\tau)$, $t_1 = g_j^{(1)}(\tau)$, $t_2 = g_j^{(2)}(\tau)$, $-1 < \tau < 1$. Функції S мають вигляд: $S(g_j^{(1)}(\tau)) = U_j(\tau)/\sqrt{1-\tau^2}$, де $U_j(\tau)$ – обмежена неперервна функція, $j = 1, \dots, N - M$. Для знаходження функції W_j використаємо квадратурні формули Лобатто. У результаті одержимо

$$W_j(z_1) = \sum_{n=1}^{N_j} A_{jn} \frac{U_{jn} t_{1n}^{(j)'}}{t_{1n}^{(j)} - z_1},$$

де $A_{jn} = \pi/(N_j - 1)$ при $n = 2, \dots, N_j - 1$; $A_{j1} = A_{jN_j} = 0.5\pi/(N_j - 1)$; $t_{1n}^{(j)} = g_j^{(1)}(\tau_n)$, $t_{1n}^{(j)'} = g_j^{(1)'}(\tau_n)$, $\tau_n = \cos[\pi n/(N_j - 1)]$ при $n = 2, \dots, N_j - 1$; $\tau_{j1} = -1$; $\tau_{jN_j} = 1$; $U_{jn} = U_j(t_{1n}^{(j)})$. Ця формула правильна, якщо $z_1 \notin T_j$ та $z_1 = g_j^{(1)}(\cos(\pi(n - 0.5)/(N_j - 1)))$ при $n = 1, \dots, N_j - 1$. Підставляючи у рівняння (6) зображення (2), (8) та замінюючи в одержаних співвідношеннях інтеграли на наведені квадратурні формули, поставлену задачу зводимо до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно невідомих значень функцій Q у вузлових точках на межі отворів та функцій U на розрізах. Додаткові рівняння на тріщинах отримаємо, записавши дискретний аналог умови (9). Спосіб врахування власних розв'язків рівняння (6) на контурах L_j ($j = 0, \dots, M$) описаний у [1].

1. Божидарник В. В., Максимович О. В. Пружна рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. Львів: Каменяр. – 1999. – 2, № 2. – С. 255–259.
2. Божидарник В. В. Двовимірні задачі теорії пружності і термопружності структурно-неоднорідних тіл. – Львів: Світ, 1998. – 352 с.
3. Космодеміанський А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – Киев; Донецк: Выща школа, 1976. – 200 с.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
5. Фильштинский А. Л. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. МТТ. – 1976. – № 5. – С. 91–97.

Victor Bozhydarnyk, Olesia Maksymovych

INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST BASE PROBLEM FOR NON-ASITROPES ELASTIC PLATES WITH HOLES AND CREAKS

The paper presents singular integral equations for non-asitrope plates weakened by holes and creaks. The paper worked out the numerical algorithm of solving of the received equations that is based on the method of mechanical quadrature.

Стаття надійшла до редколегії 10.08.99

УДК 539.3

Георгій Сулим, Віктор Опанасович, Володимир Драпака

Львівський національний університет ім. І. Франка

ГРАНИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ДВОХ ВЕРТИКАЛЬНО ЗСУНУТИХ ІДЕНТИЧНИХ ТРІЩИН У ПЛАСТИНІ

Досліджується розв'язок задачі про напружений стан ізотропної пластини з двома вертикально зсунутими на величину d тріщинами завдовжки $2l$ (рис. 1). Береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження, пластина на нескінченності розтягується перпендикулярно до осей тріщин рівномірно розподіленими напруженнями інтенсивності $\sigma_{yy}^{\infty} = p$. З'ясуємо вплив зближення тріщин на зміну коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН).

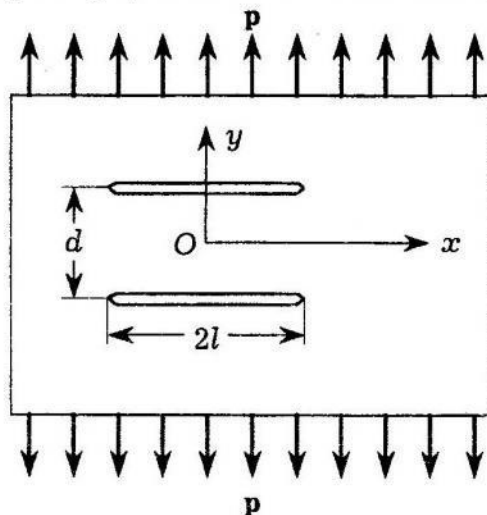


Рис. 1. Схема задачі.

У працях [1, 2] розв'язування цієї задачі зведене до сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою [1]

$$\int_{-1}^1 [\varphi(\tau) K(\tau, \varepsilon) + \overline{\varphi(\tau)} L(\tau, \varepsilon)] \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = -\pi, \quad (1)$$

$$\left(|\varepsilon| < 1, \quad \tau = \frac{t}{l}, \quad \varepsilon = \frac{x}{l} \right), \quad \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0,$$

де $\varphi(\tau) = p^{-1} \sqrt{1-\tau^2} g'(l\tau)$,

$$K(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\tau - \varepsilon} + \frac{\lambda^2 (\tau + \varepsilon)}{\lambda^2 (\tau + \varepsilon)^2 + 4}, \quad L(\tau, \varepsilon) = L_1(\tau, \varepsilon) + i L_2(\tau, \varepsilon), \quad \lambda = \frac{2l}{d},$$

$$L_1(\tau, \varepsilon) = \frac{8\lambda^2(\tau + \varepsilon)}{[\lambda^2(\tau + \varepsilon)^2 + 4]^2}, \quad L_2(\tau, \varepsilon) = \frac{2\lambda[\lambda^2(\tau + \varepsilon)^2 - 4]}{[\lambda^2(\tau + \varepsilon)^2 + 4]^2}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (2)$$

$g(x)$ – невідома функція, яка пропорційна до стрибка переміщень точок берегів тріщин.

Застосування до розв'язування рівняння (1) схеми методу механічних квадратур [1, 2] дає систему M лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР):

$$\sum_{m=1}^M [\varphi(t_m) K(t_m, x_r) + \overline{\varphi(t_m)} L(t_m, x_r)] = -M \quad (r = \overline{1, M-1}), \quad \sum_{m=1}^M \varphi(t_m) = 0, \quad (3)$$

де координати вузлів t_m і x_r задають співвідношеннями $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$,

$x_r = \cos \frac{\pi r}{M}$; функція $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$.

У цьому випадку КІН обчислюють за формулами [1-3]:

$$K_1^\pm - iK_2^\pm = \mp p\sqrt{l}(\varphi_1(\pm 1) + i\varphi_2(\pm 1)), \quad (4)$$

де $\varphi(\pm 1) = \mp \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+\frac{M}{2}(1\pm 1)} \varphi(t_m) \operatorname{tg} \mp \frac{2m-1}{4M} \pi$.

У працях [1-3] зазначено, що за зменшення відстані між тріщинами до нуля КІН прямують до вироджених значень. Дослідимо докладніше цей граничний перехід.

Переходячи у системі рівнянь (3) до границі при $d \rightarrow 0$ (ця ситуація відповідає явищу злиття двох тріщин), одержуємо

$$\frac{2}{M} \sum_{m=1}^M \left[\varphi(t_m) \frac{t_m}{t_m^2 - x_r^2} \right] = -1 \quad (r = \overline{1, M-1}), \quad \sum_{m=1}^M \varphi(t_m) = 0. \quad (5)$$

Оскільки $x_r = -x_{M-r}$, то визначник СЛАР (5) дорівнює нулю і КІН прямують до вироджених значень. Щоб того позбутися, видозмінимо СЛАР (3), беручи до уваги, що у функції $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$ дійсна частина є непарною, уявна – парною. Тоді система рівнянь (3) зредукується до

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{[M/2]} \varphi_1(t_m) K_{11}(t_m, x_r) + \sum_{m=1}^N \varphi_2(t_m) K_{12}(t_m, x_r) &= -M, \quad r = \overline{1, [M/2]}, \\ \sum_{m=1}^{[M/2]} \varphi_1(t_m) K_{21}(t_m, x_r) + \sum_{m=1}^N \varphi_2(t_m) K_{22}(t_m, x_r) &= 0, \quad r = \overline{1, N-1}, \\ \sum_{m=1}^N \varphi_2(t_m) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$K_{jj}(t, x) = K(t, x) - L_1(-t, x) + (-1)^j [K(-t, x) - L_1(t, x)], \quad j = 1, 2,$$

$$K_{ij}(t, x) = L_2(t, x) + (-1)^j L_2(-t, x), \quad i, j = 1, 2, \quad (i \neq j),$$

$$N = \left[\frac{M}{2} \right] + \begin{cases} 0, & \text{якщо } M - \text{парне,} \\ 1, & \text{якщо } M - \text{непарне;} \end{cases} \quad [a] - \text{ціла частина числа } a.$$

КІН знаходимо за формулами (4), враховуючи, що у цьому випадку вирази для $\varphi_j(1)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \varphi_1(1) &= \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{[M/2]} (-1)^{m+1} \varphi_1(t_m) \begin{cases} \sin^{-1}((2m-1)/(2M)\pi), & M - \text{парне,} \\ \operatorname{ctg}((2m-1)/(2M)\pi), & M - \text{непарне,} \end{cases} \\ \varphi_2(1) &= \frac{2}{M} \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \varphi_2(t_m) \begin{cases} \operatorname{ctg}((2m-1)/(2M)\pi), & M - \text{парне,} \\ \delta_{m,N} \sin^{-1}((2m-1)/(2M)\pi), & M - \text{непарне,} \end{cases} \\ \delta_{m,N} &= \begin{cases} 1, & m \neq N, \\ 1/2, & m = N. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 2, 3 відображені результати числового аналізу впливу взаємного зближення тріщин (зменшення параметра q) на зміну безрозмірних КІН $K_i^* = K_i^+/(p\sqrt{l})$, $i = 1, 2$ за різних способів їх обчислення. Лінії 1, 2 побудовані з використанням розв'язку системи рівнянь (6). Лінії 3, 4 отримані з використанням традиційної схеми (3)–(5) при $M = 200$.

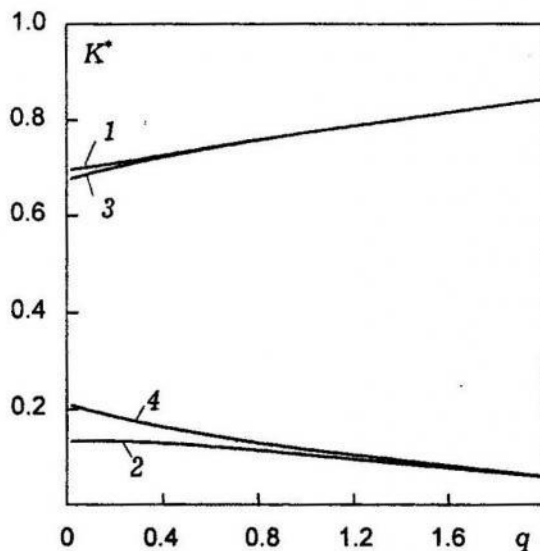


Рис. 2. Залежність зведених КІН від відносної відстані q між тріщинами і сталому навантаженні p при $M = 200$.

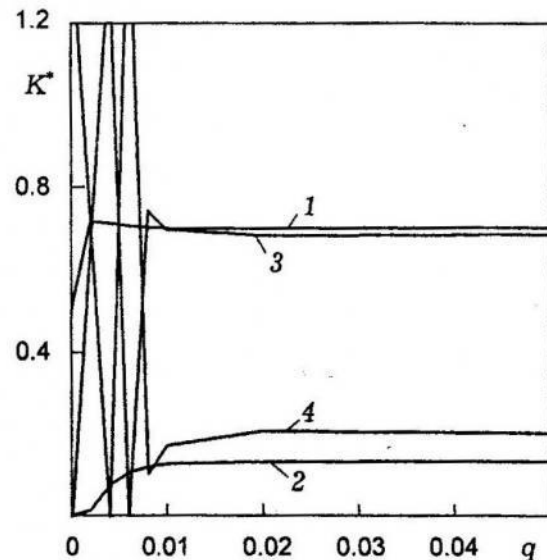


Рис. 3. Залежність зведених КІН від відносної відстані q між тріщинами для малих значень q при $M = 200$.

Стосовно КІН доходимо таких висновків.

1. Для досягнення бажаного рівня точності в обох випадках при $q \rightarrow 0$ треба збільшувати кількість M , врахованих у рядах членів.
2. Доки завдяки розрядній сітці комп'ютера вдається уникнути нагромадження похибок округлення, при $d > r$, за досить великим значенням M , обидва методи дають результати, які узгоджуються з асимптотичним розподілом [1-3] і $K_1 \rightarrow p\sqrt{l}/2$, тобто домінує явище зближення тріщин.
3. Яким би великим не було значення M , застосовуючи традиційний метод з прямим q до нуля за умови $d < r$ завжди одержуємо $K_i^* \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$. Запропонована тут схема (6) дає граничні значення $K_1^* \rightarrow p\sqrt{l}/2$, $K_2^* \rightarrow 0$, властиві для «півтріщин». Тобто, вдається виловити ефект злиття двох «половинних» тріщин. Окрім того, асимптотичний розподіл напружень поблизу вершин двох тріщин при $r > d \rightarrow 0$ прямує до відповідного розподілу напружень поодинокі тріщини.

1. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
2. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
3. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.

Heorhiy Sulym, Victor Opanasovych, Volodymyr Drapaka

THE LIMITING SIF VALUES FOR TWO VERTICALLY SHIFTED IDENTICAL CRACKS IN A PLATE

At the considering paper two different limiting transitions in the SIF determination near each of two parallel non-shifted cracks which are coming close to each other $d \rightarrow 0$ are obtained on the numerical level. The cracks are situated in a plate which is stretched on the infinity by uniformly distributed load. If $d > r$ than the effect of coming close of the cracks is dominating $K_1 \rightarrow p\sqrt{l}/\sqrt{2}$, and if $d < r$ than we obtain the effect of junction of two «half» cracks $K_1^* \rightarrow p\sqrt{l}/2$, $K_2^* \rightarrow 0$.

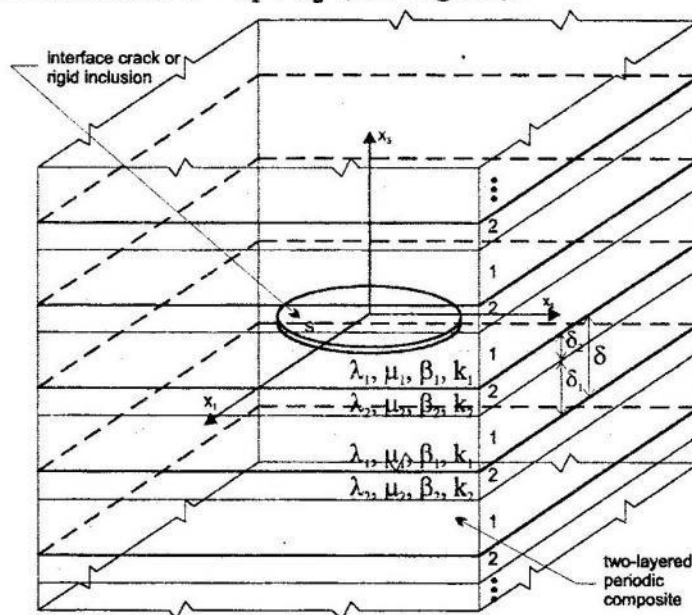
Стаття надійшла до редколегії 02.09.99

Andrzej Kaczyński, Stanisław Matysiak

*Institute of Mathematics, Warsaw University of Technology
Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, University of Warsaw*

APPLICATIONS OF THE THERMOELASTICITY WITH MICROLOCAL PARAMETERS IN CERTAIN THREE-DIMENSIONAL INTERFACE CRACK AND RIGID INCLUSION PROBLEMS IN COMPOSITES

1. The homogenized model of a microperiodic two-layered space. Let us consider a microperiodic laminated medium consisting of alternating layers of two homogeneous, isotropic and linear-elastic materials, characterized by the Lamé constants λ_l , μ_l , the thermal conductivities k_l , the coefficients of the volume expansion $\beta_l / (\lambda_l + \frac{2}{3}\mu_l)$ and the thicknesses δ_l ; here $l=1$ and $l=2$ refer to the sublayers denoted by 1 and 2, forming a thin repeated fundamental layer with the thickness $\delta = \delta_1 + \delta_2$ (see Figure).



Two-layered periodic space with an interface plane defect.

Referring to the Cartesian coordinate system (x_1, x_2, x_3) with the x_3 - axis normal to the layering, denote at point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ the displacement vector by $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, the stresses by $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ and the temperature (strictly speaking, the deviation of temperature from a reference state) by θ .

We use the specific method of homogenization called the linear thermoelasticity with microlocal parameters [8, 11] leading to the macro-homogeneous model of the treated body with the following approximations

$$\begin{aligned} u_i &\approx w_i, \quad u_{i,\alpha} \approx w_{i,\alpha}; \quad \theta \approx \vartheta, \quad \theta_{,\alpha} \approx \vartheta_{,\alpha}; \\ u_{i,3} &\approx w_{i,3} + h^{(l)} d_i; \quad \theta_{,3} \approx \vartheta_{,3} + h^{(l)} \Gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

Here the indices i, j run over 1, 2, 3 and are related to the Cartesian coordinates while the indices α, β run over 1, 2. Subscripts preceded by a comma indicate partial differentiation with respect to the corresponding coordinates. Moreover, w_i , ϑ and d_i , Γ are the unknown functions interpreted as the macrodisplacements, macrotemperature and microlocal parameters, respectively, and

$$\begin{aligned} h^{(l)} &= \begin{cases} 1 & \text{if } l = 1 \text{ (} \mathbf{x} \in 1^{\text{st}} \text{ layer),} \\ -\eta/(1-\eta) & \text{if } l = 2 \text{ (} \mathbf{x} \in 2^{\text{nd}} \text{ layer),} \end{cases} \\ \eta &= \delta_1/\delta \end{aligned} \quad (2)$$

is the derivative of the assumed δ - periodic, sectionally linear shape function.

The asymptotic approach to the macro-modelling of this laminated body leads to the governing relations of certain macro-homogeneous medium (homogenized model), given in terms of the macrotemperature ϑ and the macrodisplacements w_i (after eliminating all microlocal parameters and in the absence of heat sources and body forces) [3]:

$$\vartheta_{,\alpha\alpha} + k_0^{-2} \vartheta_{,33} = 0, \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) w_{\beta\beta\alpha} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) w_{\alpha\beta\beta} + c_{44} w_{\alpha,33} + (c_{13} + c_{44}) w_{3,3\alpha} &= K_1 \vartheta_{,\alpha}, \\ (c_{11} + c_{44}) w_{\alpha,\alpha 3} + c_{44} w_{3,\alpha\alpha} + c_{33} w_{3,33} &= K_3 \vartheta_{,3}. \end{aligned} \quad (3b)$$

The components of stress tensor $\sigma_{ij}^{(l)}$ and heat density vector $\mathbf{q}^{(l)}$ are expressed as follows

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3} &= c_{44} (w_{\alpha,3} + w_{3,\alpha}), \quad \sigma_{33} = c_{13} w_{\alpha,\alpha} + c_{33} w_{3,3} - K_3 \vartheta, \\ \sigma_{12}^{(l)} &= \mu_l (w_{1,2} + w_{2,1}), \\ \sigma_{11}^{(l)} &= d_{11}^{(l)} w_{1,1} + d_{12}^{(l)} w_{2,2} + d_{13}^{(l)} w_{3,3} - K_2^{(l)} \vartheta, \\ \sigma_{22}^{(l)} &= d_{12}^{(l)} w_{1,1} + d_{11}^{(l)} w_{2,2} + d_{13}^{(l)} w_{3,3} - K_2^{(l)} \vartheta, \\ \mathbf{q}_\alpha^{(l)} &= -k_l \vartheta_{,\alpha}, \quad q_3 = -K \vartheta_{,3}. \end{aligned} \quad (4)$$

The positive coefficients appearing in Eqs. (3, 4), describing the material and geometric properties of the composite constituents, are given in the Appendix. Note that the condition of ideal contact between the layers is satisfied. By assuming $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ and $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $k_1 = k_2 = k$ we get $c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu$, $c_{12} = c_{13} = \lambda$, $c_{44} = \mu$, $K_1 = K_3 = \beta$, $K = k$, $k_0 = 1$, passing directly to the well-known equations of uncoupled thermoelasticity for a homogeneous isotropic body [9].

According to the results given in [3], the general solution of the governing equations (3) is dependent on the material constants of the sublayers and

in the general case $\mu_1 \neq \mu_2$, $t_\alpha \neq k_0$ (the other cases are detailed in [3, 4]; all constants appearing are given in the Appendix) may be expressed in terms of three harmonic potentials $\phi_i(x_1, x_2, z_i)$, $z_i = t_i x_3$ and the temperature harmonic potential $\omega(x_1, x_2, z_0)$, $z_0 = k_0 x_3$ related to the solution of (3a) as follows

$$\begin{aligned} w_1 &= (\phi_1 + \phi_2 + c_1 \omega)_{,1} - \phi_{3,2}, \quad w_2 = (\phi_1 + \phi_2 + c_1 \omega)_{,2} + \phi_{3,1}, \\ w_3 &= m_\alpha t_\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial z_\alpha} - c_2 k_0 \frac{\partial \omega}{\partial z_0}. \end{aligned} \quad (5)$$

From the constitutive relations (4) we obtain

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= c_{44} \left[(1 + m_\alpha) t_\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial z_\alpha} + (c_1 - c_2) k_0 \frac{\partial \omega}{\partial z_0} \right]_{,1} - t_3 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z_3 \partial x_2}, \\ \sigma_{32} &= c_{44} \left[(1 + m_\alpha) t_\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial z_\alpha} + (c_1 - c_2) k_0 \frac{\partial \omega}{\partial z_0} \right]_{,2} + t_3 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z_3 \partial x_1}, \\ \sigma_{33} &= c_{44} \left[(1 + m_\alpha) \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial z_\alpha} + \alpha_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

For the purpose of further discussion the remaining stresses $\sigma_{\alpha\beta}^{(l)}$ are not of immediate interest.

2. Interface problem formulation and solution. We are interested in the problem of determining the temperature, heat flux, stress and displacement fields in a bimaterial periodically layered space weakened by a crack (denoted by C) or a rigid sheet-like inclusion (denoted by I) occupying an area S (with a smooth boundary) of the $x_1 x_2$ - plane being one of the interface of materials (see Figure).

Owing to a complicated geometry of the body and complex boundary conditions, the closed solution of the problem under study cannot be obtained. Thus we apply the homogenized model presented in Section 1 to seek an approximate solution and within this model we are faced with the boundary-value problem: find the scalar functions ϑ and w_i suitable smooth on $R^3 - S$ such that Eqs (3) hold and satisfy on S the following global conditions - stress-free faces for crack C or displacement-free faces for inclusion I:

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{for } C, \quad w_1 = w_2 = w_3 = 0 \quad \text{for } I. \quad (7)$$

Moreover, certain conditions resulting from a given external loading (thermal and mechanical) have to be specified.

The procedure for obtaining the solution follows along the same line of reasoning as that used in classical theory of thermal stresses applied to crack (inclusion) problem [1, 6, 7]. The steady-state temperature field is first seeking and a knowledge of potential ω is required to determine the induced thermal stresses by using the displacement representation given by (5). Upon utilizing the appropriate boundary conditions on the region S and using the superposition principle, we focus attention at the non-trivial perturbed problem solu-

tion to which tends to zero at infinity and satisfies the necessary boundary condition resulting from the prescribed temperature $T^{(0)}$ (or temperature gradient $q^{(0)}$) and the known stresses $\sigma_{3i}^{(0)}$ and displacements $w_i^{(0)}$, generated at the prospective crack (inclusion) faces in the multilayered space in the absence of the defect with the applied external loads. Proceeding as in the homogeneous case (cf. [7, 10]) it is convenient to resolve the general problem into the symmetric part (denoted by A) and the skew-symmetric problem (denoted by B) related to the half-space $x_3 \geq 0$ with the following thermal and mechanical boundary conditions

$$\begin{aligned}
 A: \quad & \begin{cases} \vartheta|_S = T^{(0)} \\ \vartheta_{,3}|(Z-S) = 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \vartheta_{,3}|_S = q^{(0)} \\ \vartheta_{,3}|(Z-S) = 0 \end{cases}; \\
 & \text{for C: } \begin{cases} \sigma_{31}|Z=0, \quad \sigma_{32}|Z=0, \\ \sigma_{33}|S = -\sigma_{33}^{(0)}, \\ w_3|(Z-S) = 0, \end{cases} \quad \text{for I: } \begin{cases} w_1|Z=0, \quad w_2|Z=0, \\ w_3|S = -w_3^{(0)}, \\ \sigma_{33}|(Z-S) = 0, \end{cases} \\
 B: \quad & \begin{cases} \vartheta_{,3}|_S = q^{(0)}, \\ \vartheta|(Z-S) = 0, \end{cases}; \quad \text{for C: } \begin{cases} \sigma_{33}|Z=0 \\ \sigma_{3\alpha}|S = -\sigma_{3\alpha}^{(0)}, \\ w_\alpha|(Z-S) = 0, \end{cases} \quad \text{for I: } \begin{cases} w_3|Z=0, \\ w_\alpha|S = -w_\alpha^{(0)}, \\ \sigma_{3\alpha}|(Z-S) = 0, \end{cases} \quad (8)
 \end{aligned}$$

where Z denotes the entire x_1x_2 - plane.

The thermoelastic problem is now reducing to its mechanical counterpart by constructing the potential functions well suited to the above boundary conditions. Only the results for the symmetric problem A will be presented (a complete analysis is given in [3, 4]).

An appropriate displacement crack (rigid inclusion) representation in terms of a single harmonic function $f^C(f^I)$, is obtained by taking in (5):

$$\begin{aligned}
 \phi_\alpha^C &= (-1)^\alpha [(1 + m_\alpha)t_\alpha]^{-1} [f^C + a_\alpha t_\alpha \omega], \\
 \phi_\alpha^I &= (-1)^\alpha [f^I + b_\alpha \omega], \quad \phi_3^{C \text{ or } I} = 0. \quad (9)
 \end{aligned}$$

The constants a_α, b_α can be chosen (see the Appendix) so as to reduce the crack (inclusion) problem to the classical mixed problems of potential theory (see [7]) for finding the functions $f^C(f^I)$ as follows

$$\begin{aligned}
 f_{,33}^C|_{x_3=0^+} &= -\frac{t_1 t_2}{c_{44} t_-} \left[(a_2 - a_1 + \alpha_0) \left(\vartheta|_{x_3=0^+} \right) - \sigma_{33}^{(0)} \right], \quad f_{,3}^C|_{x_3=0^+}^{Z-S} = 0; \\
 f_{,3}^I|_{x_3=0^+} &= -\frac{(m_2 t_2 b_2 - m_1 t_1 b_1 - c_2 k_0) \left(\omega_{,3}|_{x_3=0^+} \right) + w_3^{(0)}}{m_2 t_2 - m_1 t_1}, \quad f_{,33}^I|_{x_3=0^+}^{Z-S} = 0. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Explicit solutions of resulting potential problems are possible to obtain only for elliptical shape of surface of separation S. Similarly to the plane problems [2, 5], stress intensification in the close neighborhood of the crack (rigid inclusion) border is measured by the stress intensity factors. For instan-

ce, for a stress-free penny-shaped crack $S = \{(x_1, x_2, 0) : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2 \leq a^2\}$ the stress intensity factor in the symmetric system is given by (see [3])

$$k_1 = \lim_{r \rightarrow a^+} [2(r-a)]^{1/2} \sigma_{33}(r, 0) = -2(a_2 - a_1 + \alpha_0) c_{44} \pi^{-1} a^{-1/2} \int_0^a r T^{(0)}(r) / \sqrt{a^2 - r^2} dr$$

$$\text{or } k_0^{-1} (a_2 - a_1 + \alpha_0) c_{44} a^{-1/2} \int_0^a r q^{(0)}(r) dr. \quad (11)$$

3. Concluding remarks. In this contribution, the homogenized model with microlocal parameters of two-layered periodic space is applied analyze three-dimensional problems of thermal stresses around interface crack or rigid sheet-like inclusion. Within the framework of this model, the thermoelastic problems are reduced to the corresponding ordinary problems dealing with mechanical loading in homogeneous isothermal elasticity. Formulation in terms of integral equations for an arbitrary shaped rigid inclusion is given in [4].

Appendix

1. Denoting by $B_l = \lambda_l + 2\mu_l$ ($l = 1, 2$), $\eta = \delta_1/\delta$, $\bar{B} = (1 - \eta)B_1 + \eta B_2$, $\bar{K} = (1 - \eta)k_1 + \eta k_2$, the positive coefficients in Eqs. (3a), (3b), (4) are given by the following formulae:

$$k_0 = [(\eta k_1 \bar{K} + (1 - \eta) k_2 \bar{K}) / k_1 k_2]^{1/2}, \quad c_{33} = B_1 B_2 / \bar{B},$$

$$c_{11} = c_{33} + \frac{4\eta(1 - \eta)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2)}{\bar{B}},$$

$$c_{12} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 + 2[\eta \mu_2 + (1 - \eta) \mu_1][\eta \lambda_1 + (1 - \eta) \lambda_2]}{\bar{B}},$$

$$c_{13} = \frac{(1 - \eta) \lambda_2 B_1 + \eta \lambda_1 B_2}{\bar{B}}, \quad c_{44} = \frac{\mu_1 \mu_2}{(1 - \eta) \mu_1 + \eta \mu_2},$$

$$K_1 = [\eta \beta_1 \lambda_2 + (1 - \eta) \beta_2 \lambda_1] / \bar{B} + 2[(1 - \eta) \mu_1 + \eta \mu_2][\eta \beta_1 + (1 - \eta) \beta_2] / \bar{B},$$

$$K_3 = [(1 - \eta) \beta_2 B_1 + \eta \beta_1 B_2] / \bar{B}, \quad K = k_1 k_2 / \bar{K}, \quad K_2^{(l)} = (2\mu_l \beta_l + \lambda_l K_3) / B_l,$$

$$d_{11}^{(l)} = [4\mu_l (\lambda_l + \mu_l) + \lambda_l c_{13}] / B_l, \quad d_{12}^{(l)} = (2\mu_l \lambda_l + \lambda_l c_{13}) / B_l, \quad d_{13}^{(l)} = \lambda_l c_{33} / B_l.$$

2. The constants in Eqs. (6), (9), (10), (11) are defined as

$$t_3 = [(1 - \eta) \mu_1 + \eta \mu_2]^{1/2} (c_{44})^{-1/2}; \quad m_\alpha = (c_{11} + t_\alpha^{-2} - c_{44}) / (c_{13} + c_{44});$$

$$t_1 = (t_+ - t_-) / 2, \quad t_2 = (t_+ + t_-) / 2$$

$$\text{provided } t_\pm = [(A_\pm \pm 2c_{44}) A_\mp / c_{33} c_{44}]^{1/2}, \quad A_\pm = (c_{11} c_{33})^{1/2} \pm c_{13},$$

$$c_1 = \frac{k_0^2 [(c_{13} + c_{44}) K_3 - c_{33} K_1] + c_{44} K_1}{c_{33} c_{44} (k_0^2 - t_1^2) (k_0^2 - t_2^2)},$$

$$c_2 = \frac{k_0 [(c_{13} + c_{44}) K_3 - c_{11} K_3 + k_0^2 c_{44} K_3]}{c_{33} c_{44} (k_0^2 - t_1^2) (k_0^2 - t_2^2)},$$

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= (-c_1 c_{13} - c_2 c_{33} k_0^2 + K_3)/c_{44}; \\ a_1 &= [k_0 (1 + m_1)(c_1 m_2 + c_2)]/t_1 (m_2 - m_1), \\ a_2 &= [k_0 (1 + m_2)(c_1 m_1 + c_2)]/t_2 (m_2 - m_1); \\ b_1 &= [c_1 (1 + m_2) - \alpha_0]/(m_2 - m_1), \\ b_2 &= [c_1 (1 + m_1) - \alpha_0]/(m_2 - m_1).\end{aligned}$$

1. Andreikiv A. E. Three-dimensional problems of crack theory - Kiev: Naukova Dumka, 1982. - 348 p. (in Russian).
2. Yevtushenko A. A., Kaczyński A., Matysiak S. J. The stressed state of laminated elastic composite with a thin linear inclusion. // J. Appl. Maths. Mechs. - 1995. - 25. - P. 671-676.
3. Kaczyński A. Three-dimensional thermoelastic problems of interface cracks in periodic two-layered composites // Eng. Fracture Mech. - 1994. - 48. - P. 783-800.
4. Kaczyński A. Rigid sheet-like interface inclusion in an infinite bimaterial periodically layered composite // J. Theor. Appl. Mech. - 1999. - 37. - P. 81-94.
5. Kaczyński A., Matysiak S. J. Thermal stresses in a bimaterial periodically layered composite due to the presence of interface cracks or rigid inclusions // J. Theor. Appl. Mech. - 1998. - 36. - P. 231-239.
6. Kassir M. K., Sih C. C. Some three-dimensional inclusion problems in elasticity // Int. J. Solids and Struct. - 1968. - No. 4. - P. 225-241.
7. Kassir M. K., Sih C. C. Three-dimensional crack problems. Mechanics of fracture 2. - Leyden: Noordhoff Int. Publ, 1975. - 452 p.
8. Matysiak S. J., Woźniak Cz. On the microlocal modelling of thermoelastic periodic composites // J. Tech. Phys. - 1988. - 29. - P. 85-97.
9. Nowacki W. Thermoelasticity - PWN Warsaw and Pergamon Press Oxford, 1986. - 566 p.
10. Silovanyuk V. P. Rigid lamellate inclusion in elastic space // Fiz. Chem. Mech. Mat. - 1984. - No. 5. - P. 80-84. (in Russian)
11. Woźniak Cz. A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composites // Int. J. Engng. Sci. - 1987. - No. 5. - P. 483-499.

Андрій Качинський, Станіслав Матисяк

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОСТІ З МІКРОЛОКАЛЬНИМИ ПАРАМЕТРАМИ ДО ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ЩОДО ТРІЩИН І ЖОРСТКИХ ВКЛЮЧЕНЬ У КОМПОЗИТАХ

Подано розв'язки деяких стаціонарних просторових задач для щілин і включень у мікроперіодичних шаруватих композитах. Розв'язки будують з використанням апарату теорії термопружності з мікролокальними параметрами.

Стаття надійшла до редколегії 09.09.99

УДК 539.3

Михайло Делявський¹, Віктор Опанасович², Адам Подхорецькі¹

¹Академія Технічно-Рільнича ім. Я. і А. Снядецьких, Бидгощ

²Львівський національний університет ім. І. Франка

МІЦНІСТЬ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРІДНОГО МАТЕРІАЛУ ЗІ СТОХАСТИЧНО РОЗПОДІЛЕНИМИ НЕІДЕАЛЬНО ГОСТРИМИ ТРІЩИНАМИ

Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку, послаблену криволінійним дефектом з малим, ненульовим радіусом кривини у вершинах. Такі дефекти можна трактувати як неідеально гострі тріщини. Назвемо їх тріщиноподібними дефектами. Введемо декартову систему координат xOy з початком у геометричному центрі дефекту та віссю Ox , проведеною через одну з його вершин z_{0j} ($j = 1, 2$). Контур дефекту незавантажений, а на безмежності діють постійні взаємоперпендикулярні розтягувальні зусилля p і q . Компоненти вектора переміщень u_x, u_y для такої пластини визначаються в афінній площині $z = \omega(\xi)$ через комплексні потенціали Колосова – Мусхелішвілі $\phi(\xi), \psi(\xi)$ так [5]:

$$u_x + iu_y = \kappa \phi(\xi) - \omega(\xi) \frac{\overline{\phi'(\xi)}}{\omega'(\xi)} + \phi(1/\xi) + \frac{\omega(1/\xi)}{\omega'(\xi)} \overline{\phi'(\xi)}, \quad (1)$$

де κ – стала Мусхелішвілі; $\omega(\xi)$ – відображувальна функція. Щоб одержати асимптотичну формулу розподілу напружень в околі j -ї вершини тріщиноподібного дефекту, перейдемо до локальної системи координат $r, \theta^{(j)}$ згідно з

$$z = z_{0j} + z_j e^{i\tau_j} = \omega[\xi_{0j} + \xi_j e^{i\tau_j}], \quad (2)$$

де ξ_{0j} – точки одиничного кола в площині ξ , які відповідають вершинам z_{0j} дефекту в площині z ; τ_j – кут між j -вершиною дефекту і віссю Ox . Розкладемо всі функції, що входять у формули (1), (2), в ряди Тейлора в околі точки ξ_{0j} .

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= \phi(\xi_{0j}) + \phi'(\xi_{0j})\xi_j e^{i\tau_j} + \frac{1}{2!}\phi''(\xi_{0j})\xi_j^2 e^{2i\tau_j} + \frac{1}{3!}\phi'''(\xi_{0j})\xi_j^3 e^{3i\tau_j} + \dots, \\ \omega(\xi) &= \omega(\xi_{0j}) + \omega'(\xi_{0j})\xi_j e^{i\tau_j} + \frac{1}{2!}\omega''(\xi_{0j})\xi_j^2 e^{2i\tau_j} + \frac{1}{3!}\omega'''(\xi_{0j})\xi_j^3 e^{3i\tau_j} + \dots, \\ \omega'(\xi) &= \omega'(\xi_{0j}) + \omega''(\xi_{0j})\xi_j e^{i\tau_j} + \frac{1}{2!}\omega'''(\xi_{0j})\xi_j^2 e^{2i\tau_j} + \dots, \\ \phi(\xi^{-1}) &= \phi(\xi_{0j}) + \frac{1}{2!}\phi'(\xi_{0j})[\bar{\xi}^{-1} - \xi_{0j}] + \frac{1}{2!}\phi''(\xi_{0j})[\bar{\xi}^{-1} - \xi_{0j}]^2 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Оскільки вершини дефекту заокруглені, то значення першої похідної від відображувальної функції у вершині не дорівнює нулю $[\omega'(\xi_{0j}) \neq 0]$. Ця умова суттєво відрізняє розглядуваний підхід від відомих підходів класичної механіки руйнування, де виконання умови рівності нулю першої похід-

ної від відображувальної функції є необхідним, оскільки забезпечує наявність на контурі дефекту точок звороту (мікротріщин). Вирази в квадратних дужках у співвідношеннях (4) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} - \xi_{0j} &= -\frac{\xi_{0j} \bar{\xi}_j e^{-i\gamma_j}}{\xi_{0j}} \left[1 - \xi_{0j} \bar{\xi}_j e^{-i\gamma_j} \right] + \dots; \\ \left[\frac{1}{\xi} - \xi_{0j} \right]^2 &= \frac{\xi_{0j}^2 \bar{\xi}_j^2 e^{-2i\gamma_j}}{\xi_{0j}^2} \left[1 - 2\xi_{0j} \bar{\xi}_j e^{-i\gamma_j} \right] + \dots, \quad \left[\frac{1}{\xi} - \xi_{0j} \right]^3 = -\frac{\xi_{0j}^3 \bar{\xi}_j^3}{\xi_{0j}^3} e^{-3i\gamma_j} + \dots \quad (4) \end{aligned}$$

Оскільки розподіл напружень біля кожної вершини дефекту описується у фізичній площині z , то необхідно з'ясувати зв'язок між локальними змінними z_j і ξ_j . Виберемо першу вершину дефекту ($\tau_1 = 0$). Враховуючи співвідношення (3) одержуємо квадратне рівняння

$$z_1 = z - z_{01} = [\omega(\xi) - \omega(\xi_{01})] = \omega'(\xi_{01})\xi_1 + \omega''(\xi_{01})\xi_1^2 / 2 + \dots, \quad (5)$$

з розв'язку якого виведемо співвідношення, що зв'язує змінні ξ_1 і z_1

$$\xi_1 = -\frac{\omega'(\xi_{01})}{\omega''(\xi_{01})} + \sqrt{\frac{2z_1}{\omega''(\xi_{01})} + \left[\frac{\omega'(\xi_{01})}{\omega''(\xi_{01})} \right]^2}. \quad (6)$$

Увівши позначення

$$Z_1 = z_1 + \frac{\omega'(\xi_{01})^2}{2\omega''(\xi_{01})}, \quad (7)$$

зобразимо співвідношення (6) у вигляді

$$\xi_1 = -\frac{\omega'(\xi_{01})}{\omega''(\xi_{01})} + \sqrt{\frac{2Z_1}{\omega''(\xi_{01})}}. \quad (8)$$

Якщо радіус кривини у вершині дефекту $\rho < 10^{-2}l$, то його з точністю до 5% можна визначати так [2]:

$$\rho = \frac{\omega'^2(\xi_{01})}{\omega''(\xi_{01})}. \quad (9)$$

Тоді співвідношення (7) набуває вигляду $2Z_1 = \rho + 2z_1 = \rho + 2r \exp(i\theta_j)$. Підставляючи розклади (3), (4) у формулу (1) і враховуючи співвідношення (9), знаходимо [4] розподіли складових вектора переміщень в околі вершини розглядуваного дефекту:

$$u_x + iu_y = -(K_I^* - iK_{II}^*)(-\kappa\sqrt{2Z_1} + \sqrt{2Z_1}) + \frac{1}{2}(K_I^* + iK_{II}^*)(2Z_1/\sqrt{2Z_1} - \sqrt{2Z_1}). \quad (10)$$

В узагальнених полярних координатах $r_* = |Z_1|$, $\theta_* = \arg Z_1$ співвідношення (10) збігаються з відомими асимптотичними формулами для тріщини нульової ширини; K_I^*, K_{II}^* – узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень:

$$K_I^* - iK_{II}^* = 2 \frac{\omega'(\xi_{01})}{\sqrt{\omega''(\xi_{01})}} - \frac{\omega'(\xi_{01})}{\sqrt{\omega''(\xi_{01})}} \frac{\omega''(\xi_{01})}{\omega''(\xi_{01})} \quad (11)$$

Складові тензора напружень знаходимо на основі закону Гука:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{4G(1-\mu)}{1-2\mu} \operatorname{Re} \frac{d}{dz} (u_x - iu_y); \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = -4G \frac{d}{dz} (u_x - iu_y), \quad (12)$$

$$\text{де } \frac{d}{dz} = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} - i \frac{d}{dy} \right) \quad (13)$$

У результаті одержуємо

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= \frac{-4G(1-\mu)}{1-2\mu} \operatorname{Re} \left\{ \frac{K_I^* - iK_{II}^*}{\sqrt{2Z_1}} - \frac{K_I^* + iK_{II}^*}{\sqrt{2Z_1}} \frac{Z_1}{Z_1} \right\} + O(1), \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} &= 2G \left[-\kappa \frac{K_I^* - iK_{II}^*}{\sqrt{2Z_1}} + (K_I^* + iK_{II}^*) \left(\frac{1}{\sqrt{2Z_1}} - \frac{1}{2\sqrt{2Z_1}} \right) \right] + O(1). \end{aligned} \quad (14)$$

Тут G – модуль зсуву; μ – коефіцієнт Пуассона матеріалу. Структура співвідношень (14) не залежить від конфігурації дефекту і величини зовнішнього навантаження. Ці характеристики враховані в узагальнених коефіцієнтах інтенсивності напружень (11).

Розглянемо для прикладу дефект у вигляді тонкого еліптичного надрізу з півосями l, b . Для такого дефекту маємо

$$\varphi(\xi) = R(\Gamma\xi + C\xi^{-1}); \quad \omega(\xi) = R(\Gamma\xi + m\xi^{-1}), \quad (15)$$

де $C = -(\Gamma' + m\Gamma)$; $R = (l+b)/2$ – масштабний множник; $m = (l-b)/(l+b)$ – параметр еліптичності; Γ і Γ' – сталі, що визначають напружений стан пластини на безмежності:

$$\Gamma = \frac{(1+\eta)}{4} p, \quad \Gamma' = -\frac{(1-\eta)\exp(-2i\alpha)}{2} p; \quad \eta = q/p. \quad (16)$$

Підставляючи функції (13) у формули (11), при $\xi_{01} = 1$, отримуємо

$$K_I^* - iK_{II}^* = \sqrt{\frac{R}{2m}} \left[(\Gamma - C) - \frac{1-m}{m} C \right] \quad (17)$$

Звідси, враховуючи значення параметрів R, m, C , знаходимо

$$\begin{aligned} K_I^* - iK_{II}^* &= \sqrt{a} [2\Gamma k - \Gamma' k' e^{-2i\alpha}], \\ k &= \sqrt{\frac{1+\xi}{m}}; \quad k' = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{1+\xi}{m}}; \quad m = \frac{1-\xi}{1+\xi}; \quad \xi = \frac{l}{b}; \quad 0 \leq \xi \leq 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Після розділення дійсної та уявної частин одержуємо

$$K_I^* = \frac{p\sqrt{a}}{2} [(1+\eta)k - (1-\eta)k' \cos 2\alpha]; \quad K_{II}^* = \frac{p\sqrt{a}}{2} (1-\eta)k' \sin 2\alpha. \quad (19)$$

Із співвідношень (19) бачимо, що узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень K_I^*, K_{II}^* можна трактувати як коефіцієнти інтенсивності біля вершини тріщини у пластині під дією деякого приведенного навантаження $\tilde{p}, \tilde{q}$. Справді, ввівши позначення

$$k\Gamma = \tilde{\Gamma} = \frac{(1+\tilde{\eta})}{4} \tilde{p}, \quad k'\Gamma' = \tilde{\Gamma}' = -\frac{(1-\tilde{\eta})\exp(2i\alpha)}{2}, \quad (20)$$

подамо співвідношення (18) у вигляді

$$K_I^* = \frac{\tilde{p}\sqrt{a}}{2} [(1 + \tilde{\eta}) - (1 - \tilde{\eta}) \cos 2\alpha]; \quad K_{II}^* = \frac{\tilde{p}\sqrt{a}}{2} (1 - \tilde{\eta}) \sin 2\alpha, \quad (21)$$

що відповідає випадку тріщини нульової ширини в безмежній пластині під дією зусиль $\tilde{p}, \tilde{q}$ [1]. Ці зусилля визначаємо зі співвідношень (17)

$$\tilde{p} = \frac{1}{2} [(1 + \eta)k + (1 - \eta)k']p; \quad \tilde{\eta} = \frac{(1 + \eta)k - (1 - \eta)k'}{(1 + \eta)k + (1 - \eta)k'}. \quad (22)$$

Отже, маємо аналогію: узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень біля тріщиноподібного дефекту в ізотропній пластині під дією зовнішніх навантажень p і η дорівнюють коефіцієнтам інтенсивності напружень для тріщини тієї ж довжини в пластині під дією навантажень $\tilde{p}, \tilde{q}$. Оскільки коефіцієнти k і k' є монотонно зростаючі функції параметра ξ (для всіх $\xi > 0$), то $\tilde{p}$ буде більше p , якщо $\eta < 1$, а також при $\eta > 1$, якщо $\frac{k}{k'} > \frac{1 - \eta}{1 + \eta}$.

Для коефіцієнта інтенсивності напружень K_I^* біля вершини заокругленого дефекту справджуються протилежні умови: $K_I^* > K_I^{cr}$ при $\eta > 1$, а також при $\eta < 1$ якщо $\frac{k}{k'} > \frac{(1 - \eta) \cos 2\alpha}{1 + \eta}$.

Нехай розглядувана пластина містить систему стохастично розподілених тріщиноподібних дефектів.

Виділимо біля вершини дефекту окіл $r < \rho$ і розглянемо розподіл напружень за межами цього околу, тобто в області $r > \rho$. Розподіл напружень у цій області за структурою збігається з відомим розподілом напружень біля вершини тріщини нульової ширини. Приймемо, що в області $0 \leq r \leq \rho$ відбувається локальне руйнування матеріалу, якщо на відстані $r = \rho$ від вершини тріщини виконується умова

$$\sqrt{\rho} \sigma_\beta(r, \alpha, \beta_*)|_{r=\rho} = \sigma_0, \quad (23)$$

де σ_0 – опір матеріалу локальному руйнуванню; β_* – напрям початкового поширення тріщини. Оскільки розглядаються дефекти з малим радіусом кривини у вершинах ($\rho/l < 10^{-2}$), то величинами порядку $\sqrt{\rho} O(1)$ у формулі (19) нехтуємо порівняно з першим доданком. Вважаємо, для спрощення, що локальне руйнування відбувається в площині первинної тріщини ($\beta_* = \alpha$). Тоді на підставі співвідношень (18) і критерію (21) одержуємо формулу для знаходження величини критичного навантаження, що спричиняє локальне руйнування матеріалу зі щілиноподібним дефектом:

$$p_* = \frac{\sigma_0}{\sqrt{l} \Psi(\rho, \alpha)}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad \Psi(\rho, \alpha) = & \frac{1}{8\sqrt{2}} \{ [(1 + \eta)k - (1 - \eta)k' \cos 2\alpha] (3 \cos \alpha/2) + \cos 3\alpha/2 \\ & - 3(1 - \eta)k' \sin 2\alpha (\sin \alpha/2 + \sin 3\alpha/2) \}. \end{aligned} \quad (25)$$

Звідси одержуємо значення випадкової довжини l :

$$l = \frac{\sigma_0^2}{p_*^2 \Psi^2(\rho, \alpha)}; \quad l_1 \leq l \leq l_2. \quad (26)$$

Приймаючи, що випадкова довжина l дефекту і його випадкова орієнтація α є незалежними величинами і використовуючи результати праці [3], отримуємо формулу для визначення ймовірності руйнування пластини з n дефектами:

$$F_n(\eta, p_*) = 1 - \left[1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_{-1}^1 \frac{(s-1)a^{s-1}}{(l+a)^s} dl d\alpha \right]^n, \quad s > 1, a > 0. \quad (27)$$

Середнє значення величини руйнівного навантаження визначається так:

$$\langle p \rangle = p_{\min} + \int_{p_{\min}(\eta)}^{p_{\max}(\eta)} F_n(p, \eta) dp. \quad (28)$$

Оцінка ймовірності руйнування пластини зі стохастично розподіленими дефектами на основі одержаної аналогії та результатів монографії [3] свідчить про те, що за умови ($\bar{p} > p$, $\eta < 1$) ймовірність руйнування такої пластини є меншою, ніж ймовірність руйнування пластини зі системою тріщин довільної довжини та орієнтації.

1. Бережницький Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. — К.: Наук. думка, 1979. — 400 с.
2. Бережницький Л. Т., Качур П. С., Мазурак Л. П. До теорії концентраторів напружень із заокругленими вершинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1989. — № 5. — С. 28–41.
3. Витвицкий П. М., Попина С. Ю. Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел. — К.: Наук. думка. — 1980. — 186 с.
4. Делявский М. В. О напряженно-деформируемом состоянии пластины, ослабленной сквозным дефектом с малым радиусом кривизны в вершине // Физ. - хим. механика материалов. — 1983. — № 1. — С. 106–108.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 708 с.

Mykhailo Delyavsky, Victor Opanasovych, Adam Podhorecki

THE STRENGTH OF STUCTURALLY-NONHOMOGENEOUS MATERIAL WITH THE STOCHASTICALLY DISTRIBUTED IMPERFECTLY SHARP CRACKS

The approach to the determination of the asymptotical stresses and displacements fields in an isotropic material with curvilinear hole with small curvature at tips is proposed. The analogy between SIF for cracks and imperfectly sharp defects is developed. Basing on this the calculation of the critical load for material with stochastically distributed defects is performed.

Стаття надійшла до редколегії 16.05.99

УДК 539.4.013; 620.171.5

Юрій Сорокати́й

Бережанський агротехнічний коледж
Національного аграрного університету

ОПТИЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПОЧАТКОВОГО ШЛЯХУ ПОШИРЕННЯ ТРІЩИНИ

Відомо [2], що плоский напружений стан в околі вістря тріщини описується у вигляді

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix} = \frac{K_1}{4\sqrt{2r}} \begin{pmatrix} 5 \cos \theta_1 - \cos \theta_3 \\ 3 \cos \theta_1 + \cos \theta_3 \\ \sin \theta_1 + \sin \theta_3 \end{pmatrix} + \frac{K_2}{4\sqrt{2r}} \begin{pmatrix} -5 \sin \theta_1 + 3 \sin \theta_3 \\ -3 \sin \theta_1 - 3 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_1 + 3 \cos \theta_3 \end{pmatrix} + \\ + \sigma(1-m) \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos^2 \theta \\ \cos 2\alpha \sin \theta \\ -0.5 \cos 2\alpha \sin 2\theta \end{pmatrix} + O(\sqrt{r}), \quad (1)$$

де $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень у полярній системі координат; $K_1 = \sigma\sqrt{l}(\sin^2 \alpha + m \cos^2 \alpha)$, $K_2 = \sigma\sqrt{l}(1-m)\sin \alpha \cos \alpha$ – коефіцієнти інтенсивності напружень; r, θ – полярні координати з полюсом у вістрі тріщини;

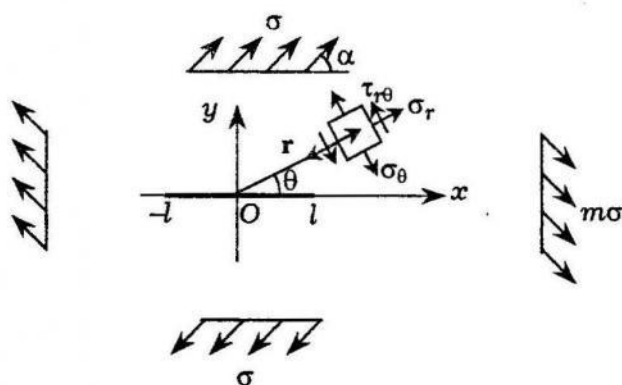
$2l$ – довжина тріщини; $\theta_n = n\theta/2$;

$\sigma, m\sigma$ – напруження на безмежності, що діють під кутом α до осі тріщини (див. рис.).

У праці [2] запропоновано визначати початковий кут поширення тріщини за умови, що

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right\}_{\theta=\theta^*} = 0. \quad (2)$$

Cotterell [6, 7] зазначив на відомий в інженерії факт впливу постійного нормального напруження,



Тріщина у полі всестороннього розтягу.

що діє вздовж осі тріщини і не змінює значення коефіцієнтів інтенсивності напружень, на напрям початкового шляху поширення тріщини. Kibler, Roberts [11] експериментально дослідили вплив двовісності навантаження на кут початкового руйнування. Виявилось, що подекуди рівняння (2) не відображає реальної картини руйнування. Автори дослідження [8] припустили, що у деякому околі вістря тріщини $r < r_c$ при зовнішньому навантаженні відбуваються нелінійні фізичні процеси (з'являються мікротріщини, накопичуються дислокації тощо), які зумовлюють розвиток макротріщини.

Залишаючи відкритим питання про величину такої відстані r_c , вони запропонували визначати початковий кут поширення тріщини з умов:

$$\text{при } \theta = \theta^*, \quad r = r_c \quad \begin{cases} \sigma_\theta > 0, \\ \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} < 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (3,а) \\ (3,б) \\ (3,в) \end{matrix}$$

що дало змогу пояснити результати експериментальних досліджень. Ми запропонували простий метод визначення структурного параметра r_c [5].

Рівняння (3,б) з урахуванням асимптотик (1) можна записати у вигляді

$$k_1 \sin \theta^* + k_2 (3 \cos \theta^* - 1) - \frac{16}{3} (1 - m) \sqrt{2a} \cos 2\alpha \cos \theta^* \sin \frac{\theta^*}{2} = 0, \quad (4)$$

де $k_i = K_i / \sigma \sqrt{l}$, ($i = 1, 2$), $a = r/l$.

Зауважимо, що рівняння

$$\tau_{r\theta}|_{\theta=\theta_s} = 0 \quad (5)$$

з урахуванням асимптотичного розвинення (1) дає

$$k_1 \sin \theta_s + k_2 (3 \cos \theta_s - 1) - 4(1 - m) \sqrt{2a} \cos 2\alpha \cos \theta_s \sin \frac{\theta_s}{2} = 0. \quad (6)$$

У таблиці наведені найхарактерніші розв'язки рівнянь (4) і (6) при певних значеннях параметрів a , m і α . Корені цих рівнянь відрізняються не більше, ніж на 2.5%.

З іншого боку [1, 3], рівняння (5) визначає ізокліну (ізолінію однакової орієнтації площинок головних напружень), параметр якої θ_s , що має нахил (в малому околі вістря тріщини), до осі тріщини. Отже, якщо на окуляр аналізатора поляризаційної установки нанести лінію, що збігається з віссю тріщини, то синхронним обертанням аналізатора і поляризатора можна досягнути збігу на екрані нанесеної лінії і деякої ізокліни. Кут повороту при цьому і є кутом початкового шляху поширення тріщини. Автор праці [4] запропонував простий пристрій до серійного приладу КСП-7, що сприяє оперативному і точному визначенню кута поширення тріщини.

Для порівняння якості запропонованого методу в таблиці наведені результати розрахунків значень кута поширення тріщини θ_0 за рівнянням Kitagawa [12]:

$$2 \sin \theta_0 (1 - 3 \cos \theta_0) \operatorname{ctg} 2\theta_m - (1 + 3 \cos \theta_0 - 6 \cos^2 \theta_0) = 0, \quad (7)$$

де θ_m – кут нахилу петлі ізохром до осі тріщини [1, 10].

Результати розрахунків кутів поширення тріщини за запропонованою θ_s і відомими θ_k , θ_0 методиками при деяких значеннях параметрів a , m і α

m	$\alpha = 30^\circ$					
	a	θ^* , град	θ_s , град	θ_m , град	θ_k , град	θ_0 , град
0	0	-60.00	-60.00			
	0.002	-61.75	-61.41			
	0.020			-161.95	-71.95	-64.32 (18.03), (80.29)
				12.17	-77.83	-64.42 (12.17), (76.87)
	0.060			-163.17	-73.17	-61.98 (16.82), (79.55)
				5.96	-84.04	-67.56 (5.96), (73.55)
2	0	25.13	25.13			
	0.002	24.31	24.47			
	0.020			-65.02	24.98	24.87 (-57.38), (84.83)
				111.16	21.16	21.12 (-59.59), (82.25)
	0.060			-65.17	24.83	24.72 (-57.47), (84.73)
				108.26	18.26	18.23 (-61.20), (80.42)

Автори праці [14], враховуючи гіпотези мінімуму густини пружної енергії деформації [15], дійшли висновку, що кут поширення тріщини θ_k можна визначити зміною кута θ_m на 90° . Значення кутів θ_0 і θ_k ми розраховували з урахуванням скінченної відносної відстані a від вістря тріщини. Виявилось, що в окремих випадках двом традиційно вимірюваним кутам θ_m за зафіксованою картиною смуг відповідає до шести коренів рівняння (7), і потрібний можна вибрати лише інтуїтивно. Значення «зайвих» коренів θ_0 у таблиці наведені в дужках. Gdoutos [9] запропонував за напрям поширення тріщини вважати бісектрису кута, обмеженого двома напрямками кута Ірвіна θ_m , але ґрунтовний аналіз картин ізохром [13] свідчить про можливість існування трьох таких напрямів.

Загалом порівняння розрахункових даних і виконаний аналіз дають підстави вважати, що запропонований метод порівняно з відомими є точнішим, простішим і надійнішим. Очевидно, що у разі застосування методики фотопружних покриттів вимірювання можна виконувати безпосередньо на пошкоджених елементах інженерних конструкцій.

1. Гриліцький Д. В., Сорокати́й Ю. І. Механічні і оптичні методи дослідження напружено-деформованого стану тіл. – Львів: ЛДУ, 1984. – 60 с.
2. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1964. – 264 с.

3. Сорокатый Ю. И. Метод фотоупругого определения начального пути разрушения // Смешан. задачи механики деформируемого тела. – Днепропетровск: ДГУ, 1981. – 154 с.
4. Сорокатый Ю. И. Теоретико-экспериментальные исследования напряженного состояния упругих пластин с инородными тонкостенными включениями: Автореф. дис ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР. – Львов, 1985. – 17 с.
5. Сорокатый Ю. И., Налобин А. П. Фотоупругий метод исследования стабильности траектории распространения трещины нормального отрыва // Современ. пробл. теории контактных взаимодействий: Материалы выездного Научного Совета АН ССР по трению и смазкам. – Луцк, 1987. – С. 68–69.
6. Cotterell B. On brittle fracture paths // *Int. J. Fracture Mech.* – 1965. – 1, № 1. – P. 96–103.
7. Cotterell B. Notes on the parts and stability of cracks // *Int. J. Fracture Mech.* – 1966. – 2, № 3. – P. 526–533.
8. Eftis J., Subramonian N., Ziebowite H. Crack border stress and displacement equations revisited // *Eng. Fracture Mech.* – 1977. – 9, № 1. – P. 189–210.
9. Gdoutos E. E. A photoelastic prediction of the crack propagation angle // *J. Phys. E: Sci. Instrum.* – 1980. – 13, № 7. – P. 776–777.
10. Irwin G. R. Discussion and author's closure of the paper. «The dynamic stress distribution surrounding a running crack. – A photoelastic analysis» // *Proc. SESA.* – 1958. – 16, № 1. – P. 93–96.
11. Kibler J.J., Roberts R. The effect of biaxial stresses on fatigue and fracture // *Trans. ASME, Engng. Industry.* – 1970. – P. 727–734.
12. Kitagawa H., Kim S. – C. The photoelastic analysis of stress intensity factors of crack bodies and their fracture strength // *Хихакай кэнса, J. NDI.* – 1976. – 25, № 8. – P. 466–472.
13. Rossmann H. P. Analysis of mixed-mode isochromatic crack-tip fringe patterns // *Acta Mechanica.* – 1979. – 34, № 1–2. – P. 1–38.
14. Rouhi M. R., Evans W. T., Barr B. I. G. A photoelastic approach to fracture path predictions // *Int. J. Fracture.* – 1977. – 13, № 3. – P. 370–376.
15. Sih G. C. Experimental fracture mechanics: Strain energy density criterion // *Mechanics of fracture* / ed. by Sih G. C. – The Hague: Martinus Nijhoff Publ. – 1981. – 7. – P. XVII–LVI.

Yuriy Sorokatyy

OPTICAL METHODS FOR PREDICTION OF THE INITIAL CRACK EXTENSION

On the basis of photoelasticity the method of prediction the initial path of crack extension is devoted. Analysis of calculation the be-axial stresses surrounding of slanted crack shows us that the new method is more precision and simple.

Стаття надійшла до редколегії 14.07.99

УДК 539.3

Віктор Опанасович

Львівський національний університет ім. І. Франка

**ПРО КОМПЛЕКСНІ ПОТЕНЦІАЛИ АНТИПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ
ІЗОТРОПНОГО ТІЛА З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ
ПРЯМОЛІНІЙНИХ ТРІЩИН**

Дослідимо напружений стан тіла, що перебуває в умовах антипласкої деформації з періодичною системою колінеарних (випадок а) або паралельних не зсунутих (випадок б) прямолінійних тунельних тріщин завдовжки $2l$. Відстань між тріщинами позначимо через d . Оберемо декартову систему координат $Oxy\bar{z}$ з початком у центрі тріщини, з осями координат Ox і $O\bar{z}$, що лежать в її площині, причому $O\bar{z}$ напрямлена по її тунельній осі симетрії. Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене до берегів тріщин або ж на них задані переміщення. При цьому відомий головний вектор зусиль, прикладених до берегів тріщини. Припускаємо, що на нескінченності заданий однорідний напружений стан, причому розрізняємо нескінченності при $y \rightarrow \pm\infty$ і $x \rightarrow \pm\infty$ і маємо різні ситуації залежно від задачі а) чи задачі б). У задачі а) при $y \rightarrow \pm\infty$ компоненти тензора напружень $\tau_{y\bar{z}}^{+\infty}$ ($y \rightarrow +\infty$) і $\tau_{y\bar{z}}^{-\infty}$ ($y \rightarrow -\infty$) можуть різнитися між собою, якщо головний вектор сил, прикладених до берегів тріщини, не дорівнює нулю, а $\tau_{x\bar{z}}^{+\infty} = \tau_{x\bar{z}}^{-\infty} = \tau_{x\bar{z}}^{\infty}$. У задачі б) все навпаки, $\tau_{x\bar{z}}^{+\infty}$ і $\tau_{x\bar{z}}^{-\infty}$ можуть різнитися, а $\tau_{y\bar{z}}^{+\infty} = \tau_{y\bar{z}}^{-\infty} = \tau_{y\bar{z}}^{\infty}$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Потрібно знайти напружено-деформований стан тіла.

Введемо в розгляд комплексний потенціал $F(z)$ [1, 3]. Тоді компоненти тензора напружень $\tau_{x\bar{z}}, \tau_{y\bar{z}}$ і компоненту вектора переміщення w знайдемо за формулами

$$\tau_{x\bar{z}} - i\tau_{y\bar{z}} = F(z), \quad w(x, y) = \mu^{-1} \operatorname{Re}[f(z)], \quad (1)$$

де $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$, $f'(z) = F(z)$, μ – модуль зсуву.

Зауважимо, що розподіл напружень біля вершини неоднорідності наведено в статті [6] через коефіцієнти інтенсивності напружень: K_3^T для першої і K_3^G для другої основної задачі.

Розглянемо можливі випадки.

1. *Перша основна задача.* У цьому випадку згідно з постановкою задачі маємо такі граничні умови:

$$\tau_{y\bar{z}}^{\pm} = \tau^{\pm}(x), \quad |x| < l, \quad (2)$$

де $\tau^{\pm}(x)$ – відомі функції; тут і далі «+» і «-» позначені відповідні значення величин при $y \rightarrow \pm 0$.

Розглянемо спочатку випадок а).

Враховуючи (1), на основі (2) приходимо до крайових задач для визначення функції $F(x)$:

$$\begin{aligned} [F(x) + \bar{F}(x)]^+ - [F(x) + \bar{F}(x)]^- &= -4i\rho(x), & |x| < l, \\ [F(x) - \bar{F}(x)]^+ + [F(x) - \bar{F}(x)]^- &= -4i\tau(x), & |x| < l, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\rho(x) = 0.5(\tau^+(x) - \tau^-(x))$, $\tau(x) = 0.5(\tau^+(x) + \tau^-(x))$.

Використовуючи результати [4] та розв'язуючи задачі лінійного спряження (4), після перетворень одержуємо

$$F(z) = C + \frac{iY(z)}{2X(z)} - \frac{1}{d} \int_{-l}^l \rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{d} dt - \frac{1}{dX(z)} \int_{-l}^l X^+(t) \tau(t) \operatorname{cosec} \frac{\pi(t-z)}{d} dt, \quad (4)$$

де C , A і B — невідомі дійсні сталі,

$$Y(z) = A \sin \frac{\pi z}{d} + B \cos \frac{\pi z}{d}, \quad X(z) = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi z}{d} - \sin^2 \frac{\pi l}{d}}.$$

Беручи до уваги вираз для функції напружень $F(z)$ (4) та умову однозначності переміщень, знаходимо, що $B = 0$. Крім того, можемо записати

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} \Big|_{y \rightarrow \pm\infty} = C + 0.5Ai \mp id^{-1} \int_{-l}^l \rho(t) dt,$$

звідки отримуємо

$$C = \tau_{xz}^\infty, \quad \tau_{yz}^{\pm\infty} = -0.5A \pm d^{-1} \int_{-l}^l \rho(t) dt,$$

тобто, задаючи напруження $\tau_{yz}^{\pm\infty}$ (τ_{xz}^∞), знаходимо сталу A . Тоді напруження τ_{yz}^∞ (τ_{xz}^∞) довільними бути не можуть, вони визначаються з останнього рівняння.

Маючи вираз для функції $F(z)$, можемо знайти коефіцієнти інтенсивності напружень за формулою

$$K_3^T = -\frac{A}{2} \sqrt{\frac{d}{\pi}} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{d} - \sqrt{\frac{2}{\pi d \sin \frac{2\pi l}{d}}} \int_{-l}^l \tau(t) \sqrt{\frac{\sin \frac{\pi(t+l)}{d}}{\sin \frac{\pi(l-t)}{d}}} dt. \quad (5)$$

У часткових випадках із (5) одержуємо відомі результати статті [1] та монографій [2, 3].

Зауважимо, що випадок б) отримаємо з випадку а), якщо зробимо заміну $d \rightarrow id$. Комплексний потенціал $F(x)$ набуде вигляду

$$F(z) = C + \frac{iA \operatorname{sh} \pi z/d}{2\tilde{X}(z)} - \frac{1}{d} \int_{-l}^l \rho(t) \operatorname{cth} \frac{\pi(t-z)}{d} dt - \frac{1}{d\tilde{X}(z)} \int_{-l}^l \tilde{X}^+(t) \tau(t) \operatorname{sh}^{-1} \frac{\pi(t-z)}{d} dt,$$

а коефіцієнт інтенсивності напружень знайдемо за формулою

$$K_3^T = -\frac{A}{2} \sqrt{\frac{d}{\pi}} \operatorname{th} \frac{\pi l}{d} - \sqrt{\frac{2}{\pi d \operatorname{sh} 2\pi l/d}} \int_{-l}^l \tau(t) \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \pi(t+l)/d}{\operatorname{sh} \pi(l-t)/d}} dt,$$

$$\tilde{X}(z) = \sqrt{\operatorname{sh}^2 \pi z/d - \operatorname{sh}^2 \pi l/d}. \quad (6)$$

У часткових випадках з (6) одержимо відомі в літературі результати [5].

Крім того, при великих x можемо записати

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} C + 0.5 A i \mp d^{-1} \int_{-l}^l \rho(t) dt,$$

звідки дістанемо

$$A = -2\tau_{yz}^{\infty}, \quad \tau_{xz}^{\pm\infty} = C \mp d^{-1} \int_{-l}^l \rho(t) dt, \quad (7)$$

тобто, задаючи напруження $\tau_{xz}^{\pm\infty}$ ($\tau_{yz}^{\pm\infty}$), знаходимо сталу C . Тоді напруження $\tau_{xz}^{\pm\infty}$ ($\tau_{yz}^{\pm\infty}$) довільними бути не можуть, вони визначаються з рівності (7).

Зауважимо, що на відміну від випадку а), значення коефіцієнта інтенсивності напружень не залежить від того, чи навантаження на берегах тріщини самозрівноважене чи ні, позаяк від цього, як бачимо з (7), не змінюється значення постійної A , через яку він виражається.

2. Друга основна задача. Випадок а). Як і в першій основній задачі, комплексний потенціал $F(x)$ матиме вигляд

$$F(z) = -iC + \frac{1}{2id} \int_{-l}^l \rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{d} dt + \frac{1}{2idX(z)} \int_{-l}^l \frac{X^+(t) \tau(t) dt}{\sin \pi(t-z)/d} + \frac{Y(z)}{2X(z)}, \quad (8)$$

де C , A і B — дійсні сталі; $w^{\pm}$ — відомі переміщення берегів тріщини,

$$\rho(x) = \mu \left(\frac{\partial w^+}{\partial x} - \frac{\partial w^-}{\partial x} \right), \quad \tau(x) = \mu \left(\frac{\partial w^+}{\partial x} + \frac{\partial w^-}{\partial x} \right).$$

Вважатимемо, що відомий головний вектор зусиль R , прикладених до берегів тріщини. Тоді $B = R/d$.

На основі (1) та (8) при великих y можемо записати

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = -iC + 0.5 A \mp 0.5 i B,$$

звідки одержуємо $A = 2\tau_{xz}^{\infty}$, $\tau_{yz}^{\pm\infty} = C \pm R/2d$, тобто, задаючи напруження $\tau_{yz}^{\pm\infty}$ ($\tau_{xz}^{\pm\infty}$), знаходимо сталу C . Тоді напруження $\tau_{yz}^{\pm\infty}$ ($\tau_{xz}^{\pm\infty}$) довільними бути не можуть, вони визначаються з останнього рівняння.

Коефіцієнт інтенсивності напружень K_3^G визначаємо за формулою

$$K_3^G = \frac{1}{\sqrt{2\pi/d \sin 2\pi l/d}} \left(\frac{1}{d} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{\sin^2 \pi l/d - \sin^2 \pi t/d}}{\sin \pi(t-l)/d} \tau(t) dt + Y(l) \right). \quad (9)$$

Випадок паралельних не зсунутих тріщин одержуємо як і в першій основній задачі. Тому з формул (8) і (9) маємо

$$F(z) = -iC + \frac{1}{2id} \int_{-l}^l \rho(t) \operatorname{cth} \frac{\pi(t-z)}{d} dt + \frac{1}{2id\tilde{X}(z)} \int_{-l}^l \frac{\tilde{X}^+(t) \tau(t)}{\operatorname{sh} \pi(t-z)/d} dt + \frac{\tilde{Y}(z)}{2\tilde{X}(z)},$$

$$K_3^G = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^{-1} \operatorname{sh} 2\pi l/d}} \left(\frac{1}{d} \int_{-l}^l \sqrt{\frac{\operatorname{th} \pi l/d + \operatorname{th} \pi t/d}{\operatorname{th} \pi l/d - \operatorname{th} \pi t/d}} \tau(t) dt + \tilde{Y}(l) \right),$$

$$\tilde{Y}(z) = A \operatorname{sh} \pi z/d + R d^{-1} \operatorname{ch} \pi z/d. \quad (9)$$

На основі формул (1) і (9) знаходимо $\tau_{xz}^{\pm\infty} = A \pm R/d$, $C = 2\tau_{yz}^{\infty}$, де сталу A визначаємо, вважаючи відомими напруження $\tau_{xz}^{+\infty}$ ($\tau_{xz}^{-\infty}$). Тоді напруження $\tau_{xz}^{-\infty}$ ($\tau_{xz}^{+\infty}$) довільними бути не можуть, вони визначаються як і в попередніх випадках.

Маючи систему жорстких включень, доходимо висновку, якщо на нескінченності діють тільки напруження τ_{yz}^{∞} , то наявність системи жорстких включень не впливає на напружений стан тіла за умови, що $R = 0$.

1. Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. О хрупких трещинах продольного сдвига // Прикладная математика и механика. – 1961. – 25, № 6. – С. 1110–1119.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
3. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
4. Опанасович В. К. Комплексні потенціали періодичної задачі колінарних тріщин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 49. – С. 130–137.
5. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под ред. В.В. Панасюка. – К.: Наук. думка, 1988. – Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М.П. Саврук. – 1988. – 620 с.
6. Опанасович В. К., Драган М. С. Антиплоска деформація тіла з тонкостінним пружним включенням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1981. – Вип. 17. – С. 69–73.

Victor Opanasovych

ON COMPLEX POTENTIALS OF ANTIPLANE PROBLEMS FOR ISOTROPIC BODY WITH PERIODIC SYSTEM OF RECTILINEAR CRACKS

The first and second main problem for the body staying under the conditions of antiplane deformation with periodic system of collinear and parallel nonshifted tunnel cracks has been investigated. The analytical formulae for complex potential and for stress intensity factors are set. The case of system of rigid inclusions are considered too. In the partial cases the known results are obtained.

Стаття надійшла до редколегії 24.08.99

Jan Drewko

Technical University of Szczecin

VIBRATION ANALYSIS OF BEAMS WITH CRACKS

1. Introduction. In many problems of dynamics structural elements are modelled by beams. Damages of the structural elements in form of cracks can appear. The size and localisation of cracks can essentially influence structural safety. By analysis of influence of size and localisation of crack on eigenfrequencies it is usually possible to modify the structure in such a way that the crack does not enlarge further [1]. A technique based on the sensitivity of the natural frequencies with respect to the size and position of cracks in beams is thus presented in the paper. By assuming that a crack may be modelled by an effective elastic hinge [2], with the rotational inertia and shear deformations taken into account [3], the problem is formulated on the basis of the classic theory of Timoshenko's beams. The formulation is illustrated by a number of numerical results related to three prismatic beams with rectangular cross-sections.

2. Elastic hinge modelling. Assume that the cross-section $b \times h$ of a beam weakened by a crack of length (depth) a , Fig. 1, can effectively be replaced by an elastic hinge of stiffness K being a decreasing function of the crack length, $K = K(a)$.

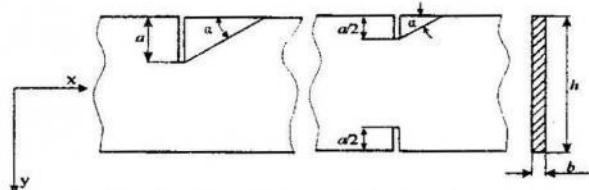


Fig. 1. One- and two-sided cracks.

The function can be determined either experimentally or analytically, basing on deformation hypothesis for one-sided cracks [2, pp. 75-76]

$$K(a) = E I_{yy} \frac{(h-a)^2}{a^2(3h-2a)} \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$

and, for two-sided cracks as

$$K(a) = E I_{yy} \frac{2(h-a)^2}{a^2(3h-2a)} \operatorname{tg} \alpha \quad (2)$$

with $I_{yy} = bh^3/12$ being the moment of inertia of the cross-section about the z -axis and E the Young modulus. The distribution of stresses around the cracks is taken into account in defining the angle α . For example, for one-sided cracks, [4]

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \frac{a}{h} \right) \right] \quad (3)$$

and for two-sided cracks

$$\alpha = \arctg \left[\frac{1}{2} \left(\tg \frac{\pi}{6} + \frac{a}{2h} \right) \right]. \quad (4)$$

In the context of crack theory the plane-stress-state stiffness $K(a)$ can be obtained as

$$K(a) = \left[\frac{2b}{E} \int_0^a (K_{IM}^0)^2 d\xi \right]^{-1}, \quad (5)$$

where K_{IM}^0 is the stress intensity factor for unit internal bending moment at cross-section of the beam with the crack. For one-sided cracks, [5]

$$K_{IM}^0 = \frac{6}{bh^2} \sqrt{\pi a} F(a/h), \quad (6)$$

where

$$F(a/h) = 1.122 - 1.4(a/h) + 7.33(a/h)^2 - 13.08(a/h)^3 + 14.0(a/h)^4 \quad (7)$$

and for two-sided ones

$$K_{IM}^0 = \frac{6}{bh^2} \sqrt{\pi a} (1 - a/h)^{-3/2} G(a/h), \quad (8)$$

where

$$G\left(\frac{a}{h}\right) = \frac{4}{3\pi} \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{h} \right) + \frac{3}{8} \left(1 - \frac{a}{h} \right)^2 + \frac{5}{16} \left(1 - \frac{a}{h} \right)^3 \right] - 0.47 \left(1 - \frac{a}{h} \right)^4 + 0.663 \left(1 - \frac{a}{h} \right)^5. \quad (9)$$

Values of elastic hinge stiffness for steel beams with $E = 2.06 \times 10^5 \text{ Nmm}^{-2}$, $h = 40 \text{ mm}$, $b = 7 \text{ mm}$, are shown in Fig. 2. Agreement of the results obtained on the basis of beam theory as well as by fracture mechanics approach is quite good. That is why further the beam theory will be applied only.

At the crack position $x = x_0$ the conditions of: equilibrium (10), continuity of deflections (11) and bending moments (12) and shear forces (13), are to be satisfied, [6].

$$EI y''(x_0) = K(a)[y'(x_0^+) - y'(x_0^-)], \quad (10)$$

$$y(x_0^-) = y(x_0^+), \quad (11)$$

$$EI_{yy} y''(x_0^-) = EI_{yy} y''(x_0^+), \quad (12)$$

$$EI_{yy} y'''(x_0^-) = EI_{yy} y'''(x_0^+). \quad (13)$$

3. Numerical results. Starting with the equations of Timoshenko's beam vibrations [3, pp. 318-320], calculations were carried out for three types of the beam supports, depending on the crack position and depth, for one- and two-sided cracks. The two smallest natural frequencies values obtained were com-

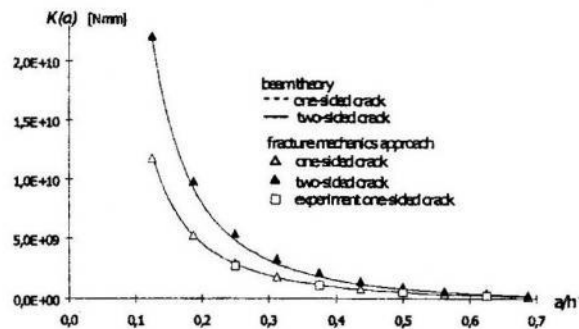


Fig. 2. Elastic hinge stiffness function.

pared with those calculated by the finite element code NASTRAN, cf. [7] (the calculations were performed at TASK Academic Computer Centre using NASTRAN v70). Calculated natural frequencies $\varpi_n(\xi)$, $n = 1, 2$, for beams with the cracks we compared to $\varpi_n(0)$, e.i. for corresponding beams without cracks. The beam was modelled using 960 CQUAD8 elements of $5 \times 5 \text{ mm}$, and 2 CRAC2D elements of $2 \times 2 \text{ mm}$ from the NASTRAN element library. Values of the basic material parameters were as follows: Young modulus $E = 2.06 \times 10^5 \text{ Nmm}^{-2}$, Poisson ratio $\nu = 0.33$, mass density $\rho = 7.83 \times 10^{-9} \text{ N s}^2 \text{ mm}^{-4}$.

Below some results of the calculations are presented

Case 1.

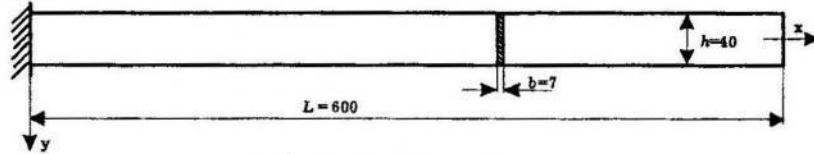


Fig. 3. Cantilever beam.

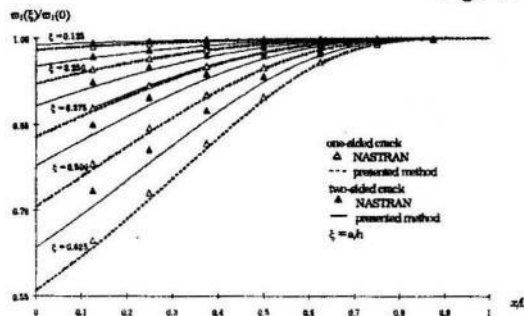


Fig. 4. Influence of crack position and size on the first natural frequency value.

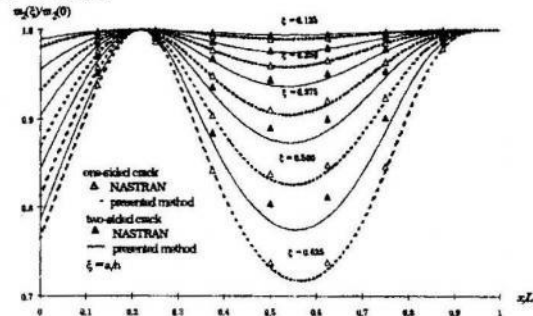


Fig. 5. Influence of crack position and size on the second natural frequency value.

Case 2.

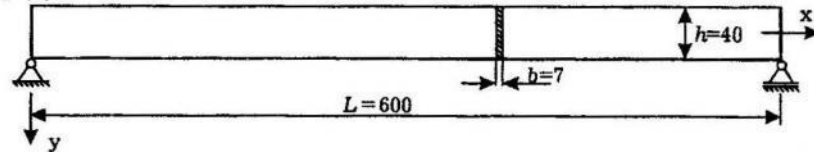


Fig. 6. Simply supported beam.

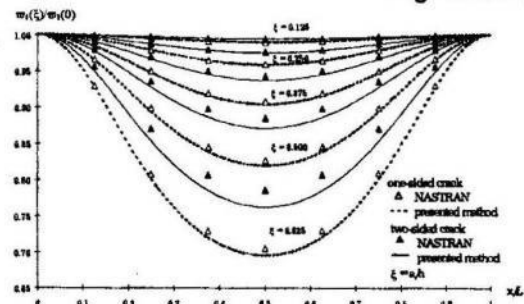


Fig. 7. Influence of crack position and size on the first natural frequency value.

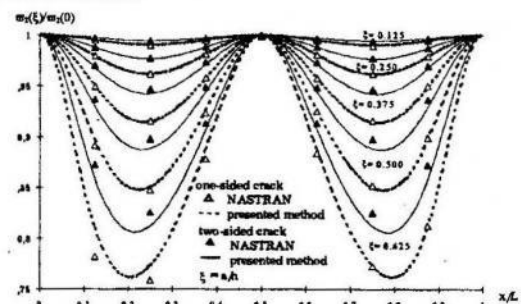


Fig. 8. Influence of crack position and size on the second natural frequency value.

Case 3.

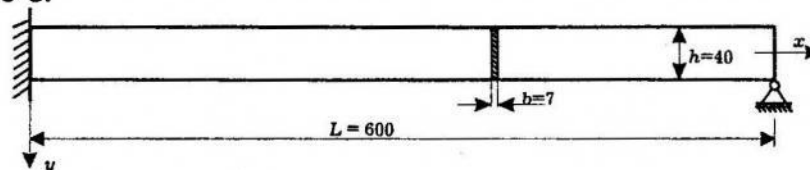


Fig. 9. Clamped and simply supported beam.

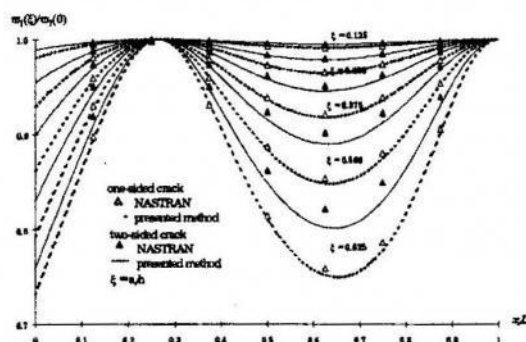


Fig. 10. Influence of crack position and size on the first natural frequency value.

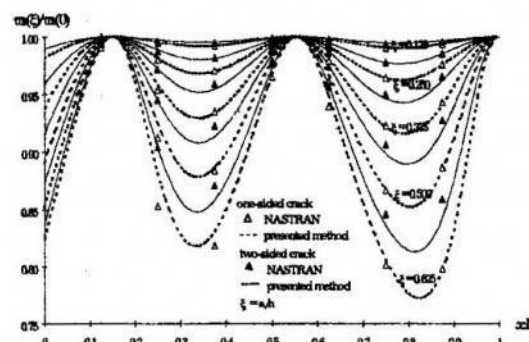


Fig. 11. Influence of crack position and size on the second natural frequency value.

It can be observed in Figs. 4-5, 7-8 and 10-11 that the values of all natural frequencies for the one-sided cracked beams are smaller than those for the two-sided cracked ones. This is because the effective stiffnesses of the latter are larger than that of the former, but total mass is the same in both the systems. The differences between $\omega_n(\xi)$ and $\omega_n(0)$ are significant – even up to 25% for $\xi = a/h = 0.625$, with the crack appeared between two nodal points of the modal shapes. The eigenvalues are insensitive to the size of the crack sited at the points coincided with the modal nodes, though.

In the case of statically indeterminate beam (Case 3) an additional nodal point (apart from the conventional nodal points) can be observed. At such a singular point the values of natural frequencies are insensitive to the size of the crack.

The forced vibration problem of the cracked beam described in Case 2 is analysed by using the beam theory, based on the elastic hinge concept. The beam with one- and two-side crack is excited by a concentrated force, $P(t) = P_0 \sin \omega t$, $\omega = 175.07$ Hz. The crack as well as loading force are defined at the same mid-point of the beam. Obtained nondimensional values of deflection amplitudes y , bending moments M and shear forces T , scaled by corresponding static's quantities $y_s = P_0 L^3 / (48EI_{yy})$, $M_s = P_0 L / 4$ and $T_s = P_0$, respectively, are shown in Figs. 12, 13 and 14.

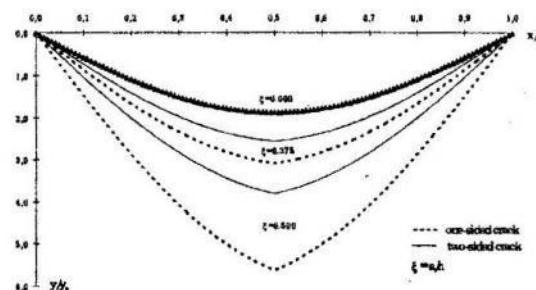


Fig. 12. Beam deflection amplitudes.

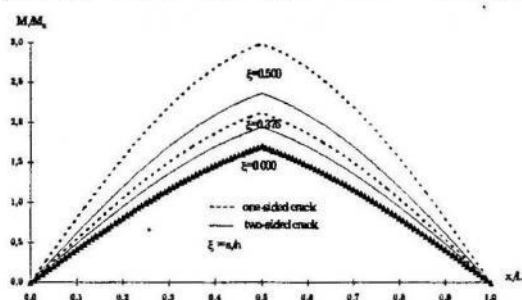


Fig. 13. Bending moment amplitudes.

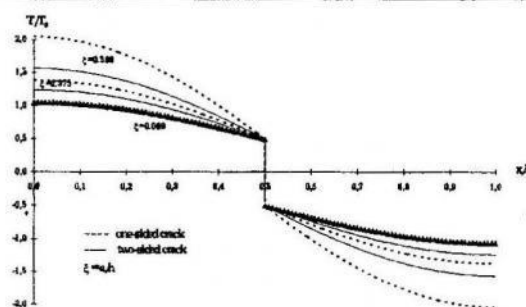


Fig. 14. Shear force amplitudes.

1. Łukasiewicz S., Pałka K. Least square method for detection of defects in structures from dynamic responses // Arch. Budowy Maszyn. – 1997. – XLIV. – P. 225–263.
2. Drewko J. Quasi-statyczna analiza propagacji układu szczelin w belkach zginanych // Marine Tech. Trans. – 1997. – 8. – P. 65–86.
3. Solecki R., Szymkiewicz J. Układy prętowe i powierzchniowe, obliczenia dynamiczne. – Warszawa: ARKADY, 1964.
4. Tada H., Paris P. C., Irwin G. R. The Stress Analysis of Cracks, Handbook – Hellertown: Del Research Corp. 1973.
5. Sih G. C. Handbook of Stress Intensity Factors, Institute of Fracture and Solid Mechanics. – Bethlehem: Lehigh Univ, 1973.
6. Drewko J., Sperski M. Vibration of multi-chamber shell structures with discontinuously variable cross-sections // Enging. Trans. – 1991. – 39. – P. 163–180.
7. MSC/NASTRAN, Reference manual, version 68 (updated to Ver. 70). – Los Angeles: The MacNeal-Schwendler Corp, 1994.

Ян Дрєвко

АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ БАЛОК З ТРІЩИНАМИ

Запропоновано метод обчислення частот власних коливань балок з тріщинами, який ґрунтується на класичній теорії Тимошенка, в якій тріщина замінена еквівалентним пружним шарніром з урахуванням впливу обертової інерції та деформації зміни форми. Модель пружного шарніра створена на основі технічної теорії згину балок, порівнюється з моделлю механіки руйнування. Жорсткість шарніра визначена для прямокутного поперечного перерізу з односторонньою та двосторонньою щільною. Проаналізовано вплив розташування і величини щільності на частоту власних коливань балки. Результати порівняно з обчисленими за допомогою пакета NASTRAN для трьох призматичних балок з прямокутним перерізом. Продемонстровано вплив щільності на амплітуду прогину, на згинальний момент і на поперечну силу для вимушених коливань.

Стаття надійшла до редколегії 06.09.99

UDC 539.3

Ewaryst Wierzbicki, Czesław Woźniak

*Institute of Mathematics and Computer Sciences
Częstochowa University of Technology*

A DISPERSIVE MODEL OF HONEYCOMB BASED COMPOSITES

The paper deals with investigations of overall dynamic behavior of the linear-elastic honeycomb based microstructured composite solids made of an isotropic homogeneous matrix reinforced by a hexagonal lattice of fibres or by a hexagonal skeleton of thin slender walls as shown in Fig. 1. Problems similar to this one were investigated in a series of papers. In most cases the material structures under consideration were described by means of certain equivalent homogeneous solid equations [1, 4, 5], which can be also obtained by the known asymptotic homogenization method, cf. [6, 9]. However, the modelling procedures used in the aforementioned papers lead to a nondispersive continuum equations and hence are not able to describe the effect of microstructure size on the overall dynamic solid behavior. Dispersive models of honeycomb-type structures were discussed in [2, 3, 8, 9] but the attention was restricted to the hexagonal beam-like systems like gridworks and latticed or perforated plates. So far, accordingly to the authors' knowledge, the dispersive models for overall response of honeycomb based composites have not been investigated. The tensorial notation is used; all small Greek characters run over 1,2 and are related to the plane orthogonal Cartesian coordinate system $0x_1x_2$; summation convention holds. Symbols t^A stand for Fig. 1 the unit vectors parallel to the A -th family of reinforcement elements where here and in the sequel $A = 1, 2, 3$; we shall also assume that $t^1 + t^2 + t^3 = 0$. The vector basis d^1, d^2 in Fig. 1 determines the periodic structure of the solid under consideration.

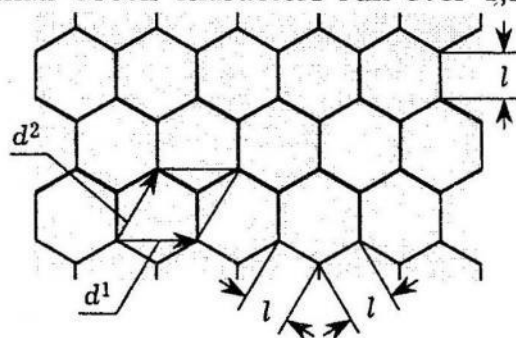


Fig. 1.

In order to formulate an averaged continuum model of honeycomb based composites under consideration we have to restrict ourselves to the cases in which only special kinds of deformations are investigated. First, the smallest wavelength L of a deformation pattern has to be sufficiently large compared to the microstructure length parameter l . Second, it is assumed that on these long-wave deformations there are superimposed locally-periodic deformations which within every repeated cell of a solid periodic structure can be approximated by the periodic ones, see [9], Chapter 6. In the first approximation which is applied in this contribution we shall assume that the locally-periodic superimposed deformations of all finite triangular elements of the triangulation lattice, shown in Fig. 2, can be treated as uniform. Let $u_\alpha(x, t)$ be a displacement vector field. Moreover, let

$\delta(x)$ stand for the scalar periodic continuous function, which at the nodes of periodic triangulation lattice takes the values 0, $+0.5l$, $-0.5l$ indicated on the right hand side of Fig. 2 and is linear in every triangular element. From the kinematic assumptions formulated above it follows that

$$u_\alpha(\mathbf{x}, t) = v_\alpha(\mathbf{x}, t) + \delta(\mathbf{x}) q_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

where $v_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $q_\alpha(\mathbf{x}, t)$ are slowly varying vector functions, i.e., together with all spatial derivatives can be approximately treated as constant in every parallelogram spanned on vectors d^1 , d^2 and hence constant in every fibre segment of the length l . That is why the distribution of displacement gradients in every repetitive element will be approximated by [10]:

$$u_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t) \cong v_{\beta,\alpha}(\mathbf{x}, t) + \delta_{,\alpha}(\mathbf{x}) q_\beta(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

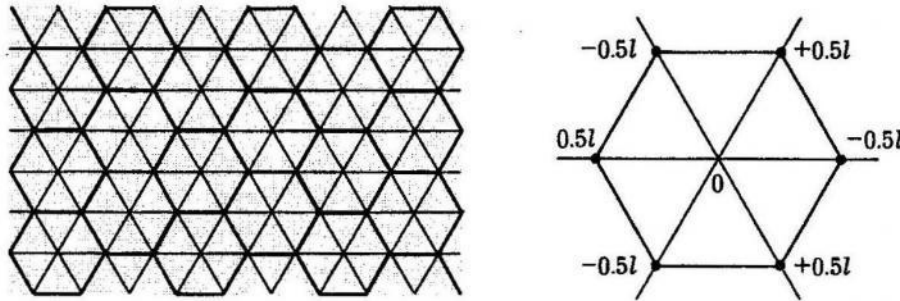


Fig. 2.

It has to be emphasized that the formulae (1), (2) represent only the first approximation of superimposed locally-periodic deformations being related to the triangulation lattice shown in Fig. 2; the possible higher approximations will be discussed separately.

Independently of the aforementioned kinematic assumptions, leading to the formulas (1), (2), we shall postulate that:

- 1° The mass distribution in composite solid under consideration can be approximated by a system of concentrated masses assigned to the nodes of triangulation lattice,
- 2° The thickness of reinforcement in Ox_1x_2 -plane can be treated as negligibly small in the description of geometry of a solid. Roughly speaking, the fibres and walls of the honeycomb reinforcement lattice are infinitely thin in Ox_1x_2 -plane.

We begin with the calculations of averaged values of strain and kinetic energy densities, both for the matrix and reinforcement. Let $a_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda_m \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \mu_m (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma})$ stand for the matrix elasticity tensor with λ_m, μ_m as Lamé module either for the plane-strain or plane-stress problem. The matrix averaged strain energy density of σ_m by means of Eq. (2) will be given by

$$\sigma_m = \frac{1}{2} [\lambda_m \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \mu_m (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma})] v_{\alpha,\beta} v_{\gamma,\delta} + \frac{1}{2} (\lambda_m + 3\mu_m) \delta_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta. \quad (3)$$

Let ρ_m stand for the matrix mass density. The known expression for the matrix kinetic energy density, under the mass distribution assumption formu-

lated above and by using formula (1), after simple calculations yields

$$\kappa_m = \frac{1}{2} \rho_m (\dot{v}_\alpha \dot{v}_\alpha + \frac{l^2}{6} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\alpha) \quad (4)$$

as the averaged kinetic energy of the matrix.

Let v be a fractional concentration of reinforcement and λ_f, μ_f stand for Lamé module of the reinforcement material. Introducing tensors

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}^4 = \sum_{A=1}^3 t_\alpha^A t_\beta^A t_\gamma^A t_\delta^A, \quad T_{\alpha\beta\gamma}^3 = \sum_{A=1}^3 t_\alpha^A t_\beta^A t_\gamma^A, \quad T_{\alpha\beta}^2 = \sum_{A=1}^3 t_\alpha^A t_\beta^A,$$

we obtain

$$\sigma_f = \frac{1}{2} v (\lambda_f + 2\mu_f) (T_{\alpha\beta\gamma\delta}^4 v_{\alpha,\beta} v_{\gamma,\delta} + 2T_{\alpha\beta\gamma}^3 v_{\alpha,\beta} q_\gamma + T_{\alpha\beta}^2 q_\alpha q_\beta) \quad (5)$$

for the averaged strain energy density of the honeycomb reinforcement lattice.

Let ρ_f be the mass density of reinforcement material. Hence the averaged mass density of the reinforcement is equal to $v\rho_f$. Bearing in mind that the mass of reinforcement lattice has to be assigned exclusively to the nodes of the lattice and using formula (1) we arrive to the expression

$$\kappa_f = \frac{1}{2} v \rho_f (\dot{v}_\alpha \dot{v}_\alpha + \frac{l^2}{4} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\alpha) \quad (6)$$

for the averaged kinetic energy density of the honeycomb reinforcement lattice.

The crucial point of the theoretical considerations in this contribution is to show that it is possible to obtain an isotropic continuum model of honeycomb based composites. It can be proved that tensors $T_{\alpha\beta}^2, T_{\alpha\beta\gamma\delta}^4$ are isotropic and have the form

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta}^4 = \frac{3}{8} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}), \quad T_{\alpha\beta}^2 = \frac{3}{2} \delta_{\alpha\beta}.$$

At the same time the third order tensor $T_{\alpha\beta\gamma}^3$ in the two-dimensional space cannot be isotropic. Let us introduce the coordinate system Ox_1x_2 such that t_1 is the versor of Ox_1 -axis. In this case $t^1 = (1, 0)$, $t^2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, $t^3 = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$. In the above coordinate system we obtain $T_{111}^3 = 3/4$, $T_{112}^3 = -3/4$, $T_{122}^3 = 0$, $T_{222}^3 = 0$; it has to be remembered that $T_{\alpha\beta\gamma}^3$ is symmetric with respect to all subscripts and hence the above equalities determine all components of this tensor. Let us define the second order tensor $W_{\alpha\beta}$ which is traceless, $W_{\alpha\alpha} = 0$, symmetric $W_{\alpha\beta} = W_{\beta\alpha}$, and its components in the coordinate system Ox_1x_2 introduced above are given by $W_{11} = -W_{22} = q_1$, $W_{12} = W_{21} = -q_2$. In this coordinate system

$$T_{\alpha\beta\gamma}^3 v_{\alpha,\beta} q_\gamma = \frac{3}{4} (v_{1,1} W_{11} + v_{2,2} W_{22} + v_{1,2} W_{12} + v_{2,1} W_{21}) = \frac{3}{4} v_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}.$$

Similarly, it can be shown that

$$\delta_{\alpha\delta} q_\alpha q_\beta = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} W_{\alpha\beta} W_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} W_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}.$$

It follows that the expressions (3)–(6) can be respectively replaced by the following ones

$$\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{1}{2} [\lambda_m v_{\alpha,\alpha} v_{\beta,\beta} + \mu_m (v_{\alpha,\beta} v_{\alpha,\beta} + v_{\alpha,\beta} v_{\beta,\alpha}) + \frac{1}{4} (\lambda_m + 3\mu_m) W_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}], \\ \kappa_m &= \frac{1}{2} \rho_m (\dot{v}_\alpha \dot{v}_\alpha + \frac{l^2}{6} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\alpha), \\ \sigma_f &= \frac{3}{16} \kappa (\lambda_f + 2\mu_f) (v_{\alpha,\alpha} v_{\beta,\beta} + v_{\alpha,\beta} v_{\alpha,\beta} + v_{\alpha,\beta} v_{\beta,\alpha} + 4v_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta} + 2W_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}), \\ \kappa_f &= \frac{1}{2} \nu \rho_f \dot{v}_\alpha \dot{v}_\alpha + \frac{l^2}{16} \rho_f \dot{W}_{\alpha\beta} \dot{W}_{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (7)$$

Under the extra denotations

$$\xi = \frac{3}{8} \nu (\lambda_f + 2\mu_f) \quad (8)$$

let us define the following material and inertial modulae

$$\lambda = \lambda_m + \xi, \quad \mu = \mu_m + \xi, \quad \alpha = \frac{1}{4} (\lambda_m + 3\mu_m) + \xi, \quad \rho = \rho_m + \frac{2\sqrt{3}}{3} \rho_f, \quad \eta = \frac{\sqrt{3}}{12} \rho_f. \quad (9)$$

Also define the linearized strain tensor by means of the well known expression

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}). \quad (10)$$

The principle of stationary action, based on formulae (7), after neglecting body forces, leads to the equations of motion

$$S_{\alpha\beta,\beta} - \rho \ddot{U}_\alpha = 0, \quad (11)$$

and what will be called dynamic evolution equation

$$l^2 \eta \ddot{W}_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta} = 0, \quad (12)$$

together with the constitutive equations

$$\begin{aligned}S_{\alpha\beta} &= \lambda \delta_{\alpha\beta} E_{\gamma\gamma} + 2\mu E_{\alpha\beta} + 2\xi W_{\alpha\beta}, \\ H_{\alpha\beta} &= \alpha W_{\alpha\beta} + 2\xi D_{\alpha\beta},\end{aligned}\quad (13)$$

where

$$D_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} E_{\gamma\gamma}, \quad W_{\alpha\beta} = W_{\beta\alpha}, \quad W_{\alpha\alpha} = 0. \quad (14)$$

Equations (10)–(14) with denotations (8), (9) represent the averaged model of honeycomb based composites under consideration. The main features of the model are:

- 1° the isotropic form of constitutive equations (13) which have constant coefficients,
- 2° the dispersive form of the dynamic evolution equations (12) which depends explicitly on the microstructure length parameter l .

The basis kinematic unknowns are: the averaged displacement vector field v_α and the tensor field $W_{\alpha\beta}$. It has to be emphasized that the the above model has a physical meaning only under assumption that $v_\alpha(\cdot, t)$, $W_{\alpha\beta}(\cdot, t)$ are slowly varying functions, i.e. their wavelengths are sufficiently large compared to the microstructure length parameter l .

Applications of the above averaged model to the dispersive analysis will be given in a separate paper, [11].

1. Abd El-Sayed F.K., Jones R., Burgess I.W. A theoretical approach to the deformation of honeycomb based composite materials // Composites. – 1979. – No. 10. – P. 209-214.
2. Cielecka I. On the continuum modelling the dynamic behavior of certain composite lattice-type structures // J. Theor. Appl. Mech. – 1995. – 33. – P. 351-359.
3. Cielecka I., Woźniak Cz., Woźniak M. Dynamic behavior of honey-comb cellular media // Proc. Of Ninth Symp. Continuum Models and Discrete Systems, Inan, E. Markov, K.Z. (Eds) Istanbul 1998, Singapore-Hong Kong: World Scientific 1998.
4. Gibson L. J., Ashby M. F., Robertson C. I. The mechanics of two dimensional cellular materials // Proc. Roy. Soc. Ser. – London, 1982. – A, 127. – P. 25-42.
5. Horvay G. The plane-stress problem of perforated plates // J. Appl. Mech. – 1952. – 19. – P. 355-360.
6. Jikov V. V., Kozlov C. M., Oleinik O. A. Homogenization of differential operators and integral functionals. – Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, 1994.
7. Lewiński T. Differential models of hexagonal type grig plates // J. Theor. Appl. Mech. – 1985. – 22. – P. 407-421.
8. Lewiński T. Dynamical tests of accuracy of Cosserat models for honeycomb gridworks // ZAMM 68. – 1998. – T210-T212.
9. Sanchez-Palencia E. Non-homogeneous media and vibration theory // Lecture Notes in Physics 127. – Berlin: Springer-Verlag, 1980.
10. Woźniak Cz. Internal variables in dynamics of composite solids with periodic microstructure // Arch. Mech. – 1997. – 49. – P. 421-441.
11. Wierzbicki E., Woźniak Cz. On dynamic behavior of honeycomb based composite solids // Acta Mech., to appear.

Еварист В'єжицький, Чеслав Возняк

ДИСПЕРСІЙНІ МОДЕЛІ СТІЛЬНИКОВИХ КОМПОЗИТИВ

Сформульовано усереднену математичну модель лінійно-пружних композитів, які мають однорідну ізотропну основу, зміцнену регулярною шестикутною сіткою волокон або регулярним шестикутним гнучким кістяком. Основний результат праці полягає у доведенні ізотропності моделі.

Стаття надійшла до редколегії 14.09.99

UDC 539.3

Barbara Tomczyk

Łódź University of Technology

LENGTH-SCALE VERSUS ASYMPTOTIC MODEL IN DYNAMICS OF THIN SUBSTRUCTURED CYLINDRICAL SHELLS

1. Introduction. The subject matter of this contribution is a thin linear-elastic cylindrical shell having a periodic structure (a periodically varying thickness and/or periodically varying elastic and inertial properties) along its midsurface. Structures like that are called the substructured shells, cf. [14].

Substructured shells and plates are usually described using homogenized models. These models from a formal point of view represent certain equivalent structures with constant or slowly varying stiffnesses and averaged mass densities.

The homogenized models of substructured shells and plates are usually derived by means of asymptotic methods. In the case of periodic plates, these asymptotic homogenization methods have been presented by Caillerie [2] (in this contribution two small parameters – thickness of a plate and the characteristic size of a periodicity cell – are used to investigate periodic plates), Kohn and Vogelius [6] (this paper deals with thin plates having a rapidly varying thickness), Lewiński [8] (in this contribution the homogenized stiffnesses are analysed) and others. The asymptotic approach to periodic shells has been proposed by Kalamkarov [5], Lutoborski [10], Lewiński and Telega [7]; the discussion of the above approach can be found in [14].

The formulation of mathematical models of shells by using the asymptotic expansions is rather complicated from the computational point of view. That is why the asymptotic procedures are restricted to the first approximation. Within this approximation we obtain models which neglect the effect of periodicity cell length dimensions on the global structure behaviour (the length-scale effect). This effect plays an important role mainly in the vibration and wave propagation analysis. To formulate the length-scale models in the framework of asymptotic homogenization we could find the higher-order terms of the asymptotic expansions, cf. [9]. Models of this kind have complicated analytical form and applied to the investigation of boundary-value problems often lead to the large number of boundary conditions which may be not well motivated from the physical viewpoint.

The alternative modelling procedure leading to the length-scale models of periodic structures which are plausible from the engineering standpoint and may constitute the basis for the numerical analysis, was proposed by Woźniak in [12] where the length-scale effect described by the extra unknown fields called internal variables is taken into account in the description of non-stationary processes. The results of [12] were generalized in [13] where this effect was taken into account also in the description of stationary processes. The Above approach has been applied to modelling and dynamic analysis of

periodic plates in a series of papers, e.g. in [1] (this contribution deals with plates based on the Reissner-Hencky assumptions), in [3, 4] where Kirchhoff-type plates are studied and in [11] where wavy-plates are analysed.

A general modelling method based on the concept of internal variables and leading from 2D equations of thin shells with locally periodic structure to the averaged equations with slowly varying coefficients depending on the periodicity cell length dimensions has been proposed by Woźniak in [14]. In the present contribution this approach is applied to derive the length-scale model of thin linear-elastic cylindrical shells having the periodic structure along its midsurface. The length scales will be introduced to the global description of both inertial and constitutive properties of the shells under consideration.

The proposed length-scale model will be compared with a simplified one, in which the effect of the periodicity cell size on the overall shell behaviour is neglected.

We are to show that the introduced length-scale model will be plausible from the engineering standpoint being able to constitute the basis for numerical analysis of special problems.

2. Preliminaries. Denote by $\Omega \subset R^2$ a regular plane region of points $\Theta \equiv (\Theta^1, \Theta^2)$ and let E^3 be the physical space described by the Cartesian coordinate system $Ox^1x^2x^3$. Let us introduce the parametric representation of the undeformed smooth cylindrical shell midsurface $\mathcal{M}$ by means of: $\mathcal{M} := \{\mathbf{x} \equiv (x^1, x^2, x^3) \in E^3 : \mathbf{x} = \mathbf{x}(\Theta^1, \Theta^2), \Theta \in \Omega\}$, where $\mathbf{x}(\Theta^1, \Theta^2)$ is a position vector of an arbitrary point on $\mathcal{M}$.

Throughout the paper indices $\alpha, \beta, \dots$ run over 1, 2 and are related to the midsurface parameters Θ^1, Θ^2 ; summation convention holds.

To every $\Theta \in \Omega$ we assign a covariant base vectors $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{x}_{,\alpha}$ and covariant midsurface first and second metric tensors denoted by $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, respectively, which are given as follows:

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{,\beta}, \quad a_{\alpha\beta} = \text{const}, \quad b_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta}, \quad b_{\alpha\beta} = \text{const}, \quad (2.1)$$

where $\mathbf{n}$ is a unit normal to $\mathcal{M}$.

Let $\delta(\Theta)$ stand for the shell thickness. We also define t as the time coordinate.

We shall denote by $\Delta := (0, l_1) \times (0, l_2)$ the region on Ω , where the length dimensions l_1, l_2 are assumed to be sufficiently large compared with the maximum shell thickness $\delta(\cdot)$ and sufficiently small as compared to the midsurface curvature radius R as well as the smallest characteristic length dimension L of the shell midsurface.

Let us assign to every $\Theta \in \Omega$ a periodicity cell $\Delta(\Theta)$ on $O\Theta^1\Theta^2$ -plane by means of: $\Delta(\Theta) := \Theta + \Delta$, $\Theta \in \Omega_0$, $\Omega_0 := \{\Theta \in \Omega : \Delta(\Theta) \subset \Omega\}$, where the point $\Theta \in \Omega_0$ is a centre of cell $\Delta(\Theta)$ and the set Ω_0 is said to be the Δ -interior of Ω . Under given above assumptions for periods l_1, l_2 , every shell element having midsurface $\mathbf{x}(\Delta(\Theta)) \subset \mathcal{M}$ constitutes a shallow shell.

A function $f(\Theta)$ defined on Ω_0 will be called Δ -periodic if it satisfies conditions of the form $f(\Theta^1, \Theta^2) = f(\Theta^1 \pm l_1, \Theta^2) = f(\Theta^1, \Theta^2 \pm l_2)$ in the whole domain

of its definition. It is assumed that the shell thickness and its material properties are Δ -periodic functions of Θ .

A shell with Δ -periodic structure satisfying the aforementioned conditions will be referred to as a *shell with mesoperiodic structure* (a mesostructured shell, cf. [14].) The size of the mesostructure is described by the *mesostructure length parameter* l defined by $l := \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$, where $\sup \delta(\cdot) \ll l \ll (R \text{ as well as } L)$.

Our considerations will be based on the simplified linear Kirchhoff-Love theory of thin elastic shells in which terms depending on the second metric tensor of $\mathcal{M}$ are neglected in the formulae for curvature changes.

Let $u_\alpha(\Theta, t)$, $w(\Theta, t)$ stand for the midsurface shell displacements in directions tangent and normal to $\mathcal{M}$, respectively. We denote by $\varepsilon_{\alpha\beta}(\Theta, t)$, $\kappa_{\alpha\beta}(\Theta, t)$ the membrane and curvature strain tensors and by $n^{\alpha\beta}(\Theta, t)$, $m^{\alpha\beta}(\Theta, t)$ the stress resultants and stress couples, respectively. The properties of shell are described 2D-shell stiffness tensors $D^{\alpha\beta\gamma\delta}(\Theta)$, $B^{\alpha\beta\gamma\delta}(\Theta)$ and let $\mu(\Theta)$ stand for a shell mass density per midsurface unit area. Let $f_\alpha(\Theta, t)$, $f(\Theta, t)$ be external force components per midsurface unit area, respectively tangent and normal to $\mathcal{M}$.

The equations of a shell theory under consideration consist of:

(i) the strain-displacement equations

$$\varepsilon_{\gamma\delta} = u_{(\gamma,\delta)} - b_{\gamma\delta} w, \quad \kappa_{\gamma\delta} = -w_{,\gamma\delta}, \quad (2.2)$$

(ii) the stress-strain relations

$$n^{\alpha\beta} = D^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad m^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta}, \quad (2.3)$$

(iii) the equations of motion

$$n^{\alpha\beta}_{,\alpha} - \mu a^{\alpha\beta} \ddot{u}_\alpha + f^\beta = 0, \quad m^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - \mu \ddot{w} + f = 0. \quad (2.4)$$

In the above equations the displacements $u_\alpha = u_\alpha(\Theta, t)$ and $w = w(\Theta, t)$, $\Theta \in \Omega$, are the basic unknowns.

For mesostructured shells, $\mu(\Theta)$, $D^{\alpha\beta\gamma\delta}(\Theta)$ and $B^{\alpha\beta\gamma\delta}(\Theta)$, $\Theta \in \Omega$, are highly oscillating Δ -periodic functions; that is why equations (2.2)–(2.4) cannot be directly applied to the numerical analysis of special problems. In order to derive from Eqs. (2.2)–(2.4) an averaged model of mesostructured cylindrical shells which has constant coefficients and describes the mesostructure size effect on the global dynamic shell behaviour the internal variable modelling approach to the thin shells with a locally periodic structure given by Woźniak in [14] will be applied. To make the analysis more clear, in the next section we shall outline the basic concepts of this approach, following the paper [14].

3. Basic concepts. Following [14] we outline below the basic concepts, which will be used in the course of modelling procedure:

(i) For an arbitrary integrable function $\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ we define the *averaging operation*:

$$\langle \varphi \rangle(\Theta) := \frac{1}{|\Delta(\mathbf{Q})|} \int_{\Delta(\mathbf{Q})} \varphi(\mathbf{Y}) \sqrt{a} d\Psi^1 d\Psi^2, \quad \Theta \in \Omega_0, \quad \Psi \equiv (\Psi^1, \Psi^2) \in \Delta(\Theta), \quad (3.1)$$

where a is a determinant of the midsurface first metric tensor.

If $\varphi(\cdot)$ is a Δ -periodic function then $\langle \varphi(\cdot) \rangle (\Theta)$ is a constant and will be denoted by $\langle \varphi \rangle$.

(ii) A differentiable function $F(\Theta, t)$ is called *slowly varying*, $F \in SV(\Delta)$, if for every integrable function $\varphi(\cdot)$ satisfies conditions of the form:

$$\langle \varphi F \rangle (\Theta, t) \cong \langle \varphi \rangle (\Theta) F(\Theta, t), \quad \Theta \in \Omega_0, \quad (3.2)$$

and the similar conditions are also fulfilled by all derivatives of $F(\Theta, t)$. Roughly speaking, the *slowly varying function* can be treated as constant on an arbitrary periodicity cell Δ . The symbol « $\cong$ » denotes a certain tolerance relation describing the accuracy of performed calculations.

(iii) By a *highly oscillating function*, $h \in HO(\Delta)$, we mean a differentiable Δ -periodic function $h(\cdot)$ such that for every $F \in SV(\Delta)$ conditions:

$$\langle \nabla(Fh) \rangle (\Theta, t) \cong \langle F \nabla h \rangle (\Theta, t), \quad \Theta \in \Omega_0, \quad (3.3)$$

are assumed to hold. Roughly speaking, in calculations of averages $\langle \cdot \rangle$, values of a *highly oscillating function* can be treated as negligibly small compared to the values of their derivatives.

For more detailed discussion of the internal variable modelling approach to periodic and locally-periodic structures the reader is referred to Woźniak [13, 14].

Using the governing 2D-equations of a shell theory (2.2)–(2.4) and auxiliary concepts outlined above as well as modelling hypotheses given in [14], the length-scale model of a mesostructured cylindrical shell will be derived in the subsequent section.

4. Governing equations. The idea of the internal variable approach is based on assumptions which restrict the class of unknown displacement fields $u_\alpha(\Theta, t)$, $w(\Theta, t)$ in (2.2)–(2.4) to a certain subclass, which includes arbitrary motions with wavelength of an order much larger than l on which there are superimposed disturbances of displacements caused by the highly oscillating character of the shell mesostructure.

Using the approach given in [14], we approximate the unknown midsurface shell displacements $u_\alpha(\Theta, t)$, $w(\Theta, t)$ in equations (2.2)–(2.4) by means of:

$$\begin{aligned} u_\alpha(\Theta, t) &\sim U_\alpha(\Theta, t) + h^A(\Theta) Q_\alpha^A(\Theta, t), \\ w(\Theta, t) &\sim W(\Theta, t) + g^A(\Theta) V^A(\Theta, t), \quad A = 1, 2, \dots, N, \quad \Theta \in \Omega_0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

(here and in the sequel summation convention over A holds), where:

(i) The unknown averaged displacement $U_\alpha(\Theta, t) = \langle \mu \rangle^{-1} \langle \mu u_\alpha \rangle (\Theta, t)$ and $W(\Theta, t) = \langle \mu \rangle^{-1} \langle \mu w \rangle (\Theta, t)$, respectively tangent and normal to $\mathcal{M}$, are slowly varying functions.

(ii) The unknown fields $Q_\alpha^A(\Theta, t)$, $V^A(\Theta, t)$, $A = 1, 2, \dots, N$, describing from the quantitative point of view the displacement disturbances, are slowly varying functions called *internal variables*.

(iii) Fields $h^A(\Theta)$, $g^A(\Theta)$, $A = 1, 2, \dots, N$, describing from the qualitative point of view the displacement disturbances, are assumed to be known in

every problem; they are highly oscillating functions such that $\langle \mu h^A \rangle (\Theta) = \langle \mu g^A \rangle (\Theta) = 0$ and $h^A(\Theta) \in O(l)$, $h_{,\alpha}^A(\Theta) \in O(1)$, $g^A(\Theta) \in O(l^2)$, $g_{,\alpha}^A(\Theta) \in O(l)$, $g_{,\alpha\beta}^A(\Theta) \in O(1)$. They represent the expected shapes of disturbances and are obtained as approximate solutions to a special eigenvalue problem related to free vibrations on the cell $\Delta(\Theta)$ with periodic boundary conditions on $\partial\Delta(\Theta)$. This eigenvalue problem will be presented in the subsequent part of this section. Functions $h^A(\Theta)$, $g^A(\Theta)$ are referred to as the shape functions.

The finite sums $h^A(\Theta) Q_\alpha^A(\Theta, t)$, $g^A(\Theta) V^A(\Theta, t)$ in Eqs. (4.1) represent disturbances of displacements and are obtained as an approximate solution to a problem for vibrations $d_\alpha(\Psi, t) = u_\alpha - U_\alpha$ and $p(\Psi, t) = w - W$, $\Psi \equiv (\Psi^1, \Psi^2) \in \Delta(\Theta)$, formulated in the cell $\Delta(\Theta)$ under periodic boundary conditions on $\partial\Delta(\Theta)$. Denoting $\bar{f}^\beta = f^\beta + D^{\alpha\beta\gamma\delta} (U_{\gamma,\delta\alpha} - b_{\gamma\delta} W_{,\alpha}) - \mu a^{\alpha\beta} \ddot{U}_\alpha$, $\bar{f} = -B^{\alpha\beta\gamma\delta} W_{,\alpha\beta\gamma\delta} + b_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta\gamma\delta} (U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta} W) - \mu \ddot{W} + f$ and using (2.2)–(2.4), the aforementioned local problem states as follows:

$$\begin{aligned} D^{\alpha\beta\gamma\delta} (d_{\gamma,\delta\alpha} - b_{\gamma\delta} p_{,\alpha}) - \mu a^{\alpha\beta} \ddot{d}_\alpha + \bar{f}^\beta &= 0, \\ -B^{\alpha\beta\gamma\delta} p_{,\alpha\beta\gamma\delta} + b_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta\gamma\delta} (d_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta} p) - \mu \ddot{p} + \bar{f} &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

and it is solved by applying the orthogonalization method known in structural dynamics. Using this method we have to formulate in $\Delta(\Theta)$ the eigenvalue problem for functions $h(\Psi)$, $g(\Psi)$, $\Psi \in \Delta(\Theta)$. Under the assumption that every shell element having midsurface $\mathbf{x}(\Delta(\Theta)) \subset \mathcal{M}$ constitutes a shallow shell, the aforementioned eigenvalue problem for the local problem (4.2) is formulated as follows:

$$\begin{aligned} D^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{\gamma,\delta\alpha}(\Psi) + \mu \omega^2 a^{\alpha\beta} h_\alpha(\Psi) &= 0, \\ -B^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\alpha\beta\gamma\delta}(\Psi) + \mu \omega^2 g(\Psi) &= 0, \end{aligned} \quad \Psi \in \Delta(\Theta), \quad (4.3)$$

where $\langle \mu h_\alpha \rangle (\Theta) = \langle \mu g \rangle (\Theta) = 0$ and periodic boundary conditions for $h_\alpha(\cdot)$, $g(\cdot)$ on $\partial\Delta(\Theta)$ hold.

The eigenfunctions $h_\alpha(\Psi)$, $g(\Psi)$, $\Psi \in \Delta(\Theta)$, corresponding to the eigenvalue ω can be obtained, in most cases only in the approximate form represented by certain Δ -periodic functions $h_\alpha^A(\Psi)$, $g^A(\Psi)$, $\Psi \in \Delta(\Theta)$, $A = 1, 2, \dots, N$.

The unknown functions $Q_\alpha^A(\Theta, t)$, $V^A(\Theta, t)$ in (4.1) are governed by the following orthogonality conditions:

$$\langle n^{\alpha\beta} h_{,\alpha}^A + (-\mu a^{\alpha\beta} \ddot{U}_\alpha - \mu a^{\alpha\beta} h^B \ddot{Q}_\alpha^B + f^\beta) h^A \rangle (\mathbf{Q}) = 0, \quad (4.4)$$

$$\langle m^{\alpha\beta} g_{,\alpha\beta}^A + (b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - \mu \ddot{W} - \mu g^B \ddot{V}^B + f) g^A \rangle (\mathbf{Q}) = 0, \quad A, B = 1, 2, \dots, N, \quad \mathbf{Q} \in \Omega_0,$$

where

$$n^{\alpha\beta}(\Psi, t) = D^{\alpha\beta\gamma\delta} (U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta} W) + D^{\alpha\beta\gamma\delta} (h_{,\delta}^B Q_\gamma^B - b_{\gamma\delta} g^B V^B),$$

$$m^{\alpha\beta}(\Psi, t) = -B^{\alpha\beta\gamma\delta} W_{,\gamma\delta} - B^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\gamma\delta}^B V^B, \quad \Psi \in \Delta(\Theta), \quad (4.5)$$

The unknown averaged displacement fields $U_\alpha(\Theta, t)$, $W(\Theta, t)$ in (4.1) are governed by the following averaging conditions implied by Eqs. (4.2):

$$\begin{aligned} \langle n_{,\alpha}^{\alpha\beta} - \mu a^{\alpha\beta} \ddot{U}_\alpha - \mu a^{\alpha\beta} h^B \ddot{Q}_\alpha^B + f^\beta \rangle(\mathbf{Q}) &= 0, \\ \langle m_{,\alpha\beta}^{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - \mu \ddot{W} - \mu g^B \ddot{V}^B + f \rangle(\mathbf{Q}) &= 0, \quad A, B = 1, 2, \dots, N, \quad \mathbf{Q} \in \Omega_0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

where $n^{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$ are given by (4.5).

The averaging conditions (4.6) have to be considered together with the orthogonality conditions (4.4).

Setting $N^{\alpha\beta} = \langle n^{\alpha\beta} \rangle$, $M^{\alpha\beta} = \langle m^{\alpha\beta} \rangle$, from Eqs. (4.4), (4.6) we obtain the length-scale model of mesostructured cylindrical shells. This model is represented by:

(i) *the constitutive equations*

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle (U_{,\gamma\delta} - b_{\gamma\delta} W) + \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\delta}^B \rangle Q_\gamma^B - \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\delta}^B \rangle b_{\gamma\delta} V^B, \\ M^{\alpha\beta} &= -\langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle W_{,\gamma\delta} - \langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\gamma\delta}^B \rangle V^B, \\ H^{AB} &= \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha}^A \rangle (U_{,\gamma\delta} - b_{\gamma\delta} W) + \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha}^A h_{,\delta}^B \rangle Q_\gamma^B - b_{\gamma\delta} \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha}^A g_{,\delta}^B \rangle V^B, \\ G^A &= -b_{\alpha\beta} \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\delta}^A \rangle (U_{,\gamma\delta} - b_{\gamma\delta} W) + \langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\gamma\delta}^A \rangle W_{,\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\delta}^A h_{,\delta}^B \rangle Q_\gamma^B + \\ &\quad + (\langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\alpha\beta}^A g_{,\gamma\delta}^B \rangle + b_{\alpha\beta} \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\delta}^A g_{,\delta}^B \rangle b_{\gamma\delta}) V^B, \quad A, B = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.7)$$

(ii) *the system of three averaged partial differential equations of motion for averaged displacements $U_\alpha(\Theta, t)$, $W(\Theta, t)$*

$$\begin{cases} N_{,\alpha}^{\alpha\beta} - \langle \mu \rangle a^{\alpha\beta} \ddot{U}_\alpha + \langle f^\beta \rangle = 0, \\ M_{,\alpha\beta}^{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} - \langle \mu \rangle \ddot{W} + \langle f \rangle = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

(iii) *the system of $3N$ ordinary differential equations for the internal variables $Q_\alpha^B(\Theta, t)$, $V^B(\Theta, t)$ called the dynamic evolution equations*

$$\begin{cases} \langle \mu h^A h^B \rangle a^{\gamma\beta} \ddot{Q}_\gamma^B + H^{AB} + \langle f^\beta h^A \rangle = 0, \\ \langle \mu g^A g^B \rangle \ddot{V}^B + G^A + \langle f g^A \rangle = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

The underlined coefficients in Eqs. (4.7), (4.9) depend on the mesostructure length parameter l and hence describe the effect of the mesostructure size on the shell overall behaviour.

The internal variables do not enter the displacement boundary conditions and hence the number and form of these conditions are similar to those of the well known 2D-theory which is governed by equations (2.2)–(2.4).

The characteristic features of equations (4.7)–(4.9) are :

(i) All aforesaid equations have constant coefficients.

(ii) Terms involving $\langle \mu h^A h^B \rangle$, $\langle \mu g^A g^B \rangle$ in dynamic evolution equations (4.9) are of an order $O(l^2)$, $O(l^4)$, respectively, and describe the effect of mesostructure size on the dynamic shell behaviour.

(iii) Terms with $\langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} g^A \rangle$, $\langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} g^A h_{,\delta}^B \rangle$ and $\langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} g^A g^B \rangle$ in constitutive equations (4.7) are of an order $O(l^2)$, $O(l^2)$, $O(l^4)$, respectively, and describe this effect on the shell response also in the quasi-stationary problems.

(iv) Solutions to initial-boundary value problems for above equations have a physical sense only if they are represented by sufficiently regular slowly varying functions $U_\alpha(\Theta, t)$, $W(\Theta, t)$, $Q_\alpha^B(\Theta, t)$, $V^B(\Theta, t)$.

Substituting the constitutive equations (4.7) into the equation of motion (4.8) and the dynamic evolution equations (4.9), under extra denotations

$$\begin{aligned}\tilde{D}^{\alpha\beta\gamma\delta} &\equiv \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle, & D^{A\alpha\beta\gamma} &\equiv \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\delta}^A \rangle, & D^{AB\beta\gamma} &\equiv \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha}^A h_{,\delta}^B \rangle, \\ F^{AB\beta\gamma\delta} &\equiv \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha}^A g^B \rangle, & L^{A\alpha\beta\gamma\delta} &\equiv \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} g^A \rangle, \\ \tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} &\equiv \langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle, & K^{A\alpha\beta} &\equiv \langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\gamma\delta}^A \rangle, \\ L^{AB} &\equiv \langle \langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\alpha\beta}^A g_{,\gamma\delta}^B \rangle + b_{\alpha\beta} \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} g^A g^B \rangle b_{\gamma\delta} \rangle,\end{aligned}\quad (4.10)$$

we obtain the following governing relations for $U_\alpha(\Theta, t)$, $W(\Theta, t)$, $Q_\alpha^B(\Theta, t)$, $V^B(\Theta, t)$ as the basic kinematic unknowns:

$$\begin{aligned}\tilde{D}^{\alpha\beta\gamma\delta} (U_{,\gamma\delta\alpha} - b_{\gamma\delta} W_{,\alpha}) + D^{B\alpha\beta\gamma} Q_{,\gamma}^B - \underline{L^{B\alpha\beta\gamma\delta}} b_{\gamma\delta} V_{,\alpha}^B - \langle \mu \rangle a^{\alpha\beta} \ddot{U}_\alpha + \langle f^\beta \rangle &= 0, \\ \tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} W_{,\alpha\beta\gamma\delta} + K^{B\alpha\beta} V_{,\alpha\beta}^B - b_{\alpha\beta} \tilde{D}^{\alpha\beta\gamma\delta} (U_{,\gamma\delta} - b_{\gamma\delta} W) - b_{\alpha\beta} D^{B\alpha\beta\gamma} Q_\gamma^B + \\ + b_{\alpha\beta} \underline{L^{B\alpha\beta\gamma\delta}} b_{\gamma\delta} V^B + \langle \mu \rangle \ddot{W} - \langle f \rangle &= 0, \\ D^{A\beta\gamma\delta} (U_{,\gamma\delta} - b_{\gamma\delta} W) + D^{AB\beta\gamma} Q_\gamma^B - \underline{F^{AB\beta\gamma\delta}} b_{\gamma\delta} V^B + \langle \mu h^A h^B \rangle a^{\gamma\beta} \ddot{Q}_\gamma^B + \langle f^\beta h^A \rangle &= 0, \\ -b_{\alpha\beta} \underline{L^{A\alpha\beta\gamma\delta}} (U_{,\gamma\delta} - b_{\gamma\delta} W) + K^{A\alpha\beta} W_{,\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \underline{F^{A\beta\gamma\delta}} Q_\gamma^B + \underline{L^{AB}} V^B + \langle \mu g^A g^B \rangle \ddot{V}^B + \langle f g^A \rangle &= 0\end{aligned}\quad (4.11)$$

Thus, the class of length-scale models of mesostructured cylindrical shells has been obtained the form of which is determined by the choice of the shape functions $h^A(\cdot)$, $g^A(\cdot)$, $A = 1, \dots, N$, describing from the qualitative point of view the expected shapes of oscillations.

The underlined coefficients in Eqs. (4.11) describe the effect of the mesostructure size on the shell overall behaviour.

It can be shown that for homogeneous structures with constant thickness and for homogeneous initial conditions for internal variables, Eqs. (4.9) have only trivial solution $Q_\alpha^A = V^A = 0$ and Eqs. (4.7), (4.8) reduce to the well-known linear elastodynamic relations for cylindrical shells. Thus we conclude that the internal variables describe the effect of heterogeneity on the shell global behaviour.

5. Asymptotic equations. The simplified model of the mesostructured cylindrical shells can be derived directly from the length-scale model by a limit passage $l \rightarrow 0$, i.e. by neglecting the underlined terms which depend on the mesostructure length parameter l . Hence, Eqs. (4.11)_{3,4} yield :

$$D^{AB\beta\gamma} Q_\gamma^B = -D^{AB\gamma\delta} (U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta} W), \quad L^{AB} V^A = -K^{B\gamma\delta} W_{,\gamma\delta}. \quad (5.1)$$

From the positive definiteness of the strain energy it follows that $N \times N$ matrix L^{AB} is non-singular as well as the linear transformation determined by components $D^{AB\beta\gamma}$ is always invertible. Hence a solution to equations (5.1) can be written in the form:

$$Q_\gamma^B = -G_{\gamma\eta}^{BC} D^{C\eta\mu\delta} (U_{\mu,\delta} - b_{\mu\delta} W), \quad V^A = -E^{AB} K^{B\gamma\delta} W_{,\gamma\delta}. \quad (5.2)$$

where $G_{\alpha\beta}^{AB}$ and E^{AB} are defined by

$$G_{\alpha\beta}^{AB} D^{BC\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma \delta^{AC}, \quad E^{AB} L^{BC} = \delta^{AC}. \quad (5.3)$$

Setting

$$D_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \tilde{D}^{\alpha\beta\gamma\delta} - D^{A\alpha\beta\eta} G_{\eta\xi}^{AB} D^{B\xi\gamma\delta}, \quad B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} - K^{A\alpha\beta} E^{AB} K^{B\gamma\delta}. \quad (5.4)$$

and substituting the expression (5.2) into Eqs. (4.11)_{1,2} and Eqs. (4.7)_{1,2}, in which the underlined terms are neglected, we arrive at the asymptotic shell model governed by:

(i) *equations of motion*

$$B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta} W_{,\alpha\beta\gamma\delta} - b_{\alpha\beta} D_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta} (U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta} W) + \langle \mu \rangle \ddot{W} - \langle f \rangle = 0, \\ D_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta} (U_{\gamma,\delta\alpha} - b_{\gamma\delta} W_{,\alpha}) - \langle \mu \rangle a^{\alpha\beta} \ddot{U}_\alpha + \langle f^\beta \rangle = 0, \quad (5.5)$$

(ii) *constitutive equations*

$$N^{\alpha\beta} = D_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta} (U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta} W), \quad M^{\alpha\beta} = -B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta} W_{,\gamma\delta}, \quad (5.6)$$

where $D_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ are called the effective stiffnesses.

The obtained above asymptotic shell model governed by Eqs. (5.5), (5.6) is not able to describe the length-scale effect on the overall dynamic shell behaviour being independent of the mesostructure length parameter l .

6. Conclusions. In this paper an averaged 2D-model of thin mesostructured cylindrical shells, which describes the effect of periodicity cell length dimensions on the global dynamic shell behaviour (the length-scale effect) has been derived. In order to derive it the internal variable modelling approach to the thin shells with a locally periodic structure proposed by Woźniak in [14] has been applied. The resulting length-scale model is governed by Eqs. (4.7)–(4.9) or by Eqs. (4.7) and (4.11) with denotations (4.10). From this model by a limit passage $l \rightarrow 0$, i.e. by neglecting the underlined terms which depend on the mesostructure length parameter l , the asymptotic model of the shell under consideration has been obtained. This simplified model is governed by Eqs. (5.5), (5.6) with denotations (5.4). Contrary to the length-scale model, the sim-

plified one is not able to describe the effect of mesostructure size being independent of the mesostructure length parameter l .

Using the aforementioned internal variable approach, the unknown mid-surface shell displacements $u_\alpha = u_\alpha(\Theta, t)$ and $w = w(\Theta, t)$, $\Theta \in \Omega$, in governing equations of linear Kirchhoff-Love shell theory (2.2)–(2.4) are assumed to be obtained by a superimposition of displacement disturbances caused by the highly oscillating character of the shell mesostructure on arbitrary motions with wavelength of an order much larger than l . In the resulting length-scale and asymptotic models, the overall shell motions are described by unknown averaged over Δ slowly varying displacement fields $U_\alpha(\Theta, t)$, $W(\Theta, t)$, $\Theta \in \Omega_0$. The cell oscillating parts of displacements are described by highly oscillating functions $h^A(\cdot)$, $g^A(\cdot)$, $A = 1, \dots, N$, representing the expected shapes of cell oscillations and obtained as approximate solutions to a certain eigenvalue problem for free vibrations on the cell Δ under periodicity boundary conditions and by unknown slowly varying fields $Q_\alpha^B(\Theta, t)$, $V^B(\Theta, t)$, $B = 1, \dots, N$, $\Theta \in \Omega_0$, called internal variables. The internal variables do not enter the displacement boundary conditions. This fact is essential for the applications of these models, since for the boundary-value problems formulated within a framework of both length-scale and simplified models, we deal with boundary conditions imposed only on averaged displacements $U_\alpha(\cdot, t)$, $W(\cdot, t)$. The number and physical sense of these conditions are similar to those of the well known 2D-theory which is governed by equations (2.2)–(2.4). Moreover, in the framework of asymptotic approximation approach, the internal variables are governed by a system of linear algebraic equations and hence they can be easily eliminated (which is always possible) from the asymptotic model.

The main features of the resulting length-scale model governed by Eqs. (4.7)–(4.9) are:

(i) The form of it is relatively simple; it is represented by constitutive equations (4.7) and by a system of three partial differential equations (4.8) for averaged displacements $U_\alpha(\Theta, t)$, $W(\Theta, t)$, $\Theta \in \Omega_0$, coupled with ordinary differential equations (4.9) for internal variables $Q_\alpha^B(\Theta, t)$, $V^B(\Theta, t)$, $B = 1, \dots, N$, $\Theta \in \Omega_0$, involving only time derivatives. *All aforementioned equations have constant coefficients, which can be easily determined by calculations the integrals over Δ .* Hence, they can be effectly applied to engineering problems.

(ii) The inertial properties of this model are described not only by an averaged mass density $\langle \mu \rangle$ but also by averages $\langle h^A h^B \rangle$, $\langle \mu g^A g^B \rangle$, $A, B = 1, \dots, N$, which depend on the mesostructure length parameter l and hence describe the effect of the mesostructure size on the global dynamic shell behaviour. The elastic properties of the shell under consideration also depend on the periodicity cell length dimensions and hence the length-scale effect on the shell response is also described in quasi-stationary problems.

The main features of the resulting asymptotic model governed by Eqs. (5.5), (5.6) are:

(i) The form of it is very simple; the internal variables $Q_\alpha^B(\cdot, t)$, $V^B(\cdot, t)$, $B = 1, \dots, N$, are governed by a system of $3N$ linear algebraic equations (5.1) and after eliminating them by means of Eqs. (5.2), we arrive at the governing equations expressed only in terms of averaged displacements U_α , W . These equations consist of a system of three partial differential equations (5.5) for averaged displacements $U_\alpha(\Theta, t)$, $W(\Theta, t)$, $\Theta \in \Omega_0$ and constitutive relations (5.6).

(ii) The constant coefficients $D_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta}$, which are found in the Eqs. (5.5), (5.6), are called the effective stiffnesses and we calculate them from Eqs. (5.4).

(iii) It does not take into account the length-scale effect being independent of the mesostructure length parameter l .

Solutions to problems formulated for length-scale and asymptotic models have a physical sense only if they are represented by sufficiently regular slowly varying functions $U_\alpha(\Theta, t)$, $W(\Theta, t)$, $Q_\alpha^B(\Theta, t)$, $V^B(\Theta, t)$, $B = 1, \dots, N$, $\Theta \in \Omega_0$. This requirement imposes certain restrictions on the class of problems described by the models under consideration.

The comparison of solutions to special problems, obtained within the framework of both length-scale and asymptotic models, will make it possible to evaluate the effect of the mesostructure size on the global dynamic shell behaviour. Carrying out this analysis we have to determine the length-scale and simplified models, using the same shape functions $h^A(\cdot)$, $g^A(\cdot)$, $A = 1, \dots, N$.

Problems related to various applications of Eqs. (4.7)–(4.9) and Eqs. (5.5), (5.6) to dynamics of mesostructured cylindrical shells are reserved for separate papers.

-
1. Baron E., Woźniak C. On the microdynamics of composite plates // Arch. Appl. Mech. – 1995. – **65**. – P. 126–133.
 2. Caillerie D. Thin elastic and periodic plates // Math. Mech. Appl. Sci. – 1984. – **6**. – P. 159–191.
 3. Jędrzyński J. On dynamics of thin plates with periodic microstructure // Eng. Trans. – 1998. – **46**. – P. 73–87.
 4. Jędrzyński J. Free vibrations of thin periodic plates // Eng. Trans. – 1998. – **46**. – P. 89–114.
 5. Kalamkarov A. L. On determination of effective characteristics of lattice shells and plates with periodic structure, [in Russian] // Mekh. Tv. Tela. – 1987. – **2**. – P. 181–185.
 6. Kohn R. V., Vogelius M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness // Int. J. Solids Structures. – 1984. – **20**. – P. 331–350.
 7. Lewiński T., Telega J. J. Asymptotic method of homogenization of two models of elastic shells // Arch. Mech. – 1988. – **40**. – P. 705–723.
 8. Lewiński T. Homogenizing stiffnesses of plates with periodic structure // Int. J. Solids Structures. – 1992. – **21**. – P. 306–326.

9. *Lewiński T., Kucharski S.* A model with length scales for composites with periodic structure // Part I, *Comp. Mechanics*. – 1992. – **9**. – P. 249–265.
10. *Lutoborski A.* Homogenization of linear elastic shells // *J. Elasticity*. – 1985. – **15**. – P. 69–87.
11. *Michalak B.* Stability of elastic slightly wrinkled plates // *Acta Mechanica*. – 1998. – **130**. – P. 111–119.
12. *Woźniak C.* Refined macrodynamics of periodic structures // *Arch. Mech.* – 1993. – **45** – P. 295–304.
13. *Woźniak C.* Internal variables in dynamics of composite solids with periodic microstructure // *Arch. Mech.* – 1997. – **49** – P. 421–441.
14. *Woźniak C.* On dynamics of substructured shells // *J. Theor. Appl Mech.* – 1999. – **37**. – P. 255–265.

Барбара Томчик

МАСШТАБНИЙ ЕФЕКТ ЗА ВІБРАЦІЇ МЕЗОСТРУКТУРНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Досліджено тонку лінійно-пружну циліндричну оболонку, яка має періодичну структуру в напрямках, дотичних до серединної поверхні. Сформульовано двовимірну усереднену модель такої оболонки, що враховує вплив розмірів комірки періодичності на глобальну динамічну поведінку оболонки (ефекти масштабу). Згаданим ефектом нехтують у відомих асимптотичних теоріях плит та оболонок. Модель побудовано за допомогою запропонованого Возняком [14] методу моделювання тонких оболонок з локальною періодичною структурою. Одержану модель порівняно з асимптотичною моделлю, в якій ефект масштабу відсутній.

Стаття надійшла до редколегії 09.08.99

UDC 539.3

Sylwestr Konieczny, Alexander Yevtushenko

Łódź University of Technology

MACRO-DYNAMICS OF ELASTIC MICRO-NONPERIODIC COMPOSITES

1. Introduction. In modern engineering systems we also encounter composite structural elements in which macro-properties are functions of position in the body. They are structures that are not made of one standardized composite material but possess different desired macro-properties in different parts [1–3].

The aim of this contribution is to propose a general method of mathematical modelling for macro-heterogeneous elastic composite structures. All considerations are carried out in the context of the linear elasticity theory, under assumption of the perfect bonding between material constituents of the composite and for the deterministic description of the spatial distributions of constituents. The obtained results are transformed to the form of an engineering theory, which is a basis for calculations and design of macro-heterogeneous composites.

Notations. Throughout the paper subscripts i, j, k, l take the values 1, 2, 3 being related to the curvilinear coordinate system. The sub and superscripts a, b run over 1, ..., S if not stated otherwise. The summation convention holds for all aforementioned indices.

2. Basic assumptions. The subject of the analysis is a linear non-periodic composite body, which in its initial natural state occupies a region Ω in a 3-space parametrized by the curvilinear coordinates $(\mathbf{x} = x_1, x_2, x_3)$. The properties of these bodies are determined by a mass density $\rho(\cdot)$ and the tensor of elastic modulae $A^{ijkl}(\cdot)$. We restrict ourselves to composites for which there exist a decomposition of Ω into a very large number of small mutually disjointed cells $\Delta(\mathbf{x})$. We assume that the adjacent elements have almost identical distributions of material constituents but the remote elements can be distinctly different. For every $\Delta(\mathbf{x})$ we shall introduce the averaging operator

$$\langle f \rangle_A = \frac{1}{\text{vol}(V^A)} \int_{V^A} f(\mathbf{x}) dV, \quad A = 1, 2, 3, \dots, S, \quad (2.1)$$

where $f(\cdot)$ is an arbitrary integrable function defined (almost everywhere) on Δ .

3. Analysis. The governing equation of the proposed micro-macro elastodynamics we obtained of the well known actions functional.

$$A = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \dot{u}_i \dot{u}^i - \frac{1}{2} A^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \rho u_i b^i \right) dV \quad (3.1)$$

By applying assumptions that

$$\varepsilon_{ij} \cong \frac{1}{2}(U_{i/j} + U_{j/i}) + \frac{1}{2}(h_{a/i} Q_j^a + h_{a/j} Q_i^a) \quad (3.2)$$

(see paper [1], $U_i(\cdot, \tau)$, $Q_i^a(\cdot, \tau)$ are arbitrary independent regular functions, $h_a(\cdot)$ is the known system of functions postulated a priori in every problem. After some manipulations we obtain the approximation A ($A \cong A_0$), where

$$A_0 \cong \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \langle \rho \rangle_0 \dot{U}_i \dot{U}^i + \frac{1}{2} \langle \rho h_a h_b \rangle_0 \dot{Q}_i^a \dot{Q}^{bi} - \frac{1}{2} \langle A^{ijkl} \rangle_0 U_{(i/j)} U_{(k/l)} - \right. \\ \left. + \langle A^{ijkl} h_{a(j)} \rangle_0 U_{(k/l)} Q_i^a - \frac{1}{2} \langle A^{ijkl} h_{a/j} h_{b/l} \rangle_0 Q_i^a Q_k^b + \langle \rho \rangle_0 b^i U_i \right] dV. \quad (3.3)$$

Lagrange equations for A_0 read

$$S_{/j}^{ij} + \langle \rho \rangle_0 b^i = \langle \rho \rangle_0 \ddot{U}^i, \quad H_a^i + \langle \rho h_a h_b \rangle_0 \ddot{Q}^{bi} = 0, \quad (3.4)$$

where

$$S^{ij} = \langle A^{ijkl} \rangle_0 U_{(k/l)} + \langle A^{ijkl} h_{a/(k)} \rangle_0 Q_l^a, \\ H_a^i = \langle A^{ijkl} h_{a/j} \rangle_0 U_{(k/l)} + \langle A^{ijkl} h_{a/j} h_{b/l} \rangle_0 Q_k^b. \quad (3.5)$$

Denoting by σ^{ij} components of a stress tensor, by means $\sigma^{ij} = A^{ijkl}(U_{(k/l)} + h_{a/(k)} Q_l^a)$, we obtain

$$S^{ij}(\cdot, \tau) = \langle \sigma^{ij} \rangle(\cdot, \tau), \quad H_a^i(\cdot, \tau) = \langle \sigma^{ij} h_{a/j} \rangle(\cdot, \tau), \quad (3.6)$$

4. Axisymmetric case. In this section we shall consider problems corresponding to equations (3.4) for the axisymmetric case. After calculating the Christoffel symbols in the cylindrical coordinates (r, φ, z) with axisymmetric loads, we obtain following equations of motion

$$\frac{\partial S^{rr}}{\partial r} + \frac{\partial S^{rz}}{\partial z} + \frac{S^{rr} - S^{\varphi\varphi}}{r} = \langle \rho \rangle_0 \ddot{U}_r, \\ \frac{\partial S^{rz}}{\partial r} + \frac{\partial S^{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} S^{rz} = \langle \rho \rangle_0 \ddot{U}_z. \quad (4.1)$$

Assuming that $\langle \rho h_1 h_1 \rangle_0 = 0$ and setting $h_1 = \sin(2\pi r/l) \sin(2\pi \varphi/\alpha)$, equations (3.5) can be written as

$$S^{rr} = \gamma_1(r) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \gamma_2(r) \frac{1}{r} U_r + \gamma_3(r) \frac{\partial U_z}{\partial z}, \\ S^{\varphi\varphi} = \gamma_2(r) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \gamma_4(r) \frac{1}{r} U_r + \gamma_2(r) \frac{\partial U_z}{\partial z}, \\ S^{zz} = \gamma_3(r) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \gamma_2(r) \frac{1}{r} U_r + \gamma_1(r) \frac{\partial U_z}{\partial z}, \\ S^{rz} = c_1 \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right). \quad (4.2)$$

The functions $\gamma_1(r)$, $\gamma_2(r)$, $\gamma_3(r)$, $\gamma_4(r)$ are given below

$$\begin{aligned}\gamma_1(r) &= a_1 - b_1 \frac{1}{r^2}, & \gamma_2(r) &= a_2 - b_2 \frac{1}{r^2}, \\ \gamma_3(r) &= a_2 - b_1 \frac{1}{r^2}, & \gamma_4(r) &= a_1 - b_3 \frac{1}{r^2},\end{aligned}\quad (4.3)$$

where

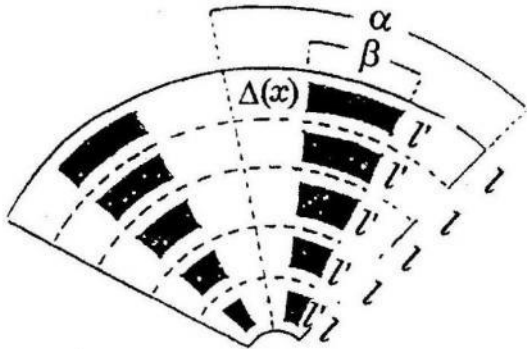
$$\begin{aligned}a_1 &= \lambda_m + 2\mu_m + \varsigma[\lambda_z + 2\mu_z - (\lambda_m + 2\mu_m)], & a_2 &= \lambda_m + \varsigma(\lambda_z - \lambda_m), \\ b_1 &= \frac{\alpha_1^2 (\lambda_z - \lambda_m)^2}{m}, & b_2 &= \frac{\alpha_1^2 (\lambda_m - \lambda_z)[\lambda_m + 2\mu_m - (\lambda_z + 2\mu_z)]}{m}, \\ b_3 &= \frac{\alpha_1^2 [\lambda_m + 2\mu_m - (\lambda_z + 2\mu_z)]^2}{m}, & c_1 &= \mu_m + \varsigma(\mu_z - \mu_m), \\ m &= \frac{\pi^2}{l^2} [\mu_m + (\mu_z - \mu_m)\alpha_2] + \frac{\pi^2}{\alpha^2} \{\lambda_m + 2\mu_m + [\lambda_z + 2\mu_z - (\lambda_m + 2\mu_m)]\alpha_3\}, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{\alpha l} \left[\frac{l'}{\pi} \cos(\pi l'/l) - \frac{l^2}{\pi^2} \sin(\pi l'/l) \right] \sin(\pi \beta/\alpha), \\ \alpha_2 &= \left[\frac{2l'}{l} + \frac{1}{\pi} \sin(2\pi l'/l) \right] \left[\frac{\beta}{2\alpha} - \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi \beta/\alpha) \right], \\ \alpha_3 &= \left[\frac{2l'}{l} - \frac{1}{\pi} \sin(2\pi l'/l) \right] \left[\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi \beta/\alpha) \right], \\ \varsigma &= \frac{F_z}{F_m} = \text{const.}\end{aligned}\quad (4.4)$$

5. Example. As an illustrative example of the application of the general considerations given in Sec. 4 we shall now consider the wave shear propagating along z -axis. To this end we assume that $U_r(\cdot) = 0$, $U_z(\cdot) = 0$, $U_\varphi = U_\varphi(r, z, \tau)$, the matrix and the reinforcement are made of homogeneous isotropic linear - elastic materials and the perfect bonding between constituents. On this assumption we may obtain the explicit of equation of motion (see equations (4.1), (4.2)).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\langle \mu \rangle_0}{\mu^{eff}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) U_\varphi(\cdot) = 0, \quad (5.1)$$

where

$$\begin{aligned}\langle \mu \rangle_0 &= (1 - l'/l)\mu_m + l'\mu_z/l, & \mu^{eff} &= \langle \mu \rangle_0 - \frac{(\langle \mu h_{,r} \rangle_0)^2}{\langle \mu h_{,r}^2 \rangle_0}, \\ (\langle \mu h_{,r} \rangle_0)^2 &= 4(\mu_m - \mu_z)^2, & \langle \mu h_{,r}^2 \rangle_0 &= 4\left(\frac{l}{l-l'} \mu_m + \frac{l}{l'} \mu_z \right).\end{aligned}\quad (5.2)$$



The scheme of the laminate ($\alpha = \beta$).

In our case we introduce only one shape function $h(r)$, which is piecewise linear and takes the values $h(0) = h(l/2) = h(l) = 0$, $h((l-l')/2) = 1$, $h((l+l')/2) = -1$, (l, l' shown in Figure).

Looking for solution to eqs. (5.1) in the form $U_\varphi(\cdot) = U'_\varphi(r)e^{i(kz - \omega t)}$, we obtain following formulae for the wave velocity

$$c = c_2 \sqrt{\frac{\langle \mu \rangle_0}{\mu^{eff}} + \frac{\lambda^2 \beta^2}{4\pi^2}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu^{eff}}{\langle \rho \rangle_0}}, \quad (5.3)$$

where $\lambda = 2\pi/k$ is the wavelength of a wave propagation and coefficient β we calculate of the following equation $\beta l J_0(\beta l) = 2J_1(\beta l)$ where $J_0(\cdot)$, $J_1(\cdot)$ are Bessel functions.

More detailed investigations related to the applications and verification of the proposed engineering approach to macro - heterogeneous composite structures will be presented separately.

1. Konieczny S. Modelling and computation of composites with space varying microstructure, proceedings ICCE 4 // Big Island of Hawaii, July 6-16. - 1997. - P. 543-544.
2. Woźniak Cz. Heterogeneity in mechanics of composite structures, J. Theor. Appl. Mech. - 1992. - 30. - P. 519-533.
3. Konieczny S., Woźniak Cz., Woźniak M. A contribution to the modelling of macro - heterogeneous composites // J. Theor. Appl. Mech. - 1994. - 32. - P. 324-330.

Сильвестр Конечный, Олександр Євтушенко

МАКРОДИНАМІКА ПРУЖНИХ МІКРО-НЕПЕРІОДИЧНИХ КОМПЗИТИВ

Розглянуто динамічну задачу теорії пружності для циліндра, яка містить кругові сектори з іншого матеріалу. Рівняння гомогенізованої моделі такого композиту отримано за допомогою процедури гомогенізації з мікролокальними параметрами.

Стаття надійшла до редколегії 27.07.99

UDC 539.3

Iwona Cielecka

Łódź University of Technology

CONTINUUM MODELLING THE DYNAMIC PROBLEMS FOR LATTICE-TYPE PLATES

Introduction. In this paper we deal with the formulation and application of a continuum model to study linearized elastodynamics for lattice-type plates having an arbitrary complex periodic lay-out in Ox_1x_2 -plane; two examples of this lay-out are shown in Fig. 1. It is assumed that the length dimensions of a representative cell of the periodic structure are small compared to the minimum characteristic length dimension of the whole latticed plate and that the mass distribution in this plate can be approximated by assigning concentrated masses and inertia moments to every nodal joint of a lattice. Hence the lattice-type plate under consideration is represented by a certain plane periodic system of mutually interacting rigid joints.

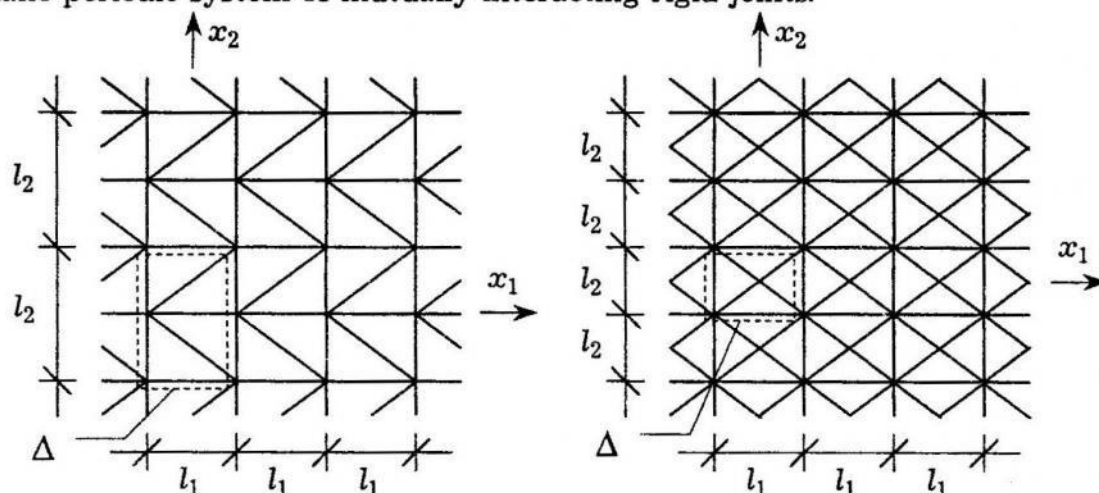


Fig. 1. Examples of periodic lattice-type plates and their representative elements.

It is known that a direct approach to dynamics of periodic systems with a very large number of interacting rigid bodies leads to computational difficulties due to a large number of ordinary differential equations describing the problem under consideration. That is why different averaged continuum models have been proposed in order to reduce the number of basic unknowns and to simplify the analysis of particular problems. From many results obtained in this manner, let us mention those related to frame-type lattice structures, summarized in [2], where the analysis was restricted to static problems. More sophisticated modelling approach, based on the asymptotic procedures of the homogenization theory, leads to the formulation of continuum models for periodic structures but neglects the effect of the unit cell size on the global behaviour of discrete system.

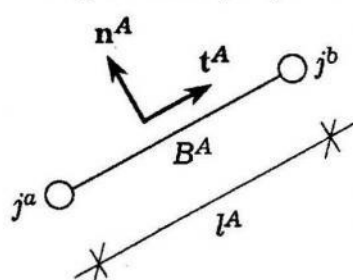
The model proposed is based on the concept of internal variables, [3], being able to describe dynamics of lattice-type plates of an arbitrary complex lay-out. It is assumed that the length dimension in Ox_1x_2 -plane of every rigid nodal joint are negligibly small as compared with the spans of interconnecting beams. The obtained model involves the effect of size of the representative periodicity cell on the global behaviour of plate under consideration. The governing equations of the model are applied to the analysis of free vibrations in the rectangular lattice structure.

Denotations. Subscripts i, j, k, l run over 1, 2 and are related to Cartesian orthogonal coordinates x_1, x_2 in the Ox_1x_2 -plane. Indices a and A run over 1, ..., n and 1, ..., N , respectively; indices α, β take the values 1, ..., $n-1$. Summation convention holds for all aforementioned indices unless otherwise stated. Points on the Ox_1x_2 -plane are denoted by $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ and t is the time coordinate.

Preliminaries and modelling assumptions. Let $\Delta = (-0.5l_1, 0.5l_1) \times (-0.5l_2, 0.5l_2)$ represent a cell on Ox_1x_2 -plane which is assumed to be representative for a whole periodic lattice, cf. Fig. 1. It means that Δ contains the representative structural element for the lattice-type plate. It has to be emphasized that the choice of this element is not unique and depends on the class of motions we are investigate. It is assumed that the underformed representative element is made of N prismatic linear-elastic beams B^A , $A = 1, \dots, N$ axes of which are situated on the plane Ox_1x_2 . The beams B^A in the representative cell are interconnected by n rigid joints j^a , $a = 1, \dots, n$. It is assumed that Ox_1x_2 is a symmetry plane, both for every beam and every rigid joint treated as certain spatial (3-dimensional) elements. The beams are subjected to bending and torsion in the planes perpendicular to Ox_1x_2 -plane and the rigid joints rotate in the aforementioned planes and their centers displace in the direction normal to Ox_1x_2 -plane. By Ω we define a region on Ox_1x_2 -plane obtained as an interior of a union of all closures of repeated cells. It has to be remembered that the periodic structure of the whole lattice-type plate can be disturbed in the structural elements situated near the boundary $\partial\Omega$ of Ω .

Denoting by L the smallest characteristic length dimension of Ω and setting $l := \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ it will be assumed that $l/L \ll 1$. This is why l will be referred to as the microstructure length parameter of the lattice-type plate.

Significant properties of a beam B^A will be given by the flexural stiffness



EI^A , the torsional stiffness GI_0^A and the span l^A . The concentrated mass assigned to a joint j^a will be denoted by M^a . The rotational moment of inertia of a joint j^a will be represented by the second order tensor J_{ij}^a . To every beam B^A we shall assign unit vectors $\mathbf{t}^A, \mathbf{n}^A$ shown in Fig. 2.

Let us denote by w^a a displacement (deflection) of the joint j^a in the direction of x_3 -axis and

Fig. 2. Orientation of beam B^A .

by φ_n^a and φ_t^a rotations of j^a in the planes normal to $\mathbf{t}^A$, $\mathbf{n}^A$, respectively. Assuming that joints j^a and j^b are interconnected by a beam B^A denote

$$\Delta_A w := (w^b - w^a)/l^A, \quad \varphi_{An} := 0.5(\varphi_n^a + \varphi_n^b), \quad \Delta_A \varphi_n := \varphi_n^b - \varphi_n^a, \quad \Delta_A \varphi_t := \varphi_t^b - \varphi_t^a, \quad (1)$$

Let us also assume that every beam B^A can be considered in the framework of the Euler-Bernoulli beam theory. Then the strain components related to B^A can be taken in the form (no summation over A in formulae (2)–(4))

$$\tilde{\varepsilon}^A := \Delta_A w + \varphi_{An}, \quad \kappa^A := \Delta_A \varphi_n, \quad \tilde{\kappa}^A := \Delta_A \varphi_t. \quad (2)$$

Hence, using additional notations

$$\tilde{\Lambda}^A := 12EI^A(l^A)^{-1}, \quad K^A := EI^A(l^A)^{-1}, \quad \tilde{K}^A := GI_0^A(l^A)^{-1}, \quad (3)$$

the strain energy σ^A assigned to a beam B^A is equal to

$$\sigma^A = \frac{1}{2} \tilde{\Lambda}^A (\tilde{\varepsilon}^A)^2 + \frac{1}{2} K^A (\kappa^A)^2 + \frac{1}{2} \tilde{K}^A (\tilde{\kappa}^A)^2. \quad (4)$$

It has to be remembered that all aforementioned denotations and formulae are related to an arbitrary but fixed repeated element of the periodic lattice-type plate under consideration (possibly except some elements situated near boundary $\partial\Omega$ of Ω).

Let us denote by $\mathcal{L}$ set of all points on the plane Ox_1x_2 which are centers of all mutually disjointed cells constituting the region Ω . Then the deflection and rotation vector of the joint j^a belonging to a cell with center $\mathbf{z}$, $\mathbf{z} \in \mathcal{L}$, at an arbitrary instant t , will be denoted by $w^a(\mathbf{z}, t)$, $\varphi^a(\mathbf{z}, t)$, respectively. All external loads acting on the medium are assumed to be applied exclusively to the centers of rigid joints. The resultant external force and external couples applied to the joint j^a in a cell with a center $\mathbf{z} \in \mathcal{L}$ will be denoted by $f^a(\mathbf{z}, t)$ and $\mathbf{m}^a(\mathbf{z}, t)$, respectively. Introducing the action functional $\mathcal{A} = \mathcal{I} - \mathcal{K} - \mathcal{W}$ where

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{L}} \sum_{A=1}^N \left[\tilde{\Lambda}^A (\tilde{\varepsilon}^A(\mathbf{z}, t))^2 + K^A (\kappa^A(\mathbf{z}, t))^2 + \tilde{K}^A (\tilde{\kappa}^A(\mathbf{z}, t))^2 \right], \\ \mathcal{K} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{L}} \sum_{a=1}^n \left[M^a (\dot{w}^a(\mathbf{z}, t))^2 + J_{ij}^a \dot{\varphi}_i^a(\mathbf{z}, t) \dot{\varphi}_j^a(\mathbf{z}, t) \right], \\ \mathcal{W} &= \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{L}} \sum_{a=1}^n \left[f^a(\mathbf{z}, t) w^a(\mathbf{z}, t) + m_i^a(\mathbf{z}, t) \varphi_i^a(\mathbf{z}, t) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

and taking into account formulae (1), (2), from the principle of stationary action we derive equations of motion for $w^a(\mathbf{z}, t)$, $\varphi_i^a(\mathbf{z}, t)$, $\mathbf{z} \in \mathcal{L}$, $a = 1, \dots, n$, $i = 1, 2$. These equations represent a discrete model of a periodic lattice-type plate but are not convenient in investigations of its global dynamic behaviour since the number of points $\mathcal{L}$ is very large. That is why relations (1), (2), (5) together with assumptions formulated below will be treated only as a basis for deriving a continuum model of the lattice-type plate under consideration.

In order to pass from the discrete model of the periodic lattice-type plate under consideration to a certain refined continuum model we have to recall two auxiliary concepts of the theory of periodic materials and structures introduced in [1,3]. The first from them is the concept of a slowly varying function. Let $F(\cdot, t)$ be a sufficiently regular real-valued function defined on Ω and depending on time t , the values of which for every t and every $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ such that $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < l$ satisfy conditions $|F(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{y}, t)| < \varepsilon_F$, where ε_F is a positive number determining the accuracy of calculations of F . If similar conditions hold also for all derivatives of F (including time-derivatives) then $F(\cdot, t)$ will be called a regular slowly varying function (related to the microstructure length parameter l and to certain accuracy parameters $\varepsilon_F, \varepsilon_{\nabla F}, \varepsilon_{\ddot{F}}, \dots$).

The second auxiliary concept is that of an oscillation-shape matrix. Define $\nu := n - 1$ and let $h^{a\alpha}, g^{a\alpha}, \alpha = 1, \dots, \nu$ be the real numbers constituting $n \times \nu$ matrices of a rank ν and satisfying conditions

$$\sum_{a=1}^n M^a h^{a\alpha} = 0, \quad \sum_{a=1}^n J_{ij}^a g^{a\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, \nu, \quad i, j = 1, 2. \quad (6)$$

The physical meaning of these concepts will be explained below.

The first modelling hypothesis interrelates the deflection $w^a(\mathbf{z}, t)$ and the rotations $\varphi_i^a(\mathbf{z}, t)$ of the joint j^a in a cell with the center $\mathbf{z}, \mathbf{z} \in \mathcal{L}$, with certain regular slowly varying functions $W(\cdot, t), Q^a(\cdot, t), \Phi_i(\cdot, t), R_i^a(\cdot, t)$ which will be treated as basic kinematic unknowns. This hypothesis will be assumed in the form

$$\begin{aligned} w^a(\mathbf{z}, t) &= W(\mathbf{x}, t) + l h^{a\alpha} Q^\alpha(\mathbf{x}, t), \\ \varphi_i^a(\mathbf{z}, t) &= \Phi_i(\mathbf{x}, t) + l g^{a\alpha} R_i^\alpha(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{z} \in \mathcal{L}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \quad (7)$$

where $\mathbf{x}$ is a position vector of the joint j^a . Bearing in mind conditions (6) imposed on $h^{a\alpha}, g^{a\alpha}$ and because of $|W(\mathbf{x}, t) - W(\mathbf{z}, t)| < \varepsilon_W, |\Phi_i(\mathbf{x}, t) - \Phi_i(\mathbf{z}, t)| < \varepsilon_{\Phi_i}$,

etc., under denotations $M = \sum_{a=1}^n M^a, J_{ik} = \sum_{a=1}^n J_{ik}^a$ we obtain

$$\begin{aligned} W(\mathbf{z}, t) &= M^{-1} \sum_{a=1}^n M^a w^a(\mathbf{z}, t) + O(\varepsilon_W) + O(\varepsilon_Q), \\ \Phi_i(\mathbf{z}, t) &= J_{ik}^{-1} \sum_{a=1}^n J_{kl}^a \varphi_l^a(\mathbf{z}, t) + O(\varepsilon_\Phi) + O(\varepsilon_R), \quad \mathbf{z} \in \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (8)$$

where $\mathbf{J}^{-1}$ is the inverse of the matrix $\mathbf{J}$ with components J_{ik} . It can be seen that the fields $W(\mathbf{z}, t), \Phi_i(\mathbf{z}, t)$ represent respectively weighted averaged deflections and rotations of repeated elements of the structure, while $Q^a(\mathbf{z}, t), R_i^a(\mathbf{z}, t)$ describe respectively the disturbances in deflections and rotations at a

time t within these elements caused by the complex lay-out of the lattice-type plate under consideration. Fields Q^α, R_i^α will be called internal variables; the meaning of this term will be explained below.

The second modelling hypothesis is related to the concept of slowly varying function on the basis of which we shall approximate finite differences of these functions by the values of appropriate derivatives and we shall neglect increments of introduced functions inside an arbitrary cell in calculation of averages over this cell. From this hypothesis we obtain the formulae for strain components in an arbitrary beam B^A belonging to a cell with the center $\mathbf{z}$. To this end, under assumption that joints j^a, j^b are interconnected by a beam B^A , define $h^{A\alpha} := h^{b\alpha} - h^{a\alpha}$, $g_A^\alpha := 0.5(g^{a\alpha} + g^{b\alpha})$, $g^{A\alpha} := g^{b\alpha} - g^{a\alpha}$ and $\lambda^A = l/l^A$. Also define

$$\Gamma_i(\mathbf{x}, t) := W_{,i}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon_{ij} \Phi_j(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (9)$$

where ε_{ij} stand for the Ricci symbol. After simple calculations from (2), (7) and (9) we obtain (no summation over A !)

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^A(\mathbf{z}, t) &= t_i^A \Gamma_i(\mathbf{z}, t) + \lambda^A h^{A\alpha} Q^\alpha(\mathbf{z}, t) + l n_i^A g_A^\alpha R_i^\alpha(\mathbf{z}, t), \\ \kappa^A(\mathbf{z}, t) &= l^A n_i^A t_j^A \Phi_{i,j}(\mathbf{z}, t) + l n_i^A g^{A\alpha} R_i^\alpha(\mathbf{z}, t), \\ \tilde{\kappa}^A(\mathbf{z}, t) &= l^A t_i^A t_j^A \Phi_{i,j}(\mathbf{z}, t) + l t_i^A g^{A\alpha} R_i^\alpha(\mathbf{z}, t), \quad \mathbf{z} \in \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (10)$$

It has to be emphasized that restrictions imposed on the class of motions under consideration reduce to the requirement that the basic unknown fields $W(\cdot, t)$, $Q^\alpha(\cdot, t)$, $\Phi_i(\cdot, t)$, $R_i^\alpha(\cdot, t)$ have to be regular slowly varying functions for every t . Let us also observe that the oscillation-shape matrices $h^{a\alpha}$, $g^{a\alpha}$, $a = 1, \dots, n$, $\alpha = 1, \dots, n-1$, are not uniquely determined but their choice is irrelevant.

Governing equations. The governing equations for the deflection W , rotations Φ_i and the extra unknowns Q^α , R_i^α will be obtained from the principle of stationary action under the assumptions formulated above. It can be seen that the finite sums over $\mathcal{L}$ in formulae (5) can be approximated by integrals over Ω . Setting $|\Delta| = l_1 l_2$ let us introduce the notations

$$\begin{aligned} A_{ij} &:= |\Delta|^{-1} \sum_{A=1}^N \tilde{\Lambda}^A t_i^A t_j^A, & C_{ijkl} &:= |\Delta|^{-1} \sum_{A=1}^N (l^A)^2 (\tilde{\Lambda}^A n_i^A n_k^A + \tilde{\Lambda}^A t_i^A t_k^A) t_j^A t_l^A, \\ A^{\alpha\beta} &:= |\Delta|^{-1} \sum_{A=1}^N (\lambda^A)^2 \tilde{\Lambda}^A h^{A\alpha} h^{A\beta}, \\ A_{ij}^{\alpha\beta} &:= |\Delta|^{-1} \sum_{A=1}^N [\tilde{\Lambda}^A n_i^A n_j^A g_A^\alpha g_A^\beta + (\tilde{\Lambda}^A n_i^A n_j^A + \tilde{\Lambda}^A t_i^A t_j^A) g^{A\alpha} g^{A\beta}], \\ B_{ijk}^\alpha &:= |\Delta|^{-1} \sum_{A=1}^N (\lambda^A)^{-1} (\tilde{\Lambda}^A n_i^A n_j^A + \tilde{\Lambda}^A t_i^A t_j^A) t_k^A g^{A\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_i^\alpha &:= |\Delta|^{-1} \sum_{A=1}^N \lambda^A \tilde{\Lambda}^A t_i^A h^{A\alpha}, & D_{ij}^\alpha &:= |\Delta|^{-1} \sum_{A=1}^N \tilde{\Lambda}^A t_i^A n_j^A g_A^\alpha, \\
D_i^{\alpha\beta} &:= |\Delta|^{-1} \sum_{A=1}^N \lambda^A \tilde{\Lambda}^A n_i^A h^{A\alpha} g_A^\beta, & \rho &:= |\Delta|^{-1} \sum_{a=1}^n M^a, & \chi_{ij} &:= h^{-2} |\Delta|^{-1} \sum_{a=1}^n J_{ij}^a, \\
\rho^{\alpha\beta} &:= |\Delta|^{-1} \sum_{a=1}^n M^a h^{a\alpha} h^{a\beta}, & \chi_{ij}^{\alpha\beta} &:= h^{-2} |\Delta|^{-1} \sum_{a=1}^n J_{ij}^a g^{a\alpha} g^{a\beta},
\end{aligned} \tag{11}$$

where h stands for mean height of the beams in the direction normal to Ox_1x_2 -plane.

Moreover, let us assume that there exist continuous functions $f(\cdot, t)$, $f^\alpha(\cdot, t)$, $m_i(\cdot, t)$, $m_i^\alpha(\cdot, t)$ defined on Ω for every t being the slowly varying functions, such that the conditions

$$f(\mathbf{z}, t) = |\Delta|^{-1} \sum_{a=1}^n f^a(\mathbf{z}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon_f), \quad f^\alpha(\mathbf{z}, t) = |\Delta|^{-1} \sum_{a=1}^n f^a(\mathbf{z}, t) h^{a\alpha} + \mathcal{O}(\varepsilon_f), \tag{12}$$

$$m_i(\mathbf{z}, t) = h^{-1} |\Delta|^{-1} \sum_{a=1}^n m_i^a(\mathbf{z}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon_m), \quad m_i^\alpha(\mathbf{z}, t) = h^{-1} |\Delta|^{-1} \sum_{a=1}^n m_i^a(\mathbf{z}, t) g^{a\alpha} + \mathcal{O}(\varepsilon_m),$$

hold for every $\mathbf{z} \in \mathcal{L}$. After substituting to (5) the right-hand sides of equations (7), (10), (12) and taking into account the approximation hypothesis (related to calculations of averages), as well as the conditions (6) and the notations (11), we arrive at the integral form of the action functional $\mathcal{A} = \mathcal{F} - \mathcal{K} - \mathcal{W}$, where now

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} A_{ij} \Gamma_i \Gamma_j + \frac{1}{2} C_{ijkl} \Phi_{i,j} \Phi_{k,l} + \frac{1}{2} A^{\alpha\beta} Q^\alpha Q^\beta + \frac{1}{2} l^2 A_{ij}^{\alpha\beta} R_i^\alpha R_j^\beta + \right. \\
&\quad \left. + l^2 B_{ijk}^\alpha R_i^\alpha \Phi_{j,k} + D_i^\alpha \Gamma_i Q^\alpha + l D_{ij}^\alpha \Gamma_i R_j^\alpha + l D_i^{\alpha\beta} Q^\alpha R_i^\beta \right) dx_1 dx_2, \\
\mathcal{K} &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{W} \dot{W} + \frac{1}{2} l^2 \rho^{\alpha\beta} \dot{Q}^\alpha \dot{Q}^\beta + \frac{1}{2} h^2 \chi_{ij} \dot{\Phi}_i \dot{\Phi}_j + \frac{1}{2} h^2 l^2 \chi_{ij}^{\alpha\beta} \dot{R}_i^\alpha \dot{R}_j^\beta \right) dx_1 dx_2, \\
\mathcal{W} &= \int_{\Omega} (fW + l f^\alpha Q^\alpha + h m_i \Phi_i + h l m_i^\alpha R_i^\alpha) dx_1 dx_2.
\end{aligned} \tag{13}$$

From the principle of stationary action we obtain the following equations for a deflection W and rotations Φ_i

$$(A_{ij} \Gamma_j + D_i^\alpha Q^\alpha + l D_{ij}^\alpha R_j^\alpha)_{,i} - \rho \ddot{W} + f = 0, \tag{14}$$

$$(C_{kijl} \Phi_{j,l} + l^2 B_{kji}^\alpha R_j^\alpha)_{,i} + \varepsilon_{ki} (A_{ij} \Gamma_j + D_i^\alpha Q^\alpha + l D_{ij}^\alpha R_j^\alpha) - h^2 \chi_{ki} \ddot{\Phi}_i + h m_{,k} = 0,$$

which are coupled with equations for extra unknowns Q^α, R_i^α :

$$\begin{aligned}
l^2 \rho^{\alpha\beta} \ddot{Q}^\beta + A^{\alpha\beta} Q^\beta + D_i^\alpha \Gamma_i + l D_{ij}^{\alpha\beta} R_j^\beta &= l f^\alpha, \\
h^2 l^2 \chi_{ij}^{\alpha\beta} \ddot{R}_j^\beta + l^2 A_{ij}^{\alpha\beta} R_j^\beta + l D_{ji}^\alpha \Gamma_j + l^2 B_{ijl}^\alpha \Phi_{j,l} + l D_i^{\beta\alpha} Q^\beta &= h l m_i^\alpha,
\end{aligned} \tag{15}$$

where Γ_j is defined by Eq. (9). The obtained equations have to be satisfied for every t in the region Ω of Ox_1x_2 and represent a continuum model of the periodic lattice-type plate under consideration.

It can be seen that the extra unknowns Q^α, R_i^α are governed by the ordinary differential equations (15). Hence in general Q^α, R_i^α do not enter boundary conditions and that is why they have been called internal variables. Similarly, the obtained continuum model will be referred to as the internal variable model (IV-model).

The governing equations (14), (15) can be also written in the alternative form given by:

(i) Equations of motion

$$P_{i,i} - \rho \ddot{W} + f = 0, \quad M_{ki,i} + \varepsilon_{ki} P_i - h^2 \chi_{ki} \ddot{\Phi}_i + h m_k = 0. \quad (16)$$

(ii) Dynamic evolution equations

$$l^2 \rho^{\alpha\beta} \ddot{Q}^\beta + S^\alpha = l f^\alpha, \quad h^2 l^2 \chi_{ij}^{\alpha\beta} \ddot{R}_j^\beta + H_i^\alpha = h l m_i^\alpha. \quad (17)$$

(iii) Constitutive equations

$$\begin{bmatrix} P_i \\ M_{ki} \\ S^\alpha \\ H_i^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & 0 & D_i^\beta & l D_{ij}^\beta \\ 0 & C_{kijl} & 0 & l^2 B_{kji}^\beta \\ D_i^\alpha & 0 & A^{\alpha\beta} & l D_j^{\alpha\beta} \\ l D_{ji}^\alpha & l^2 B_{ijl}^\alpha & l D_i^{\beta\alpha} & l^2 A_{ij}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_j \\ \Phi_{j,l} \\ Q^\beta \\ R_j^\beta \end{bmatrix}, \quad (18)$$

which have to be considered together with $\Gamma_i = W_{,i} + \varepsilon_{ij} \Phi_j$. From a formal viewpoint equations (16) are similar to the known plate-type Cosserat continuum equations, [2]. However, contrary to the Cosserat media, we also deal here with dynamic evolution equations (17) which are coupled with Cosserat equations (16) *via* the constitutive equations (18).

Let us observe that the nonasymptotic modelling procedure applied above leads to the occurrence of the microstructure length parameter l in equations (16)-(18); that is why the effect of cell size on the dynamic behaviour of structure can be described in the framework of proposed model.

The governing equations of internal variable model describe dynamics of lattice-type plate of an arbitrary complex periodic lay-out in the Ox_1x_2 -plane. If we deal with the latticed plate of a simple lay-out, i.e., having only one rigid joint in every repeated element (in this case $n = 1$) then Q^α, R_i^α drop out from all equations and we pass to the Cosserat model of lattice-type plate which coincides with that discussed in [2].

Example. The governing equations of internal variable model will be now applied to the analysis of free vibrations of the lattice-type plate strip simply supported on the opposite edges $x_1 = \pm 0.5L$; the lay-out of this latticed plate is shown in Fig. 3. We shall consider the simplest continuum model of this structure; that is why the cell Δ will be assumed in the form given in Fig. 3. This cell has two rigid joints; in this case $n = 2$ and $v = n - 1 = 1$, i.e., the oscilla-

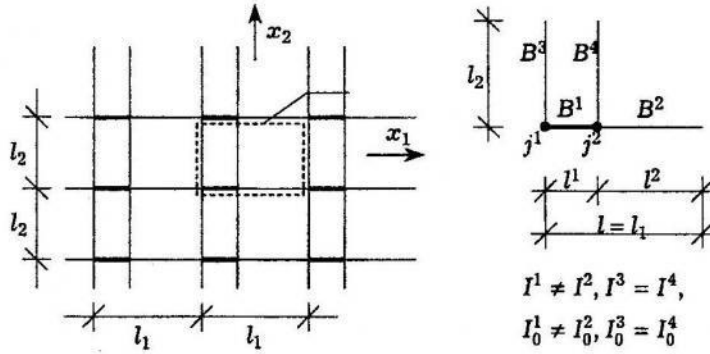


Fig. 3. Scheme of the lattice-type plate and its representative element Δ .

tion-shape matrices reduce to vectors with components h^{11}, h^{21} and g^{11}, g^{21} . Moreover, let the axes of all beams be parallel to the pertinent coordinate axes x_1, x_2 . Let us consider the case in which the material of every beam is characterized by the Young modulus E and the Kirchhoff modulus G ; the inertia moments $I^A, I_0^A, A = 1,$

..., 4 are interrelated as shown in Fig. 3. In this special case masses assigned to all nodal joints are equal and the rotational inertia moments assigned to all joints satisfy conditions $J_{12}^a = J_{21}^a = 0, a = 1, 2$. Assuming that all unknown functions depend only on x_1 and time t , bearing in mind definitions (9), (11) and neglecting external loadings, from (14), (15) we obtain three independent systems of equations. The first of them is related to unknowns W, Φ_2 and Q^1 :

$$\begin{aligned} A_{11}(W_{,1} + \Phi_2)_{,1} + D_1^1 Q_{,1}^1 - \rho \ddot{W} &= 0, \\ C_{2121} \Phi_{2,11} - A_{11}(W_{,1} + \Phi_2) - D_1^1 Q^1 - h^2 \chi_{22} \ddot{\Phi}_2 &= 0, \\ l^2 \rho^{11} \ddot{Q}^1 + A^{11} Q^1 + D_1^1 (W_{,1} + \Phi_2) &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

the second one is related to unknowns Φ_1, R_1^1 :

$$\begin{aligned} C_{1111} \Phi_{1,11} + l^2 B_{111}^1 R_{1,1}^1 - A_{22} \Phi_1 - h^2 \chi_{11} \ddot{\Phi}_1 &= 0, \\ h^2 l^2 \chi_{11}^{11} \ddot{R}_1^1 + l^2 A_{11}^{11} R_1^1 + l^2 B_{111}^1 \Phi_{1,1} &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

and we also obtain an independent equation for R_2^1 :

$$h^2 l^2 \chi_{22}^{11} \ddot{R}_2^1 + l^2 A_{22}^{11} R_2^1 = 0, \quad (21)$$

where $l = l_1$ is the microstructure length parameter shown in Fig. 3. In the above systems of equations we also deal with another length parameter h , where $h \ll l$. That is why we shall look for the free vibration frequencies of the plate neglecting terms involving h^2 . Under this assumption, setting $W = a_W \exp i(\omega t - kx_1), \Phi_2 = a_\Phi \exp i(\omega t - kx_1), Q^1 = a_Q \exp i(\omega t - kx_1)$, for the free vibration frequency ω we obtain the dispersion relation

$$\begin{aligned} \rho^2 (A_{11} l^2 + C_{2121} \varepsilon^2) \omega^4 - \rho [A_{11} A^{11} - (D_1^1)^2 + (A_{11} \varepsilon^2 + A^{11}) C_{2121} k^2] \omega^2 + \\ + [A_{11} A^{11} - (D_1^1)^2] C_{2121} k^4 = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

where $\varepsilon := kl = 2\pi l/L$, L being the wavelength, is a nondimensional parameter. Because W, Φ_2, Q^1 have to be regular slowly varying functions hence

$l/L \ll 1$ and parameter ε is sufficiently small compared to 1. From (22) we obtain the asymptotic formulae for free vibration frequencies which can be expressed in the following form

$$(\omega_1)^2 = \frac{C_{2121}}{\rho} k^4 + O(\varepsilon^6), \quad (\omega_2)^2 = \frac{A_{11} A^{11} - (D_1^1)^2}{l^2 \rho (A_{11} + C_{2121} k^2)} + O(\varepsilon^{-2}), \quad (23)$$

where coefficients C_{2121} , A_{11} , A^{11} , D_1^1 , ρ calculated from formulae (11) are equal to

$$\begin{aligned} C_{2121} &= E (I^1 l^1 + I^2 l^2) / (l_1 l_2), & A_{11} &= 12E (I^1 / l^1 + I^2 / l^2) / (l_1 l_2), \\ A^{11} &= 48E l_1 [I^1 / (l^1)^3 + I^2 / (l^2)^3] / l_2, & D_1^1 &= 24E [I^2 / (l^2)^2 - I^1 / (l^1)^2] / l_2, \\ \rho &= 2M / (l_1 l_2). \end{aligned} \quad (24)$$

It can be seen that the dispersion effect as well as higher vibration frequency ω_2 described by the above formulae are caused by the presence in equations (14), (15) terms involving the microstructure parameter l . It has to be emphasized that using the known homogenized continuum model of latticed plates we can obtain only lower vibration frequency $\omega^2 = \rho^{-1} C_{2121} k^4$.

More detailed approach to the problems investigated in this contribution will be given in a forthcoming paper.

1. Cielecka I., Woźniak C., Woźniak M. Internal variables in macrodynamics of two-dimensional periodic cellular media // Arch. Mech. – 1998. – 50. – P. 3–19.
2. Woźniak C. Lattice surface structures [in Polish]. – Warsaw: At the PWN, 1970. – 373 p.
3. Woźniak C. Internal variables in dynamics of composite solids with periodic microstructure // Arch. Mech. – 1997. – 49. – P. 421–441.

Івона Цілецька

КОНТИНУАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СІТКОВИХ ПЛАСТИН

Запропоновано континуальну модель періодичних лінійно-пружних сіткових пластин, яка враховує вплив розміру мікроструктури на динамічну поведінку пластини. Одержані рівняння використано для аналізу поширення хвиль у частинному випадку сіткової пластини. Доведено, що масштабний ефект відіграє важливу роль, і ним не можна нехтувати під час аналізу.

Стаття надійшла до редколегії 03.08.99

Jowita Rychlewska, Jolanta Szymczyk, Czesław Woźniak

*Institute of Mathematics and Computer Sciences
Częstochowa University of Technology*

A DISCRETE MODEL FOR WAVE PROPAGATION PROBLEMS IN PERIODIC COMPOSITE MEDIA

In most cases the exact analysis of problems on wave propagation in material continua with periodic structure is not possible even using computer methods. That is why different approximate mathematical models for wave propagation in heterogeneous periodic media have been proposed, cf. [1-5]. In this contribution we are to show that above problems can be modelled by certain discrete plane periodic mass-point systems with a complex structure and ternary interactions. For the sake of simplicity considerations will be restricted to the linear-elastic material structures and plane problems for an unbounded medium. At the end of the lecture we are to show an example of applications of the general theory.

Notations. The superscripts a, b, c run over $1, \dots, n$ and the superscript k takes the values $1, \dots, m$. Indices A, B, C run over $0, 1, \dots, N$ except in denotations $\Delta_A, \bar{\Delta}_A$ where $A = 1, \dots, N$ unless otherwise stated. Summation convention holds for all twice-repeated indices. Points on E^2 are denoted by $\mathbf{p}, \mathbf{x}$ and points belonging to a subset Λ of E^2 by $\mathbf{z}$. Symbol t stands for a time coordinate.

In order to describe a periodic structure it is convenient to introduce the Bravais lattice $\Lambda \equiv \{\mathbf{z} \in E^2 : \mathbf{z} = v_1 \mathbf{d}^1 + v_2 \mathbf{d}^2, v_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \alpha = 1, 2\}$, where $\mathbf{d}^1$ and $\mathbf{d}^2$ are basis vectors on E^2 . For an arbitrary subset Ξ of E^2 and for any $\mathbf{p} \in E^2$ define $\Xi(\mathbf{z}) \equiv \mathbf{z} + \Xi$ and $\mathbf{p}(\mathbf{z}) \equiv \mathbf{p} + \mathbf{z}, \mathbf{z} \in \Lambda$. Let Δ be a regular region on E^2 such that $E^2 = \bigcup \bar{\Delta}(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in \Lambda$ and $\Delta(\mathbf{z}_1) \cap \Delta(\mathbf{z}_2) = \emptyset$ for every $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \Lambda$ and $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{z}_2$. We shall also assume that there exist a simplicial subdivision of Δ into m simplexes $T^k, k = 1, \dots, m$, which implies the simplicial subdivision of E^2 into simplexes $T^k(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in \Lambda$. Hence $\bigcup \bar{T}^k = \bar{\Delta}$, and

$$T \equiv \{T^k(\mathbf{z}) : \mathbf{z} \in \Lambda, k = 1, \dots, m\} \quad (1)$$

constitutes a set of all simplexes for the subdivision of E^2 . It can be seen that for the aforementioned simplicial subdivision of Δ there exist a set of vertices $\mathbf{p}^a \in \bar{\Delta}, a = 1, \dots, n$, such that

$$S \equiv \{\mathbf{p}^a(\mathbf{z}) : \mathbf{z} \in \Lambda, a = 1, \dots, n\} \quad (2)$$

is a set of all vertices for the related subdivision of E^2 . In the sequel we shall assume that n is the smallest number of vertices $\mathbf{p}^a \in \bar{\Delta}$ for which S is a set

of all vertices. Under this requirement the decomposition of $\mathbf{p}^a(\mathbf{z})$ in the form $\mathbf{p}^a(\mathbf{z}) = \mathbf{p}^a + \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \in \Lambda$, $a = 1, \dots, n$ is unique. In the subsequent considerations both simplicial subdivision of Δ and a set of n vertices $\mathbf{p}^a$, $a = 1, \dots, n$, are assumed to be known. Let $\mathbf{d}^A \in \Lambda$, $A = 0, 1, \dots, N$, be a system of vectors where $\mathbf{d}^0 = \mathbf{0}$ and $\mathbf{p}^a$, $a = 1, \dots, n$ a set of vertices such that all simplex vertices belonging to $\bar{\Delta}$ can be uniquely represented in the form $\mathbf{p}_A^a = \mathbf{p}^a + \mathbf{d}^A$. Hence every T^k can be represented as $T^k = \mathbf{p}_A^a \mathbf{p}_B^b \mathbf{p}_C^c$. For an arbitrary function $f(\cdot)$ defined on S with values in a certain linear space we shall introduce the finite differences

$$\Delta_A f(\mathbf{z}) \equiv f(\mathbf{z} + \mathbf{d}^A) - f(\mathbf{z}), \quad \bar{\Delta}_A f(\mathbf{z}) \equiv f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z} - \mathbf{d}^A),$$

which for $A = 0$ reduce to identities. Hence in the sequel all finite difference operators $\Delta_A, \bar{\Delta}_A$ will be defined only for $A = 1, \dots, N$. Following the notation introduced above we also denote $T^k(\mathbf{z}) \equiv T^k + \mathbf{z}$ and $\mathbf{p}_A^a(\mathbf{z}) \equiv \mathbf{p}_A^a + \mathbf{z}$ for every $\mathbf{z} \in \Lambda$. The aforementioned concepts and definitions will be used in the subsequent considerations in order to describe wave propagation problems in periodic composite media.

Let E^2 represents a two dimensional linear-elastic continuum with a periodic piecewise homogeneous material structure and $\Delta \subset E^2$ stands for the representative element of this structure. Let the aforementioned simplicial subdivision of Δ be treated as a decomposition of Δ into m finite triangle elements T^k . It has to be assumed that every element T^k with a sufficient accuracy will be treated as homogeneous. Bearing in mind that $T^k = \mathbf{p}_A^a \mathbf{p}_B^b \mathbf{p}_C^c$ and denoting by λ^α , $\alpha = 1, 2, 3$, the barycentric coordinates of an arbitrary point $\mathbf{x} \in T^k$ we have $\lambda^\alpha > 0$, $\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 = 1$ and $\lambda^\alpha = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{x} + b^\alpha$ where $\mathbf{a}^\alpha \in E^2$ are the known vectors and b^α are the known scalars, [7]. Consequently, the displacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ of an arbitrary point $\mathbf{x} \in T^k$ at a time instant t will be taken in the form $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \lambda^1 \mathbf{u}_A^a(t) + \lambda^2 \mathbf{u}_B^b(t) + \lambda^3 \mathbf{u}_C^c(t)$ where $\mathbf{u}_A^a(t)$, $\mathbf{u}_B^b(t)$, $\mathbf{u}_C^c(t)$ are displacements of vertices $\mathbf{p}_A^a$, $\mathbf{p}_B^b$, $\mathbf{p}_C^c$, respectively, and $\lambda^\alpha = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{x} + b^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, are the shape functions. Hence the displacement gradient $\nabla \mathbf{u}$ in every $T^k = \mathbf{p}_A^a \mathbf{p}_B^b \mathbf{p}_C^c$ is equal to

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}^1 \otimes \mathbf{u}_A^a(t) + \mathbf{a}^2 \otimes \mathbf{u}_B^b(t) + \mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{u}_C^c(t), \quad \mathbf{x} \in T^k, \quad (3)$$

and constant for every time t . Substituting into (3) decompositions of the form

$$\mathbf{u}_A^a(t) = \mathbf{u}^a(t) + \Delta_A \mathbf{u}^a(t), \quad A = 0, 1, \dots, N \quad (4)$$

where $\mathbf{u}^a(t)$ is a displacement of mass point $\mathbf{p}^a \in T^k$, and introducing the linearized strain tensor

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (5)$$

we obtain the strain energy function assigned to T^k defined by

$$\Phi^k = \frac{1}{2} F^k \varepsilon : \mathbf{C}_k : \varepsilon \quad (6)$$

where F^k is the area of T^k and $\mathbf{C}_k$ is the elastic modulae tensor related to the material of finite element T^k . Combining (3)–(6) it can be seen that formula (6) makes it possible to derive function

$$\Phi^k = \Phi^k(\Delta_A \mathbf{u}^a, \mathbf{u}^b - \mathbf{u}^c), \quad (7)$$

depending on differences $\Delta_A \mathbf{u}^a$ and $\mathbf{u}^b - \mathbf{u}^c$. Hence strain energy function Φ assigned to the representative element Δ has the form

$$\Phi = \sum \Phi^k(\Delta_A \mathbf{u}^a, \mathbf{u}^b - \mathbf{u}^c). \quad (8)$$

At the same time a constant mass distribution in every $T^k(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \Lambda$, will be replaced by three concentrated masses at vertices $\mathbf{p}_A^a(\mathbf{z})$, $\mathbf{p}_B^b(\mathbf{z})$, $\mathbf{p}_C^c(\mathbf{z})$, where $T^k = \mathbf{p}_A^a \mathbf{p}_B^b \mathbf{p}_C^c$. Hence the kinetic energy function K assigned to the representative element Δ of the periodic structure is given by

$$K = \frac{1}{2} M^{ab} \dot{\mathbf{u}}^a \cdot \dot{\mathbf{u}}^b, \quad (9)$$

where $M^{ab} = \delta^{ab} m^b$ (no summation over b) and m^b is a total concentrated mass assigned to the vertex $\mathbf{p}^a$. Formulae (8), (9) hold for an arbitrary element $\Delta(\mathbf{z}) = \Delta + \mathbf{z}$, $\mathbf{z} \in \Lambda$ provided that arguments $\mathbf{u}^a$ are replaced by $\mathbf{u}^a(\mathbf{z}, t)$.

The aforementioned simplicial subdivision and concentration of masses m^a at points $\mathbf{p}^a$ makes it possible to apply the discrete plane periodic mass-point system with a complex structure and ternary interactions as a model for the analysis of wave propagation in composite materials under consideration. The above approach requires the use of a certain parametrization of applied mass-point system. We shall assume that the position of mass point system in its reference equilibrium state coincides with a set S defined by (2). Hence every mass-point will be identified with its reference position $\mathbf{p}^a(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \Lambda$, $a = 1, \dots, n$ and it will be assumed that to every point $\mathbf{p}^a(\mathbf{z}) \in S$ there is assigned mass m^a which due to the periodicity of system is independent of $\mathbf{z} \in \Lambda$. The system of ternary interactions will be parametrized by a set T of all simplexes assuming that points $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in S$ can interact if and only if $\mathbf{x}_1 = \mathbf{p}_A^a(\mathbf{z})$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{p}_B^b(\mathbf{z})$, $\mathbf{x}_3 = \mathbf{p}_C^c(\mathbf{z})$ for some $\mathbf{z} \in \Lambda$, where $\mathbf{p}_A^a(\mathbf{z}) \mathbf{p}_B^b(\mathbf{z}) \mathbf{p}_C^c(\mathbf{z}) = T^k(\mathbf{z})$ for some $k \in \{1, \dots, m\}$. Hence every simplex $T^k(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \Lambda$, $k = 1, \dots, m$, will be identified with a certain ternary interaction. To every interaction $T^k(\mathbf{z}) \in T$ there is assigned a strain energy function Φ^k which by means of the periodicity of system is independent of $\mathbf{z} \in \Lambda$. Bearing in mind that $\mathbf{u}_A^a(\mathbf{z}, t)$ is

a displacement vector of point $\mathbf{p}_A^a(\mathbf{z})$ at time t we obtain that arguments of Φ^k are $|\mathbf{u}_A^a(\mathbf{z}, t) - \mathbf{u}_B^b(\mathbf{z}, t)|$. Because of $\mathbf{u}_A^a(\mathbf{z}, t) = \Delta_A \mathbf{u}^a(\mathbf{z}, t) + \mathbf{u}^a(\mathbf{z}, t)$ we obtain $\Phi^k = \Phi^k(\Delta_A \mathbf{u}^a(\mathbf{z}, t), \mathbf{u}^b(\mathbf{z}, t) - \mathbf{u}^c(\mathbf{z}, t))$ bearing in mind that $\Phi^k(\cdot)$ are hermitropic functions of arguments which are specified by simplex $T^k = \mathbf{p}_A^a \mathbf{p}_B^b \mathbf{p}_C^c$.

It is evident that to every $\mathbf{z} \in \Lambda$ there is assigned a certain repetitive element of the periodic mass-point system comprising n mass points $\mathbf{p}^a(\mathbf{z})$, $a = 1, \dots, n$, and m ternary interactions $T^k(\mathbf{z})$, $k = 1, \dots, m$. The strain and kinetic energy functions assigned to an arbitrary repetitive element are respectively given by

$$\Phi = \sum \Phi^k(\Delta_A \mathbf{u}^a(\mathbf{z}, t), \mathbf{u}^b(\mathbf{z}, t) - \mathbf{u}^c(\mathbf{z}, t)), \quad (10)$$

$$K = \frac{1}{2} M^{ab} \dot{\mathbf{u}}^a(\mathbf{z}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}^b(\mathbf{z}, t). \quad (11)$$

Using the approach detailed in [6] it can be shown that the above formulae lead to the following equations of motion

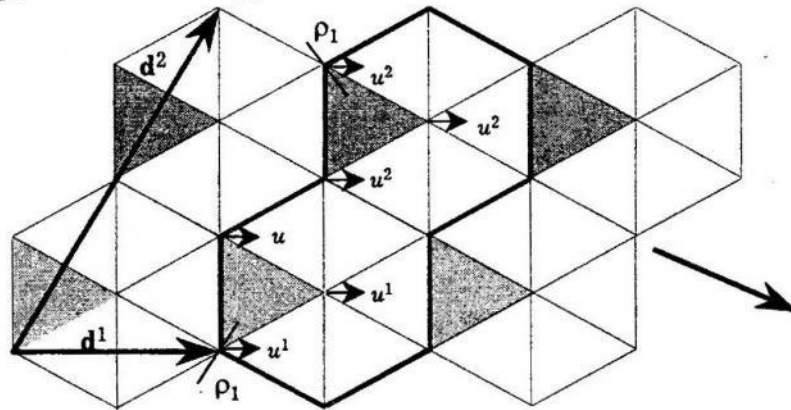
$$\Delta_A \mathbf{S}_A^a(\mathbf{z}, t) + \mathbf{h}^a(\mathbf{z}, t) - M^{ab} \ddot{\mathbf{u}}^b(\mathbf{z}, t) + \mathbf{f}^a(\mathbf{z}, t) = \mathbf{0} \quad (12)$$

where $\mathbf{f}^a(\mathbf{z}, t)$ is an external force acting at $\mathbf{p}^a(\mathbf{z})$ at time t and $\mathbf{S}_A^a$, $\mathbf{h}^a$ are generalized internal forces defined by the constitutive equations

$$\mathbf{S}_A^a(\mathbf{z}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_A \mathbf{u}^a(\mathbf{z}, t)}, \quad \mathbf{h}^a(\mathbf{z}, t) = - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}^a(\mathbf{z}, t)}. \quad (13)$$

Equations (12), (13) have to hold for an arbitrary time instant t and every $\mathbf{z} \in \Lambda$. Taking into account the aforementioned considerations we jump to the conclusion that equations (12), (13) are the governing equations of linear-elastic composite materials in the finite element approximation. Hence, we have obtained a discrete model for the wave propagation problems in periodic composite media.

General considerations will be illustrated by the example of dispersion analysis for the unbounded, linear-elastic, isotropic, homogeneous medium with periodically distributed two kinds of rigid inclusions having mass densities ρ_1 , ρ_2 , as shown in figure.



In the analysis we shall restrict ourselves to displacements parallel to vector $\mathbf{d}^1$ and to the plane wave propagation in direction shown in figure. Dynamics of this structure will be modelled by the Bravais lattice with ternary interactions and basis vectors $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2$. A representative element of this structure is bounded by the bold line in figure.

Let a simplicial subdivision of this element will be given by its decomposition into m equi-angular triangle elements. In the subsequent considerations $m = 1, \dots, 10$, because two inclusions in the repeated element are rigid. The strain energy function assigned to T^m is $\Phi^m = \frac{1}{2} F^m \sigma_{\alpha\beta}^m \varepsilon_{\alpha\beta}^m$ where F^m is the area of T^m and $\sigma_{\alpha\beta}^m, \varepsilon_{\alpha\beta}^m$ are stress and strain tensors, respectively. Relationship between stress tensor and strain tensor in an elastic isotropic medium in the small strain range can be written as $\sigma_{\alpha\beta}^m = \lambda \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma}^m + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}^m$, where λ and μ are Lamé constants. Let h be the height of triangle elements T^m , and define $d = 2h$, $\kappa_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\lambda + 5\mu)$, $\kappa_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\lambda + 2\mu)$, $m_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} h^2 (5\rho + \rho_\alpha)$, where ρ and ρ_α , $\alpha = 1, 2$, are mass densities related to the deformable and rigid simplexes, respectively. Then using formulae (10)–(13) we obtain the following equations of motion:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}^1(x, t) &= \kappa_1 (u^2(x-d, t) + 2u^2(x, t) + u^2(x+d, t) - 4u^1(x, t)) + \\ &\quad + \kappa_2 (u^1(x-d, t) - 2u^1(x, t) + u^1(x+d, t)), \\ m_2 \ddot{u}^2(x, t) &= \kappa_1 (u^1(x-d, t) + 2u^1(x, t) + u^1(x+d, t) - 4u^2(x, t)) + \\ &\quad + \kappa_2 (u^2(x-d, t) - 2u^2(x, t) + u^2(x+d, t)). \end{aligned} \quad (14)$$

Let us look for the wave solution to these equations in the form

$$u^1(x, t) = A_1 e^{i(kx - \omega t)}, \quad u^2(x, t) = A_2 e^{i(kx - \omega t)}. \quad (15)$$

The substitution of equations (15) into (14) yields the system of two equations for A_1 and A_2

$$A_1 (2\kappa_2 (\cos dk - 1) - 4\kappa_1 + m_1 \omega^2) + A_2 2\kappa_1 (\cos dk + 1) = 0,$$

$$A_1 2\kappa_1 (\cos dk + 1) + A_2 (2\kappa_2 (\cos dk - 1) - 4\kappa_1 + m_2 \omega^2) = 0.$$

Nontrivial solutions A_1, A_2 exist if

$$\begin{vmatrix} 2\kappa_2 (\cos dk - 1) - 4\kappa_1 + m_1 \omega^2 & 2\kappa_1 (\cos dk + 1) \\ 2\kappa_1 (\cos dk + 1) & 2\kappa_2 (\cos dk - 1) - 4\kappa_1 + m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

This condition yields a relation between ω and k in the form of two dispersion branches

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{m_1 m_2} [(m_1 + m_2)(2\kappa_1 - \kappa_2 (\cos dk - 1)) \pm \\ &\quad \pm \sqrt{[2\kappa_1 - \kappa_2 (\cos dk - 1)]^2 (m_1 - m_2)^2 + 4\kappa_1^2 m_1 m_2 (\cos dk + 1)^2}]. \end{aligned} \quad (16)$$

Now, we shall discuss the dispersion given by two branches of the ω vs. k curve with the particular attention to the cases $k = 0$ and $k = \pm\pi/d$. For the large wavelengths $\frac{1}{2}dk \ll 1$ and $\cos dk \approx 1 - \frac{1}{2}d^2k^2$. Hence

$$\begin{aligned} & \sqrt{(2\kappa_1 + \frac{1}{2}\kappa_2 d^2 k^2)^2 (m_1 - m_2)^2 + 4\kappa_1^2 m_1 m_2 (2 - \frac{1}{2}d^2 k^2)^2} \approx \\ & \approx 2\kappa_1(m_1 + m_2) + \frac{\frac{1}{2}(m_1 - m_2)^2 \kappa_2 - 2\kappa_1 m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2 k^2 \end{aligned}$$

and formula (16) reduces to

$$\begin{aligned} \omega_-^2 &= \frac{2}{m_1 + m_2} (\kappa_1 + \kappa_2) d^2 k^2, \\ \omega_+^2 &= 4 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \kappa_1 + \left[\kappa_2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \frac{2}{m_1 + m_2} (\kappa_1 + \kappa_2) \right] d^2 k^2. \end{aligned} \quad (17)$$

For the wavelengths of an order of $2d$ we assume $dk = \pi - \varepsilon$ with $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Then $\cos dk \approx -1 + \varepsilon^2/2$, the radical in (16) becomes

$$\sqrt{[2\kappa_1 + (2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2)\kappa_2]^2 (m_1 - m_2)^2 + \kappa_1^2 m_1 m_2 \varepsilon^4} \approx 2(\kappa_1 + \kappa_2)(m_1 - m_2) - \kappa_2(m_1 - m_2)\varepsilon^2$$

and

$$\begin{aligned} \omega_-^2 &= \frac{4}{m_1} (\kappa_1 + \kappa_2) + \frac{1}{2} \kappa_2 \left(\frac{1}{m_2} - \frac{3}{m_1} \right) \varepsilon^2, \\ \omega_+^2 &= \frac{4}{m_2} (\kappa_1 + \kappa_2) - \frac{1}{2} \kappa_2 \left(\frac{3}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (18)$$

It has to be emphasized that formulae (17) are physically reliable while (18) have only a formal meaning. This statement is due to the fact that the uniform strains in finite elements (simplexes) shown in figure take place only for the large wavelengths. However, both formulae (17) and (18) as well as the dispersion branches given by (16) describe a certain mass point system with a periodic structure and ternary interactions and serve as an illustration of general equations (12), (13).

Summarizing the results of this contribution we shall formulate the following conclusions:

1. The periodic mass-point systems with ternary interactions can be applied as a discrete model for the wave propagation problems in periodic composites.
2. The governing equations (12), (13) have simple finite-difference form which is identical for every $\mathbf{z} \in \Lambda$.
3. Equations (12), (13) can describe wave propagation problems in periodic composite media with a desired degree of accuracy, because they hold for an arbitrary decomposition of the representative composite element into finite elements provided that it implies the periodic simplicial subdivision of E^2 .

More detailed discussion of the proposed approach and its applications to the formulation of continuum and asymptotic models for the long wave deformations will be studied in the forthcoming papers.

1. Achenbach J. D., Sun C. T., Herman G. On the vibration of a laminated body // J. Appl. Mech. – 1968. – 35(E). – P. 467–475.
2. Herman G., Achenbach J. D. Appl. o theories of generalized Cosserat continua to the dynamics of composite materials // In: Proc. of IUTAM Symp. On the Generalized Cosserat Continuum Theory (ed. E. Kröner). – Springer, 1968. – P. 69–79.
3. Lee E. H. A survey of variational methods for elastic wave propagation analysis in composites with periodic structure // In: Dynamics of Composite Materials, E.H. Lee [Ed.]. – New York: At the Am. Soc. Mech. Engineers, 1972.
4. Rychlewska J., Szymczyk J., Woźniak Cz. A contribution to dynamics of polyatomic lattices // J. Theor. Appl. Mech. – 1999. – 37 to appear.
5. Sun C. T., Achenbach J. D., Herman G. Continuum theory for laminated medium // J. Appl. Mech. – 1968. – 35(E). – P. 467–475.
6. Woźniak Cz. Discrete elasticity // Arch. Mech. – 1971. – 23. – P. 801–816.
7. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method in Engineering Science. – London: At the McGraw Hill, 1971.

Ювіта Рихлевська, Юланта Шимчик, Чеслав Возняк

ДИСКРЕТНА МОДЕЛЬ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ПЕРІОДИЧНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛАХ

Запропоновано дискретну модель задач динаміки лінійно-пружних композитних матеріалів. Показано, що ця модель є класом систем матеріальних точок складної структури. Отримані результати становлять новий математичний апарат для аналізу задач поширення хвиль у неоднорідних періодичних середовищах.

Стаття надійшла до редколегії 07.07.99

Jarosław Jędrysiak

Łódź University of Technology

ON MESOSHAPE FUNCTIONS IN STRUCTURAL DYNAMICS OF THIN PERIODIC PLATES

1. Introduction. Main objects of this contribution are thin plates with a periodic structure along one direction in planes parallel to the plate midplane and with constant material and geometrical properties along the perpendicular direction (see Fig. 1). Plates of this kind are composed of many identical elements which are periodically distributed along one direction. Every element will be treated as a thin plate.

The exact analysis of periodic plates within solid mechanics is too complicated to constitute the basis for investigations of most engineering problems because obtained governing equations comprise highly oscillating functional coefficients. Thus, problems of such plates are investigated in the framework of different approximated methods. So called effective rigidities plate theories were presented e.g. in [3, 5, 8, 10] where periodic plates are described by governing equations of certain homogeneous plates with constant homogenised rigidities and averaged mass densities. An analysis of the periodic plate behaviour in the framework of asymptotic homogenisation methods is rather complicated from the computational point of view and hence it is restricted to the first approximation. Using asymptotic procedures we obtain averaged models neglecting the effect of the element length in the periodicity direction, called *the length-scale effect*. These models were restricted to the static problems.

In order to investigate non-stationary problems certain models (e.g. based on the concept of the continuum with the extra local degrees of freedom, [11]) were proposed. Short wave propagation problems were investigated in [1] and some refined models describing long wave problems for the periodic bodies were presented in [17]. These models take into account *the length-scale effect* on dynamic response of a body and are physically reasonable and simple enough to be applied in the analysis of engineering problems. The models of this kind were applied to selected dynamic problems of periodic structures, e.g. for the Hencky-Reissner periodic plates [2], for the Kirchhoff periodic plates [6-7], for the periodic wavy-plates [14], for composite lattice-type structures [4] and others [9, 12-13, 15-16]. As results of such modelling we

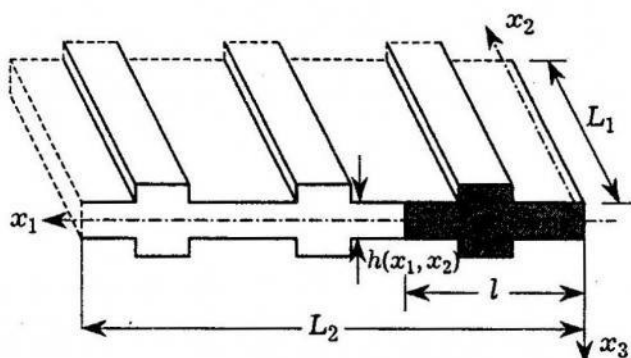


Fig. 1. An example of plate with one-directional periodic structure.

obtain governing equations with constant coefficients for averaged displacements and also additional unknowns. These unknowns together with highly oscillating periodic functions make it possible to take into account the length-scale effect on the dynamic body behaviour. The aforementioned periodic functions describe a form of oscillations inside periodicity elements and they are called *mesoscale functions*. These functions should be obtained as solutions to eigenvalue problems on the periodicity element.

The aim of this contribution is to show that for many cases of periodicity element eigenfunctions being solutions to the aforementioned eigenvalue problem can be assumed in an approximated form what is sufficient from the computational point of view. For this purpose free vibrations of special kinds of periodic plate bands will be analysed.

2. Preliminary concepts. In this paper thin linear-elastic plates with a periodic structure along one direction and constant properties along the perpendicular direction in planes parallel to the plate midplane. An example of a such plate is presented in Fig. 1. These plates will be called *uniperiodic plates*. Introducing $Ox_1x_2x_3$ the orthogonal cartesian coordinate system in the physical space and setting $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$, $z \equiv x_3$, the region of a plate is denoted by $\Omega := \{(\mathbf{x}, z) : -h(\mathbf{x})/2 < z < h(\mathbf{x})/2, \mathbf{x} \in \Pi\}$, where Π is the rectangular plate midplane with length dimensions L_1, L_2 and $h(\mathbf{x})$ is the plate thickness at the point $\mathbf{x} \in \Pi$. We also define t as the time coordinate. Let l stand for the period of plate structure in the x_1 -axis direction. Hence $(-l/2, l/2)$ is the interval in the plate midplane along this direction. We assume that the plate has the l -periodic heterogeneous structure and that l is sufficiently small compared to the minimum characteristic length dimension of the plate midplane, $l \ll L = \min(L_1, L_2)$, and sufficiently large compared to the maximum plate thickness $h \ll l$. This parameter will be called *the mesostructure length parameter*. We shall assume that $h(\cdot)$ is the l -periodic function of x_1 and independent of x_2 and all material and inertial properties of the plate are also l -periodic functions of x_1 , independent of x_2 and even functions of z .

Let us denote periodicity intervals $I(x_1)$ ($I(x_1) \equiv x_1 + (-l/2, l/2)$), $x_1 \in \Lambda_0$, where $\Lambda_0 = \{x_1 : x_1 \in [0, L_1], I(x_1) \subset [0, L_1]\}$. For an arbitrary integrable function f we define the averaging operator on $I(x_1)$ given by

$$\langle f \rangle(x_1, x_2) \equiv l^{-1} \int_{I(x_1)} f(y_1, x_2) dy_1, \quad x_1 \in \Lambda_0. \quad (2.1)$$

For a l -periodic function f in x_1 formula (2.1) leads to $\langle f \rangle(x_2)$.

Throughout the paper subscripts $\alpha, \beta, \dots$ ($i, j, \dots$) run over 1, 2 (1, 2, 3) and indices $A, B, \dots$ run over 1, $\dots$, N . Summation convention holds for all aforementioned indices. Let u_i, e_{ij}, s_{ij} stand for displacements, strains and stresses, $w(x_1, x_2, t)$ be a plate deflection, and p^+, p^- be loads in the z -axis direction on the upper and lower boundaries of the plate, respectively, b be the constant body force in the z -axis direction and ρ be the plate mass density. We shall define $c_{\alpha\beta\gamma\delta} := a_{\alpha\beta\gamma\delta} - a_{\alpha\beta 33} a_{\gamma\delta 33} (a_{3333})^{-1}$, where a_{ijkl} are components of the elastic modulae tensor and assume that $z = \text{const}$ are material symmetry planes, hence $c_{3\alpha\beta\gamma} = c_{333\gamma} = 0$.

3. Modelling procedure. In this section it will be presented the modelling procedure which is similar to that shown in papers [7, 6]. This procedure will be used to obtain governing equations for uniperiodic plates.

The starting point of considerations are the well known Kirchhoff plate theory assumptions: *the kinematic relations, the strain-displacement equations, the stress-strain relations* (under the plane stress assumption $s_{33} = 0$), *the virtual work principle*. From these relations we shall obtain the partial differential equation of the fourth order. However, for periodic plates this equation involves highly oscillating periodic coefficients. In order to pass to the equations with constant or slowly varying coefficients but retaining the effect of mesostructure length parameter l the additional kinematic assumptions have to be introduced.

Introduce functions, which are l -periodic in x_1 and independent of x_2

$$\mu := \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz, \quad \vartheta := \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz, \quad d_{\alpha\beta\gamma\delta} := \int_{-h/2}^{h/2} z^2 c_{\alpha\beta\gamma\delta} dz,$$

describing the following plate properties as a mean mass density per an unit area, a rotational inertia and a bending stiffness, respectively.

The modelling procedure of the presented model is based on the following kinematic assumption.

The main assumption is that the averaged plate deflection $W(\mathbf{x}, t) \equiv \langle \mu \rangle^{-1} \langle \mu w \rangle(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ together with its all derivatives are *slowly varying functions* in x_1 , i.e., satisfy conditions of the form $\langle fW \rangle(\mathbf{x}) \equiv \langle f \rangle(\mathbf{x}) W(\mathbf{x})$ for every integrable function f defined on Π . In the sequel W will be referred to as *the plate macrodeflection*. Moreover, it is assumed that the deflection disturbances $v \equiv w - W$ caused by the periodic plate structure are highly oscillating functions in x_1 , i.e., satisfy the following conditions: (i) in calculations of averages their values can be neglected comparing to the values of their derivatives, i.e., $\langle (vF)_{,1} \rangle(\mathbf{x}, t) \equiv \langle v_{,1} F \rangle(\mathbf{x}, t)$ for every $\mathbf{x} \in \Pi$ and for every slowly varying function F defined on Π ; (ii) for every $x_1 \in \Lambda_0$ there exist a periodic function v_{x_1} being a restriction of disturbances v to the closure $\bar{I}(x_1)$ of an interval $I(x_1)$, such that $v(\bar{I}(x_1)) \equiv v_{x_1}$; (iii) $v(\mathbf{x}, t) \in O(l^2)$, $l \nabla v(\mathbf{x}, t) \in O(l^2)$, $l^2 \nabla \nabla v(\mathbf{x}, t) \in O(l^2)$, $\mathbf{x} \in \Pi$, where l is the mesostructure length parameter, here $O(l^2) \rightarrow 0$ and $|l^2 O(l^2)| \geq c$ for some $c > 0$ with $l \rightarrow 0$.

Now in modelling the proper class of disturbances is specified. Denote a plate bending stiffness and a plate mass density per midplane unit area by $B(x_1)$ and $\mu(x_1)$, $x_1 \in \Lambda$, respectively, which are l -periodic functions in x_1 and independent of x_2 . we shall formulate the eigenvalue problem for a function $\hat{g}(y_1)$ given by the equation

$$[B(y_1) \hat{g}(y_1)_{,11}]_{,11} - \mu(y_1) \varpi^2 \hat{g}(y_1) = 0, \quad y_1 \in I(x_1), \quad x_1 \in \Lambda_0, \quad (3.1)$$

and by the periodic boundary conditions on the boundary of an interval $I(x_1)$ together with the continuity conditions inside $I(x_1)$ and the condition $\langle \mu \hat{g} \rangle = 0$. Hence, $\hat{g}$ is a sufficiently smooth solution to this problem. Let $\hat{g}^A$, $A = 1, 2, \dots$, be a sequence of eigenfunctions defined on $I(x_1)$ and related to the sequence of eigenvalues ϖ_A . Every $\hat{g}^A(y_1)$ is the principal mode of free vibrations of every plate segment in the periodicity interval $I(x_1)$. In the modelling procedure we restrict this sequence to the $N \geq 1$ first eigenfunctions which can be

approximated by so called *mesoshape functions* g^A , i.e., $g^A(y_1) \approx \hat{g}^A(y_1)$, $A = 1, \dots, N$, $y_1 \in I(x_1)$. It is assumed that the *mesoshape functions* g^A , $A = 1, \dots, N$, constitute a sequence of sufficiently smooth functions which are linear independent, l -periodic in x_1 and independent of x_2 , such that $g^A(y_1) \in O(l^2)$, $l\nabla g^A(y_1) \in O(l^2)$, $l^2\nabla\nabla g^A(y_1) \in O(l^2)$.

In the modelling we assume that the disturbances v can be approximated by $v(y_1, x_2, t) = g^A(y_1)V^A(x_1, x_2, t)$, $y_1 \in I(x_1)$, $x_1 \in \Lambda_0$, $x_2 \in [0, L_2]$, $A = 1, \dots, N$, where $g^A(y_1)$ are the known *mesoshape functions* and $V^A(x_1, x_2, t)$ are extra unknowns being slowly varying functions in x_1 and x_2 which are called *macrointernal variables*.

In most problems analysis will be restricted to the simplest case $N=1$ in which we take into account only the lowest natural vibration mode related to equation (3.1).

In the sequel it will be shown that for the interval with a non-complicated structure we can assume the mesoshape function in an approximated form of the solution to the eigenvalue problem.

4. Governing equations. After some manipulations from the Kirchhoff plate theory relations and the additional kinematic assumption the governing equations of the *length-scale model* will be derived:

- *Equations of motion*

$$M_{\alpha\beta, \alpha\beta} + \langle \mu \rangle \ddot{W} - \langle \vartheta \rangle \ddot{W}_{,\alpha\alpha} - \langle \vartheta g_{,\alpha}^B \rangle \ddot{V}_{,\alpha}^B = \langle p \rangle + b \langle \mu \rangle, \quad (4.1)$$

- *Constitutive equations*

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \langle d_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle W_{,\gamma\delta} + \langle d_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\gamma\delta}^B \rangle V^B, \\ M^A &= \langle d_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\alpha\beta}^A \rangle W_{,\gamma\delta} + \langle d_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\alpha\beta}^A g_{,\gamma\delta}^B \rangle V^B, \end{aligned} \quad (4.2)$$

- *Evolution equations*

$$M^A + \langle \mu g^A g^B \rangle \ddot{V}^B + \langle \vartheta g_{,\alpha}^A \rangle \ddot{W}_{,\alpha} + \langle \vartheta g_{,\alpha}^A g_{,\alpha}^B \rangle \ddot{V}^B = \langle pg^A \rangle, \quad (4.3)$$

where mesoshape functions g^A , $A = 1, \dots, N$, are functions only in x_1 .

The above equations are the basis for investigations of overall behaviour of uniperiodic plates. The underlined terms depend on the mesostructure length parameter l . Moreover, these equations involve averaged coefficients (in brackets $\langle \rangle$) which are constant, except terms $\langle p \rangle$, $\langle pg^A \rangle$ which can be slowly varying functions in x_1 and x_2 . Functions $W(x_1, x_2, t)$, $V^A(x_1, x_2, t)$, $A = 1, \dots, N$, are the basic unknowns; which have to be slowly varying functions both in x_1 and x_2 . The function W is called a macrodeflection and the functions V^A are called macrointernal variables, because boundary conditions for these functions should not be defined.

It is easy to see that to derive the governing equations (4.1)–(4.3) we have previously to obtain the mesoshape functions g^A , $A = 1, \dots, N$, for every periodic plate under consideration as approximated solutions to the eigenvalue problem for equation of the form (3.1). In most cases we restrict considerations to a small number N of mode shapes and in this contribution we assume that $N = 1$; hence, denote $g \equiv g^1$.

5. Analysis: an example of a periodic plate band.

5.1. Free vibrations of a periodic plate band. In order to evaluate differences between applying of an exact $\hat{g}$ or approximated g form of mesoshape functions free vibrations of a periodic plate band will be considered. For this purpose equations (4.1)–(4.3) will be applied. It will be assumed that body forces b and loads p are neglected. Let us consider a simply supported on the opposite edges plate band. It is made of an isotropic periodically varying piece-wise homogeneous material. The plate thickness h is a periodic function. For assumed mesoshape function g it can be proved that $\langle g_{,1} \rangle = 0$. Denote $x \equiv x_1$, $L \equiv L_1$ and $V \equiv V^1$ as well as

$$B \equiv \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_{11}^1 \equiv \langle d_{1111} g_{,11} \rangle, \quad D^{11} \equiv \langle d_{1111} (g_{,11})^2 \rangle, \\ m \equiv \langle \mu \rangle, \quad m^{11} \equiv l^{-4} \langle \mu (g)^2 \rangle, \quad j \equiv \langle g \rangle, \quad j^{11} \equiv l^{-2} \langle g (g_{,1})^2 \rangle,$$

where E is the plate Young modulus, ν is the plate Poisson ratio, h is the periodic plate thickness. Substituting (4.2) to (4.1) and (4.3) we arrive at

$$\langle B \rangle W_{,1111} + m \ddot{W} - j \ddot{W}_{,11} + D_{11}^1 V_{,11} = 0, \\ D_{11}^1 W_{,11} + D^{11} V + l^2 (l^2 m^{11} + j^{11}) \ddot{V} = 0. \quad (5.1)$$

Introduce the wave number $k \equiv 2\pi/L$. Solutions to equations (5.1) will be assumed in the form satisfying boundary conditions for a simply supported plate band:

$$W(x, t) = A_W \sin(kx) \cos(\omega t), \quad V(x, t) = A_V \sin(kx) \cos(\omega t), \quad (5.2)$$

where A_W , A_V are amplitudes. Substituting these solutions to (5.1) we obtain the system of linear algebraic equations for amplitudes A_W , A_V

$$\begin{bmatrix} \langle B \rangle k^4 - \omega^2 (m + j k^2) & -D_{11}^1 k^2 \\ -D_{11}^1 k^2 & D^{11} - \omega^2 l^2 (l^2 m^{11} + j^{11}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_W \\ A_V \end{Bmatrix} = \{0\}.$$

After some manipulations we arrive at formulae for resonance frequencies ω_1 and ω_2 called a *macro-resonance* and a *meso-resonance frequency*, respectively:

$$(\omega_{1,2})^2 \equiv \frac{1}{2} [(m + j k^2) l^2 (l^2 m^{11} + j^{11})]^{-1} \{ \langle B \rangle k^4 l^2 (l^2 m^{11} + j^{11}) + (m + j k^2) D^{11} \mp \\ \mp \sqrt{ [\langle B \rangle k^4 l^2 (l^2 m^{11} + j^{11}) - (m + j k^2) D^{11}]^2 + 4 (m + j k^2) l^2 (l^2 m^{11} + j^{11}) (D_{11}^1 k^2)^2 } \}, \quad (5.3)$$

which take into account the effect of the mesostructure length parameter l .

5.2. Analysis of the eigenvalue problem for a plate band having a periodically varying piece-wise constant thickness

Let us consider a plate band having a periodically varying piece-wise constant thickness h , simply supported on the opposite edges and made of an isotropic homogeneous material. The periodicity interval $I_l \equiv [-l/2, l/2]$ is

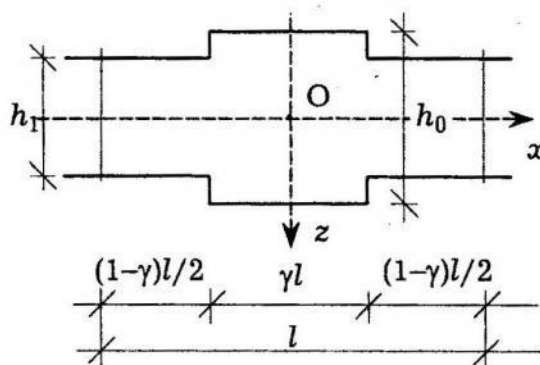


Fig. 2. The interval of the plate band with periodic thickness.

shown in Fig. 2. It can be treated as a plate band with the span l . The plate thickness h is assumed as

$$h(x) = \begin{cases} h_0 & \text{if } x \in (-\gamma l/2, \gamma l/2), \\ h_1 = \eta h_0 & \text{if } x \in [-l/2, -\gamma l/2] \cup [\gamma l/2, l/2], \quad \eta \in [0, 1]. \end{cases} \quad (5.4)$$

We introduce the wave number α and denote $\lambda \equiv \alpha l$. In order to obtain eigenfunctions for the interval $I(x_1)$ we have to solve the eigenvalue problem (3.1) which takes the form $[B(x)\hat{g}(x)]_{,11} - \mu(x)\lambda^2\hat{g}(x) = 0$, with conditions: $\hat{g}$ are l -periodic functions, $\langle \mu \hat{g} \rangle = 0$. Using the Krylov - Prager functions

$$S(\alpha x) = \frac{1}{2}[\cosh(\alpha x) + \cos(\alpha x)], \quad U(\alpha x) = \frac{1}{2}[\cosh(\alpha x) - \cos(\alpha x)],$$

$$T(\alpha x) = \frac{1}{2}[\sinh(\alpha x) + \sin(\alpha x)], \quad Q(\alpha x) = \frac{1}{2}[\sinh(\alpha x) - \sin(\alpha x)],$$

and denoting

$$\Gamma_1(\lambda) \equiv T(\frac{1}{2}\gamma\lambda) + \eta^{\frac{3}{2}}\{S(\frac{1}{2}\gamma\lambda)T[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}] + \eta^{\frac{1}{2}}Q(\frac{1}{2}\gamma\lambda)U[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}] + \\ + \eta^{-2}U(\frac{1}{2}\gamma\lambda)Q[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}] + \eta^{-\frac{3}{2}}T(\frac{1}{2}\gamma\lambda)[S[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}] - 1]\},$$

$$\Xi_1(\lambda) \equiv Q(\frac{1}{2}\gamma\lambda) + \eta^{\frac{3}{2}}\{U(\frac{1}{2}\gamma\lambda)T[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}] + \eta^{\frac{1}{2}}T(\frac{1}{2}\gamma\lambda)U[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}] + \\ + \eta^{-2}S(\frac{1}{2}\gamma\lambda)Q[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}] + \eta^{-\frac{3}{2}}Q(\frac{1}{2}\gamma\lambda)[S[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}] - 1]\},$$

$$\Gamma_2(\lambda) \equiv S(\frac{1}{2}\gamma\lambda)Q[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}] + \eta^{\frac{1}{2}}Q(\frac{1}{2}\gamma\lambda)S[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}] + \\ + \eta^{-2}U(\frac{1}{2}\gamma\lambda)T[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}] + \eta^{-\frac{3}{2}}T(\frac{1}{2}\gamma\lambda)U[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}],$$

$$\Xi_2(\lambda) \equiv U(\frac{1}{2}\gamma\lambda)Q[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}] + \eta^{\frac{1}{2}}T(\frac{1}{2}\gamma\lambda)S[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}] + \\ + \eta^{-2}S(\frac{1}{2}\gamma\lambda)T[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}] + \eta^{-\frac{3}{2}}Q(\frac{1}{2}\gamma\lambda)U[\frac{1}{2}(1-\gamma)\lambda\eta^{-\frac{1}{2}}],$$

the solution to eigenvalue problem is looked for in the form

$$\hat{g}(x) = l^2 A(\lambda) S(\lambda|x|/l) + U(\lambda|x|/l), \quad \text{if } |x| \leq \frac{1}{2}\gamma l,$$

$$\hat{g}(x) = l^2 \{A(\lambda) \{S(\frac{1}{2}\gamma\lambda)S[\lambda(|x|/l - \frac{1}{2}\gamma)\eta^{-\frac{1}{2}}] + \eta^{\frac{1}{2}}Q(\frac{1}{2}\gamma\lambda)T[\lambda(|x|/l - \frac{1}{2}\gamma)\eta^{-\frac{1}{2}}] + \\ + \eta^{-2}U(\frac{1}{2}\gamma\lambda)U[\lambda(|x|/l - \frac{1}{2}\gamma)\eta^{-\frac{1}{2}}] + \eta^{-\frac{3}{2}}T(\frac{1}{2}\gamma\lambda)Q[\lambda(|x|/l - \frac{1}{2}\gamma)\eta^{-\frac{1}{2}}]\} + \\ + U(\frac{1}{2}\gamma\lambda)S[\lambda(|x|/l - \frac{1}{2}\gamma)\eta^{-\frac{1}{2}}] + \eta^{\frac{1}{2}}T(\frac{1}{2}\gamma\lambda)T[\lambda(|x|/l - \frac{1}{2}\gamma)\eta^{-\frac{1}{2}}] + \\ + \eta^{-2}S(\frac{1}{2}\gamma\lambda)U[\lambda(|x|/l - \frac{1}{2}\gamma)\eta^{-\frac{1}{2}}] + \eta^{-\frac{3}{2}}Q(\frac{1}{2}\gamma\lambda)Q[\lambda(|x|/l - \frac{1}{2}\gamma)\eta^{-\frac{1}{2}}]\}, \quad \text{if } |x| \in (\frac{1}{2}\gamma l, \frac{1}{2}l], \quad (5.5)$$

where $A(\lambda) \equiv -C\Xi_1(\lambda)\Gamma_1(\lambda)^{-1}$, C is a constant. Restricting our considerations to symmetric vibrations the equation for the eigenvalue λ takes the form

$$\Gamma_1(\lambda)\Xi_2(\lambda) - \Gamma_2(\lambda)\Xi_1(\lambda) = 0.$$

From the above equation we can derive eigenvalues λ_A , $A = 1, 2, \dots$. Our analysis is restricted to $A = 1$. Hence, we obtain the smallest eigenvalue λ dependent

on the parameter η and the exact form of the mesoshape functions $\hat{g}$ related to this eigenvalue is defined by (5.6).

6. Numerical results. In this section it will be shown that the mesoshape function g for the interval in Fig. 2 related to the eigenvalue λ (for $A = 1$) can be assumed in the approximated form

$$g(x) = l^2 [\cos(2\pi x/l) + c], \quad x \in [-l/2, l/2], \quad (6.1)$$

where the constant c derived from the condition $\langle \mu g \rangle = 0$ is $c = \langle \mu \rangle^{-1} \times \langle \mu \cos(2\pi x/l) \rangle$.

In order to evaluate differences between results obtained by using exact (5.5) and approximated form (6.1) of mesoshape function resonance frequencies of the plate band with periodic thickness h given by (5.4) will be analysed. Taking into account (5.3) we denote resonance frequencies obtained by using the mesoshape function in the approximated form (6.1) by $\tilde{\omega}$ and those obtained by using the mesoshape function in the exact form (5.5) by ω . Introduce dimensionless coefficients:

$$\eta_0 \equiv h_0/l, \quad q \equiv l/L, \quad \Omega_1 \equiv \tilde{\omega}_1/\omega_1, \quad \Omega_2 \equiv \tilde{\omega}_2/\omega_2,$$

where η_0 describes the plate thickness, q is called the dimensionless mesostructure parameter and Ω_1, Ω_2 are the ratios of macro- and meso-resonance frequency, respectively. Diagram of Ω_1, Ω_2 versus the parameter $\eta \in [0.7, 1.0]$ is presented in Fig. 3. These diagrams are made for $\eta_0 = 0.1$, $q = 0.01$.

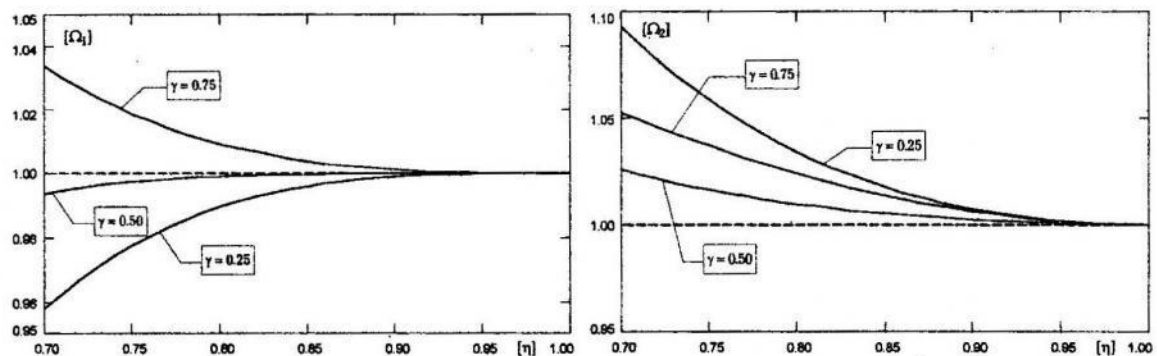


Fig. 3. Diagrams of ratios Ω_1 and Ω_2 for a plate band with periodic thickness h .

Analysing obtained results the following conclusions can be formulated:

- Differences between macro-resonance frequencies obtained by using the exact (5.5) or the approximated (6.1) form of mesoshape function are small and they are smaller than 5% for plates in which differences of thickness inside the periodicity interval are smaller than 30% (i. e. $h_0 - h_1 \leq 0.3h_0$).
- For the above plates differences between meso-resonance frequencies obtained by using the exact or the approximated form of mesoshape function are smaller than 10%.

7. Conclusions. The length-scale model for plates with periodic structure along one direction and constant properties along the perpendicular direction have been presented in the contribution. These refined models, formulated in the framework of the averaged length-scale theory of periodic bodies [17], were applied to many dynamic problems of periodic structures in series of papers [2, 4, 6-7, 9, 12-16] aforementioned in Sec. 1. These models are physically reasonable and simple enough to be applied in the analysis of engineering problems.

The presented modelling procedure for periodic plates leads to a system of differential equations with constant coefficients for the macrodeflection W and the macrointernal variables V^A . The governing equations ((4.1)-(4.3)) describe the length-scale effect on the plate behaviour by some coefficients (underlined in these equations) dependent on the mesostructure length parameter l . The length-scale effect on the dynamic body behaviour is described by the extra unknowns V^A , $A = 1, \dots, N$, called macrointernal variables and additional mode-shape functions g^A , which are called mesoshape functions. The macrointernal variables V^A are governed by ordinary differential equations involving time derivatives. Moreover, mesoshape functions g^A describe oscillations of displacements inside periodicity intervals. These functions should be obtained as properly chosen approximations of solutions to eigenvalue problems for natural vibrations of separated periodicity intervals what was shown in Sec. 3.

Mesoshape functions obtained in Sec. 5 for the special case of plate band were used to analyse free vibrations for such plate. Presented there results make it possible to evaluate differences between resonance frequencies obtained by using the approximated and the exact form of mesoshape function. Analysing these results we can formulate the following general conclusions:

- 1° For many special problems the mesoshape functions g^A , $A = 1, \dots, N$, can be assumed as approximated solutions to the eigenvalue problem for periodicity interval, what is sufficient from the computational point of view.
- 2° Plates with a periodic structure caused only by periodically varying thickness can be investigated by using the approximated form of mesoshape function if differences between values of the thickness inside the periodicity interval are relatively small, i. e., for the parameter $\eta \geq 0.7$; for $\eta < 0.7$ it should be used the exact form of mesoshape function.

Summarising, the analytical exact solutions $\hat{g}^A$ to the eigenvalue problems (3.1) can be obtained only for plates with intervals whose structure is rather not too complicated. In most cases instead of the exact solutions to eigenvalue problems we have to look for an approximate form of mesoshape functions.

-
1. Bakhvalov N. S., Panasenko G. P. Osrednienie processov v periodiceskich sredach. (in Russian) - Moscow: Nauka, 1984.
 2. Baron E., Woźniak C. On the micro-dynamics of composite plates // Arch. Appl. Mech. - 1995. - 66. - P. 126-133.

3. Caillerie D. Thin elastic and periodic plates // *Math. Meth. in the Appl. Sci.* – 1984. – **6**. – P. 159–191.
4. Cielecka I. On the continuum the dynamic behaviour of certain composite lattice-type structures // *J. Theor. Appl. Mech.* – 1995. – **33**. – P. 351–360.
5. Duvaut G., Metellus A. M. Homogénéisation d'une plaque mince en flexion des structure périodique et symétrique. (in French) // *Paris C.R. Acad. Sci.* – 1976. – **283(A)**. – P. 947–950.
6. Jędrzyński J. On dynamics of thin plates with a periodic structure // *Eng. Trans.* – 1998. – **46**. – P. 73–87.
7. Jędrzyński J., Woźniak C. On the elastodynamics of thin microperiodic plates // *J. Theor. Appl. Mech.* – 1995. – **33**. – P. 337–349.
8. Kohn R.V., Vogelius M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness // *Int. J. Solids Structures* – 1984. – **20**. – P. 333–350.
9. Konieczny S., Woźniak M. On the wave propagation in fibre-reinforced composites // *J. Theor. Appl. Mech.* – 1995. – **33**. – P. 375–384.
10. Lewicki T. Homogenizing stiffnesses of plates with periodic structure // *Int. J. Solids Structures* – 1992. – **21**. – P. 309–326.
11. Maewal A. Construction of models of dispersive elastodynamic behaviour of periodic composites a computational approach // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* – 1986. – **57**. – P. 191–205.
12. Matysiak S. J., Nagórko W. On the wave propagation in periodically laminated composites // *Bull. Polon. Acad. Sci., Tech. Sci.* – 1995. – **43**. – P. 1–12.
13. Mazur-Śniady K. Macro-dynamics of micro-periodic elastic beams // *J. Theor. Appl. Mech.* – 1993. – **31**. – P. 781–793.
14. Michalak B., Woźniak C., Woźniak M. The dynamic modelling of elastic wavy-plates // *Arch. Appl. Mech.* – 1995. – **66**. – P. 177–186.
15. Wągrowa M., Woźniak C. Macro-modelling of dynamic problems for visco-elastic composite materials // *Int. J. Engng. Sci.* – 1996. – **34**. – P. 923–932.
16. Wierzbicki E. Nonlinear macro-micro dynamics of laminated structures // *J. Theor. Appl. Mech.* – 1995. – **33**. – P. 291–307.
17. Woźniak C. Internal variables in dynamics of composite solids with periodic microstructure // *Arch. Mech.* – 1997. – **49**. – P. 421–441.

Ярослав Єндрисяк

ПРО ФУНКЦІЇ МЕЗОФОРМИ В СТРУКТУРНІЙ ДИНАМІЦІ ТОНКИХ ПЕРІОДИЧНИХ ПЛАСТИН

Розглянуто проблему вибору мезоформної функції в структурній динаміці тонких пластин з періодичною структурою у площинах паралельних до середньої поверхні. Запропонована модель з ефектом масштабу дає змогу врахувати вплив величини комірки періодичності на поведінку пластини. У процесі моделювання використано поняття функцій мезоформи. Ці функції описують осциляцію всередині комірки періодичності і є розв'язками задачі про власні коливання у випадку природних коливань окремо взятої комірки періодичності з урахуванням періодичних крайових умов. На прикладі показано, що здебільшого можна використовувати наближений власний розв'язок як функцію мезоформи.

Стаття надійшла до редколегії 20.08.99

УДК 539.3

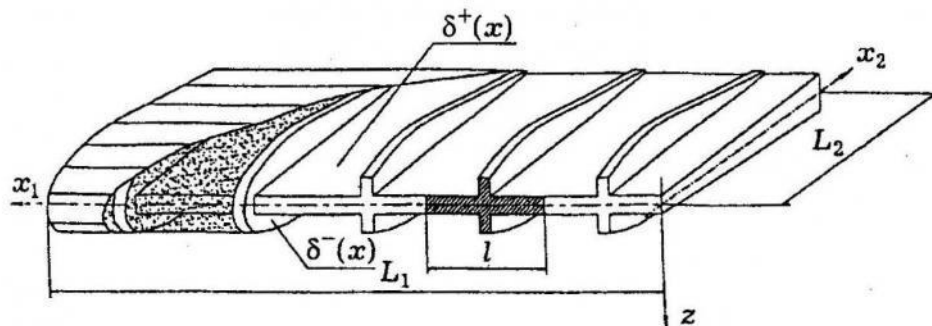
Євгеній Барон

Шльонська політехніка в Глівіцях

ДИНАМІКА ПЛАСТИН З ОДНОВІСНОЮ ПЕРІОДИЧНОЮ СТРУКТУРОЮ

1. Вступ. Пластина з періодичною структурою – це пластина яка складається з низки комірок періодичності, які мають однакову форму (зазвичай прямокутну), розміри та структуру матеріалу і повторюються у серединній площині. Розв'язування задач динаміки, а передусім аналіз коливань та розповсюдження хвиль у пластинах з такою структурою, пов'язане зі значними математичними труднощами, які є наслідком того, що товщина плити, розподіл маси і зміна механічних властивостей, є сильно осцилюючими і назагал розривними функціями. Тому в механіці пластин з періодичною структурою пропонуються спрощені моделі, у яких властивості матеріалу та змінну товщину представляють певні усереднені та сталі за величиною ефективні модулі. Такі моделі, які найчастіше вводять при застосуванні методики асимптотичної гомогенізації, призводять до рівнянь зі сталими коефіцієнтами, які апроксимують рівняння з періодичними, сильно осцилюючими функціональними коефіцієнтами. Однак застосування методики асимптотичної гомогенізації призводить до нехтування масштабним ефектом, або впливом розміру комірки періодичності на макродинамічні властивості пластинки. Оскільки в багатьох інженерних задачах цим впливом знехтувати не можна, запропоновано новий підхід до моделювання задач динаміки в тілах з періодичною структурою, яка враховує масштабний ефект, так звана модель з внутрішніми змінними (internal variable model) [2]. З використанням підходу, який враховує масштабний ефект, до цього часу розглядалися двовимірні моделі пластин зі закладеною періодичністю структури у двох характеристичних напрямках у їхніх площинах.

Ця праця стосується певних не досліджуваних досі задач динаміки, які розв'язуються методом моделювання тіл з внутрішніми змінними для пластин з періодичною структурою тільки в одному напрямі, або так званою однопериодичною структурою (див. рис.).



Пластина з однопериодичною структурою.

Загальні рівняння моделі пластин з однопериодичною структурою були введені у [3]. При цьому не робилося жодних припущень про змінюваність параметрів пластини у другому характеристичному напрямі. Отримані рівняння лінійно-пружної пластини середньої товщини Рейснера – Міндліна не є частковим випадком рівнянь пластини з періодичністю у двох напрямках (порівняти з [1]), що справджується в асимптотично згомогенізованих моделях.

У праці індекси $\alpha, \beta, \dots (i, j, \dots)$ набувають значення 1, 2 (1, 2, 3), а індекси $a, b, \dots$ та $A, B, \dots$ значення 1, 2, ..., n і відповідно 1, 2, ..., N . Застосуємо правило підсумовування Айнштейна. Наявність пари вказівників угорі та внизу означає їхню симетризацію.

2. Вихідні припущення. Нехай $Ox_1x_2x_3$ прямокутна декартова система координат у фізичному просторі. Позначаючи $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ і $z = x_3$, область Ω , яку займає недеформована пластина середньої товщини, запишемо як

$$\Omega := \{(\mathbf{x}, z) : \delta^-(\mathbf{x}) < z < \delta^+(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Pi\},$$

де $\Pi = (-L_1/2, L_1/2) \times (-L_2/2, L_2/2)$ – прямокутник з розмірами L_1 і L_2 на площині Ox_1x_2 ; $\delta^-(\mathbf{x}) < 0$ і $\delta^+(\mathbf{x}) > 0$ – функції, які визначають поверхні, що обмежують пластину. Припускаємо, що пластина має періодичну структуру тільки у напрямі осі x_1 з довжиною l . Отже, діапазон періодичності $(-l/2 + x_1, l/2 + x_1)$ має свою середину у довільній точці осі x_1 . Розмір l є параметром мікроструктури (microstructure length parameter), тобто $l \ll L$, де $L = \min\{L_1, L_2\}$. Також вважається, що величина l значно більша від максимальної товщини пластини, тобто $l \gg \delta$, де $\delta = \max\{\delta^+(\mathbf{x}) - \delta^-(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Pi\}$. У загальному випадку не робилося жодних припущень про змінність параметрів пластини в напрямі осі x_2 . Це відповідає зображеній на рисунку ситуації.

Функцію $f(x_1, x_2)$, визначену на серединній площині Π , надалі називатимемо однопериодичною, якщо для довільного $x_2 \in (-L_2/2, L_2/2)$ виконується умова $f(x_1, x_2) = f(x_1 \pm l, x_2)$. Для однопериодичної функції її середнє значення на проміжку періодичності $(x_1 - l/2, x_1 + l/2)$ визначає оператор

$$\langle f \rangle(x_2) \equiv \frac{1}{l} \int_{x_1 - l/2}^{x_1 + l/2} f(\xi, x_2) d\xi.$$

Ця величина не залежить від x_1 .

Нехай $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ – переміщення, деформації та напруження у тривимірній теорії пластин. Крім того, нехай p^+ і p^- навантаження (уздовж осі z) на обмежуючих поверхнях відповідно $x_3 = \delta^+(\mathbf{x})$, $x_3 = \delta^-(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Pi$. Також нехай b означає масову силу (уздовж осі z); ρ – густину матеріалу пластини. Позначимо через A_{ijkl} тензор модулів пружності матеріалу пластини. Припускаючи, що площини $z = \text{const}$ є площинами пружної симетрії, позначимо

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} := A_{\alpha\beta\gamma\delta} - A_{\alpha\beta 33} A_{33\gamma\delta} (A_{3333})^{-1}, \quad B_{\alpha\beta} := A_{\alpha 3\beta 3}. \quad (2.1)$$

Вважаємо, що A_{ijkl} і ρ є парними функціями змінної z та одноперіодичними стосовно до змінної x_1 і стосовно до x_2 є довільними регулярними функціями.

Геометричні співвідношення описуються рівняннями Коші

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}, \quad (2.2)$$

залежність між напруженнями та деформаціями має вигляд

$$\sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad \sigma_{\alpha 3} = 2B_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta 3}, \quad \sigma_{33} = 0. \quad (2.3)$$

Вважаємо, що справджується кінематична гіпотеза Рейснера – Міндліна

$$u_\alpha(\mathbf{x}, z, t) = z \vartheta_\alpha^\circ(\mathbf{x}, t), \quad u_3(\mathbf{x}, z, t) = w^\circ(\mathbf{x}, t), \quad (2.4)$$

де $w^\circ(\mathbf{x}, t)$ – переміщення точок пластини Π ; $\vartheta_\alpha^\circ(\mathbf{x}, t)$ – незалежні повертання; t – час.

Враховуючи результати опублікованих праць та співвідношення (2.1)–(2.4) будемо систему різницевих рівнянь для переміщень $\vartheta_\alpha^\circ(\mathbf{x}, t)$, $w^\circ(\mathbf{x}, t)$ у пластині середньої товщини. Якщо пластина матиме одноперіодичну структуру, то ця система буде системою з сильно осцилюючими функційними коефіцієнтами. Застосовуючи гіпотезу про моделювання тіл з внутрішніми змінними, одержуємо систему рівнянь зі сталими коефіцієнтами з урахуванням масштабного ефекту.

3. Гіпотеза моделювання. Спосіб моделювання тіл з внутрішніми змінними, що дає змогу врахувати масштабний ефект, використовує значення так званої повільно змінюваних функцій (slowly varying functions) та сильно осцилюючих функцій (highly oscillating functions) [2].

Нехай $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (\vartheta_\alpha^\circ(\mathbf{x}, t), w^\circ(\mathbf{x}, t))$ – поле переміщень серединної площини пластини. Обмежимося випадком задач, у яких поле переміщень $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = (\langle \vartheta_\alpha^\circ \rangle(\mathbf{x}, t), \langle w^\circ \rangle(\mathbf{x}, t))$ є повільно змінюваною функцією аргументу x_1 , тобто функцією, яка для будь-якої інтегровної функції $\phi(\mathbf{x})$ задовольняє залежність

$$\langle \phi \mathbf{U} \rangle(\mathbf{x}, t) \cong \langle \phi \rangle(\mathbf{x}) \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Pi.$$

Знак $\cong$ означає наближення, яке пов'язане з обчисленням чисельного усереднення.

Для пластини з одноперіодичною структурою різниці між складовими векторів переміщень $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ є сильно осцилюючими функціями аргументу x_1 . Середні значення цих різниць $\langle \mathbf{u} - \mathbf{U} \rangle(\mathbf{x}, t)$ апроксимуємо за допомогою виразу $\langle h^A \mathbf{Q}_A \rangle(\mathbf{x}, t)$, де $h^A(x_1)$ – сильно осцилюючі відомі одноперіодичні функції, так звані функції форми (mode shape function); складові полів $\mathbf{Q}_A(\mathbf{x}, t)$ є невідомі повільнозмінювані функції аргументу x_1 , так звані коректори (correctors). Для сильно осцилюючої функції $h(x_1)$, повільнозмінюваної функції $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$, а також довільної інтегровної функції $\phi(\mathbf{x})$ маємо залежність

$$\langle \varphi(hU)_{,1} \rangle(\mathbf{x}, t) \cong \langle \varphi h_{,1} \rangle(\mathbf{x})U(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Pi.$$

Враховуючи поданий спосіб моделювання, отримуємо, що для пластини з одноперіодичною структурою переміщення $u_i(\mathbf{x}, z, t)$ будь-якої точки нездеформованої пластини з середньою товщиною визначені за допомогою виразів (2.4), у яких вважається, що

$$\vartheta_\alpha^o = \vartheta_\alpha(\mathbf{x}, t) + h^a(x_1)\Theta_\alpha^a(\mathbf{x}, t), \quad w^o = w(\mathbf{x}, t) + g^A(x_1)W^A(\mathbf{x}, t), \quad (3.1)$$

де фігурують повільнозмінювані стосовно x_1 функції $\vartheta_\alpha(\cdot)$; $w(\cdot)$ (макропереміщення – grossdisplacements) та $\Theta_\alpha^a(\cdot)$; $W^A(\cdot)$ (коректори – correctors) визначальні функції запропонованої двовимірної моделі пластини; функції $h^a(x_1)$, $g^A(x_1)$ – відповідно підібрані функції форми (mode-shape functions).

Як можна зауважити, у методиці моделювання тіл зі змінними внутрішніми величинами важливе значення мають функції форми $h^a(x_1)$, $g^A(x_1)$. Ці функції є розв'язком певної задачі на власні значення за періодичних граничних умов [2] і для них виконуються залежності

$$\langle h^a \int_{\delta^-}^{\delta^+} z^2 \rho dz \rangle = 0 \quad \text{та} \quad \langle g^A \int_{\delta^-}^{\delta^+} \rho dz \rangle = 0.$$

Величини функцій форми мають порядок параметра мікроструктури $h^a(x_1)$, $g^A(x_1) \in O(l)$; їхні похідні від цього параметра вже не залежать.

Під час побудови моделі у рівнянні принципу віртуальної роботи враховано залежності (2.1)–(2.4) разом з (3.1). Одержані співвідношення усереднено, використовуючи властивості повільнозмінюваних функцій, а також одноперіодичних за аргументом x_1 . Після нескладних формальних перетворень отримано вигляд різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами для невідомих функцій, які входять у співвідношення (3.1).

4. Основні рівняння. Вводячи позначення

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} := \int_{\delta^-}^{\delta^+} z^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} dz, \quad D_{\alpha\beta} := \int_{\delta^-}^{\delta^+} B_{\alpha\beta} dz,$$

$$p := p^+ + p^- + b\langle \mu \rangle, \quad \bar{h}^a := l^{-1}h^a, \quad \bar{g}^A := l^{-1}g^A.$$

систему рівнянь двовимірної теорії лінійно-пружних тіл середньої товщини з одноперіодичною структурою та врахуванням масштабного ефекту можна подати у вигляді рівнянь руху

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_\alpha = 0, \quad Q_{\alpha,\alpha} - \langle \mu \rangle \ddot{w} + p = 0, \quad (4.1)$$

динамічних рівнянь еволюції

$$l^2 \langle J \bar{h}^a \bar{h}^b \rangle \ddot{\Theta}_\alpha^b + M_{1\alpha}^a - l M_{2\alpha,2}^a = 0,$$

$$l^2 \langle \mu \bar{g}^A \bar{g}^B \rangle \ddot{W}^B + Q_1^A - l Q_{2,2}^A - l \langle \bar{g}^A (p^+ + p^-) \rangle = 0, \quad (4.2)$$

з урахуванням визначальних рівнянь

$$M_{\alpha\beta} = \langle G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)} + \langle h_{,1}^a G_{\alpha\beta 1\delta} \rangle \Theta_{\delta}^a + \langle h^a G_{\alpha\beta 2\delta} \rangle \Theta_{\delta,2}^a, \\ Q_{\alpha} = \langle D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_{\beta} + w_{,\beta}) + l \langle \bar{h}^a D_{\alpha\beta} \rangle \Theta_{\beta}^a + \langle g_{,1}^A D_{\alpha 1} \rangle W^A + l \langle \bar{g}^A D_{\alpha 2} \rangle W_{,2}^A, \quad (4.3)$$

та позначень

$$M_{1\alpha}^a = \langle h_{,1}^a h_{,1}^b G_{\alpha 1 1\delta} \rangle \Theta_{\delta}^b + \langle h_{,1}^a G_{\alpha 1 \gamma\delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)} + l \langle h_{,1}^a \bar{h}^b G_{\alpha 1 2\delta} \rangle \Theta_{\delta,2}^b + \\ + l^2 \langle \bar{h}^a \bar{h}^b D_{\alpha\beta} \rangle \Theta_{\beta}^b + l \langle \bar{h}^a D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_{\beta} + w_{,\beta}) + \\ + l \langle \bar{h}^a g_{,1}^A D_{\alpha 1} \rangle W^A + l^2 \langle \bar{h}^a \bar{g}^A D_{\alpha 2} \rangle W_{,2}^A, \\ M_{2\alpha}^a = \langle \bar{h}^a h_{,1}^b G_{\alpha 2 1\delta} \rangle \Theta_{\delta}^b + \langle \bar{h}^a G_{\alpha 2 \gamma\delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)} + l \langle \bar{h}^a \bar{h}^b G_{\alpha 2 2\delta} \rangle \Theta_{\delta,2}^b, \\ Q_1^A = \langle g_{,1}^A g_{,1}^B D_{11} \rangle W^B + \langle g_{,1}^A D_{1\beta} \rangle (\vartheta_{\beta} + w_{,\beta}) + \\ + l \langle g_{,1}^A \bar{h}^a D_{1\beta} \rangle \Theta_{\beta}^a + l \langle g_{,1}^A \bar{g}^B D_{12} \rangle W_{,2}^B, \\ Q_2^A = \langle \bar{g}^A g_{,1}^B D_{21} \rangle W^B + \langle \bar{g}^A D_{2\beta} \rangle (\vartheta_{\beta} + w_{,\beta}) + \\ + l \langle \bar{g}^A \bar{h}^a D_{2\beta} \rangle \Theta_{\beta}^a + l \langle \bar{g}^A \bar{g}^B D_{22} \rangle W_{,2}^B. \quad (4.4)$$

Рівняння (4.1)–(4.4) є системою рівнянь щодо невідомих макрופереміщень та коректорів ϑ_{α} , w , Θ_{α}^a , W^A . Ці рівняння не можна отримати як частковий випадок наведених у [1] рівнянь стосовно пластини з періодичністю у двох напрямках. У [1] рівняння для коректорів є звичайними різнице-вими рівняннями. Для пластини з одноперіодичною структурою вони є рівняннями у частинних похідних, причому у них входять частинні похідні від коректорів за змінною x_2 . Одночасно формуються додаткові крайові умови для коректорів на берегах $x_2 = \pm L_2/2$ (порівняти з [3]).

5. Висновки. У статті запропоновано нову усереднену двовимірну модель прямокутної пластини середньої товщини з одноперіодичною структурою (тобто періодичною в одному напрямі). Ця модель враховує масштабний ефект, тобто вплив величини мікроструктури на макродинамічні властивості пластини. Пластини з такою структурою аналізувалися до цього часу, наприклад, з використанням методу асимптотичної гомогенізації, який цим ефектом нехтує. Показано, що при застосуванні запропонованого методу, який враховує масштабний ефект, пластину з одноперіодичною структурою не можна трактувати як частковий випадок пластини з двоперіодичною структурою, як це можна робити в асимптотично згомогенізованій моделі. Одержані у праці рівняння моделі відрізняються якісно – вони складніші (зроблено слабші припущення). На відміну від рівнянь для пластини з подвійною періодичністю, рівняння щодо коригуючих функцій, які є додатковими кінематичними невідомими, є рівняннями у частинних похідних, тоді коли для пластини з подвійною періодичністю це є звичайні диференціальні рівняння.

З'ясовано, що при закладанні однорідності й сталої товщини пластини та при однорідних початкових умовах динамічні рівняння еволюції (4.2) ви-

конуються тотожно, а рівняння (4.1) та (4.3) дають класичні рівняння руху пластини Рейснера – Міндліна. Аналогічна ситуація спостерігається у випадку моделі пластини з періодичністю у двох напрямках з урахуванням масштабного ефекту, описаної у [1].

У запропонованому способі моделювання з урахуванням масштабного ефекту розв'язок залежить від вибору так званих функцій форми. За означенням ці функції дають вигляд власних коливань окремої комірки періодичності. Тому вони не є довільними, а впливають з попередньо розв'язаної задачі на власні значення при періодичних граничних умовах (порівняти [2]).

Пластини з однопериодичною структурою мають велике практичне застосування, особливо у будівельних конструкціях. Вже навіть частковий випадок (задача для смуги плит) запропонованої у роботі моделі, може бути використаний для динамічних обчислень періодично ребрених сталевих та залізобетонних плит, у яких ребра смуги плит є несучими елементами, які розміщені перпендикулярно до опор. Це істотно розширює діапазон динамічного аналізу плит середньої товщини з періодичною структурою порівняно з запропонованою у праці [1] моделлю.

1. Baron E., Woźniak Cz. On the microdynamics of composite plates // Arch. Appl. Mech. – 1995. – 66. – P. 126–133.
2. Woźniak Cz. Internal variables in dynamics of composite solids with periodic microstructure // Arch. Mech. – 1977. – 49. – P. 421–441.
3. Baron E. Dynamic behaviour of plates with a uniperiodic structure (в друці).

Yevheniy Baron

THE DYNAMICS OF PLATES WITH UNIAXIAL PERIODICAL STRUCTURE

The new two-paramertuical model of an elastic rectangular plate with uniaxial periodical structure is proposed. This model is applicable to plates with variable width (according to Raisner-Midlin hipotesis) and takes into account the scoring effect on macrodynamic characteristics of plates. This effect is usually neglected at known asymptotical homogenized models of periodical plates.

Стаття надійшла до редколегії 23.09.99

UDC 539.3

Bohdan Michalak

Łódź University of Technology

ON A CHOICE OF MICRO-SHAPE FUNCTIONS FOR A DYNAMIC BEHAVIOUR OF WAVY PLATES

1. Introduction. The subject of this paper is a dynamic analysis of the wavy-plate shown on Fig. 1. It is assumed that: $x_3 = z(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Pi$, $\delta/l \ll 1$, $\delta/R \ll 1$, $z(\cdot)$ – Δ -periodic function, $l \equiv \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$, $\Delta := (0, l_1) \times (0, l_2)$, $l \ll L_\Pi$, L_Π – smallest characteristic length dimension of Π .

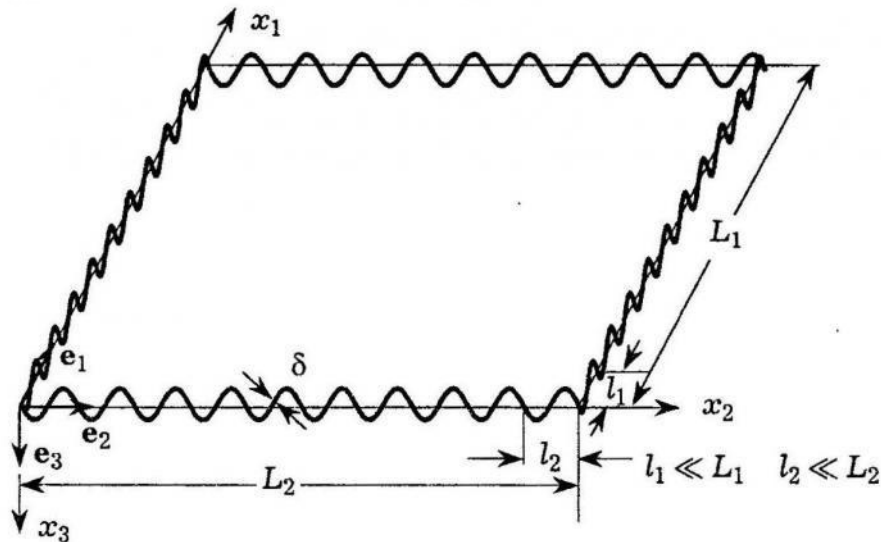


Fig. 1.

The paper is a continuation of previous investigations given in [1].

Objective:

- (i) to obtain the governing equations of the averaged theory of a wavy-plates for the different form of the micro shape functions for in-plane and out of plane of the plate displacements;
- (ii) to obtain the micro-shape functions from the solution of eigenvalue problem for a periodic cell Δ with the use of a finite element method;
- (iii) to compare the obtained results from mezostructural theory to the results from the finite elements method, the homogenized theory and the orthotropic plates model.

Direct description of the wavy-plate is the same as the one given in [1].

2. Modelling approach.

1. *Averaging operator.* Let $f(\mathbf{z})$ be an integrable function defined on Π . In the sequel, we shall use the denotation

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{l_1 l_2} \int_{\Delta(\mathbf{x})} f(z) dz_1 dz_2. \quad (1)$$

2. *Long wave approximation.* The function $F(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Pi$, will be called the regular macro function if for an arbitrary $z \in \Pi$ and every $\mathbf{x} \in \Delta(z)$, the following formula holds

$$(\forall f) \quad [\langle f F \rangle(\mathbf{x}) \cong \langle f \rangle F(\mathbf{x})] \quad (2)$$

for $F \in \{F, \nabla F, \dot{F}, \dots\}$.

3. Basic-Kinematics Hypothesis

We restrict consideration to the motion, the length of waves is large compared to the mezostructure length parameter l . The displacement field $u_i(\mathbf{x}, t)$ of the wavy-plate can be approximated by

$$\begin{aligned} u_\alpha(\mathbf{x}, t) &= U_\alpha(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x}) V_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2) \in \Pi, \quad t \geq 0, \\ u_3(\mathbf{x}, t) &= U_3(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}) V_3(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3)$$

where: $U_i(\cdot, t)$, $V_i(\cdot, t)$ – regular Δ – macro functions (basic unknowns).

The macrodisplacements $U_i(\mathbf{x}, t) = \langle u_i \rangle(\mathbf{x}, t)$ describe the averaged motion of the wavy-plates.

The functions $h(\cdot) V_\alpha(\cdot, t)$ and $g(\cdot) V_3(\cdot, t)$ describe the local displacement oscillations, caused by mezostructure of the periodic plate.

3. A choice of micro-shape functions. Functions $h(\cdot)$ and $g(\cdot)$ will be referred to as the micro-shape functions and are obtained as an approximate solution to the eigenvalue problem on a periodic cell Δ together with periodic boundary conditions. The choice of these functions will be determined by the analysis of free vibrations of a periodic cell Δ with the use of a finite element method.

The form of the micro-shape functions is obtained as an eigenvibrations form of a periodic cell Δ .

The forms of the eigenvibrations of the periodic cell Δ : $z = f \sin(2\pi x/l)$ (where $f/l = 0.1$ and $\delta/l = 0.1$) together with periodic boundary conditions can be approximated by functions:

Vibrations in plane $h = l^2 \sin(2\pi x/l)$, vibrations out of plane $g = l^2 \sin(4\pi x/l)$.

4. Averaged description: mezo-structural theory (MST). The aforementioned modelling hypotheses (1)–(3) lead from the direct description of the wavy-plate to a system of equations in macrodisplacements U_i and correctors V_i constituting the governing equations of the averaged theory of wavy-plates.

The equations of motion presented below in the coordinate form are

$$\begin{aligned}
M_{,\alpha\beta}^{i\alpha\beta} - M_{,\alpha}^{i\alpha} - N_{,\alpha}^{i\alpha} + N^i + \langle \tilde{\rho} \rangle \ddot{U}^i &= \tilde{p}^i, \\
K^\gamma + L^\gamma + \langle \tilde{\rho} h h \rangle \ddot{V}^\gamma &= \langle \tilde{p}^\gamma h \rangle, \quad K^3 + L^3 + \langle \tilde{\rho} g g \rangle \ddot{V}^3 = \langle \tilde{p}^3 g \rangle. \quad (4)
\end{aligned}$$

Constitutive equations have a form

$$\begin{aligned}
N^{i\alpha} &= D^{i\alpha|j\beta} U_{j,\beta} + H^{i\alpha|\mu} V_\mu + H^{i\alpha|3} V_3, \\
N^i &= D^{i|j\beta} U_{j,\beta} + C^{i|\mu} V_\mu + C^{i|3} V_3, \\
K^\alpha &= H^{\alpha|j\beta} U_{j,\beta} + H^{\alpha|\mu} V_\mu + H^{\alpha|3} V_3, \\
K^3 &= H^{3|j\beta} U_{j,\beta} + H^{3|\mu} V_\mu + H^{3|3} V_3, \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M^{i\alpha\beta} &= B^{i\alpha\beta|j\gamma\delta} U_{j,\gamma\beta} - B^{i\alpha\beta|j\gamma} U_{j,\gamma} + B^{i\alpha\beta|\mu} V_\mu + B^{i\alpha\beta|3} V_3, \\
M^{i|\alpha} &= -B^{i\alpha|j\gamma\delta} U_{j,\gamma\delta} + B^{i\alpha|j\gamma} U_{j,\gamma} - B^{i\alpha|\mu} V_\mu - B^{i\alpha|3} V_3, \\
L^\alpha &= B^{\alpha|j\gamma\delta} U_{j,\gamma\beta} - B^{\alpha|j\tau} U_{j,\tau} + B^{\alpha|\mu} V_\mu + B^{\alpha|3} V_3, \\
L^3 &= B^{3|j\gamma\delta} U_{j,\gamma\delta} - B^{3|j\tau} U_{j,\tau} + B^{3|\mu} V_\mu + B^{3|3} V_3,
\end{aligned}$$

where we have denoted

$$\begin{aligned}
D^{i\alpha|j\beta} &\equiv D \langle H^{\delta\alpha\gamma\beta} G_\gamma^i G_\gamma^j \sqrt{a} \rangle, \quad H^{i\alpha|\mu} = H^{\mu|i\alpha} \equiv D \langle H^{\delta\alpha\gamma\beta} G_\delta^i G_\gamma^\mu h_{,\beta} \sqrt{a} \rangle, \quad (6) \\
H^{i\alpha|3} &= H^{3|i\alpha} \equiv D \langle H^{\delta\alpha\gamma\beta} G_\delta^i G_\gamma^3 g_{,\beta} \sqrt{a} \rangle, \\
D^{i|j\beta} &\equiv D \langle H^{\alpha\delta\gamma\beta} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\delta \end{matrix} \right\} G_\lambda^i G_\gamma^j \sqrt{a} \rangle, \quad C^{i|\mu} \equiv D \langle H^{\alpha\beta\gamma\delta} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} G_\lambda^i G_\gamma^\mu h_{,\delta} \sqrt{a} \rangle, \\
C^{i|3} &\equiv D \langle H^{\alpha\beta\gamma\delta} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} G_\lambda^i G_\gamma^3 g_{,\delta} \sqrt{a} \rangle, \quad H^{\alpha|\mu} \equiv D \langle H^{\tau\beta\gamma\delta} G_\tau^\alpha G_\gamma^\mu h_{,\delta} h_{,\beta} \sqrt{a} \rangle, \\
H^{\alpha|3} &= H^{3|\alpha} \equiv D \langle H^{\tau\beta\gamma\delta} G_\tau^\alpha G_\gamma^3 g_{,\delta} h_{,\beta} \sqrt{a} \rangle, \\
B^{i\alpha\beta|j\gamma\delta} &\equiv B \langle H^{\alpha\beta\gamma\delta} n^i n^j \sqrt{a} \rangle, \quad B^{i\alpha\beta|\mu} = B^{\mu|i\alpha\beta} \equiv B \langle H^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{i,\gamma\delta} n^i n^\mu \sqrt{a} \rangle, \\
B^{i\alpha\beta|3} &= B^{3|i\alpha\beta} \equiv B \langle H^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{i,\gamma\delta} n^i n^3 \sqrt{a} \rangle, \quad B^{i\alpha\beta|j\gamma} = B^{j\gamma|i\alpha\beta} \equiv B \langle H^{\alpha\beta\mu\delta} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \mu\delta \end{matrix} \right\} n^i n^j \sqrt{a} \rangle, \\
B^{i\alpha|j\gamma} &\equiv B \langle H^{\mu\delta\tau\nu} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\delta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \tau\nu \end{matrix} \right\} n^i n^j \sqrt{a} \rangle, \quad B^{i\alpha|\mu} = B^{\mu|i\alpha} \equiv B \langle H^{\beta\tau\gamma\delta} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\tau \end{matrix} \right\} n^i n^\mu h_{i,\gamma\delta} \sqrt{a} \rangle, \\
B^{i\alpha|3} &= B^{3|i\alpha} \equiv B \langle H^{\beta\tau\gamma\delta} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\tau \end{matrix} \right\} n^i n^3 g_{i,\gamma\delta} \sqrt{a} \rangle, \quad B^{\alpha|\mu} \equiv B \langle H^{\gamma\beta\tau\delta} h_{i,\gamma\beta} h_{i,\tau\delta} n^\alpha n^\mu \sqrt{a} \rangle, \\
B^{\alpha|3} &= B^{3|\alpha} \equiv B \langle H^{\gamma\beta\tau\delta} h_{i,\gamma\beta} g_{i,\tau\delta} n^\alpha n^3 \sqrt{a} \rangle, \quad B^{3|3} \equiv B \langle H^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{i,\alpha\beta} g_{i,\gamma\delta} n^3 n^3 \sqrt{a} \rangle.
\end{aligned}$$

5. Applications. To compare the mezo-structural theory (MST), homogenized theory (HT), the orthotropic plate model and the finite element method we shall investigate the simple problem of the cylindrical bending of a rectangular wavy-plate. In this case the basic unknowns U_i and V_i depend only on arguments x_2 and t .

1. Mezo-structural theory

In this case, neglecting external loading, the system equations of motion will take the form

$$\begin{aligned} M_{,22}^{122} - M_{,2}^{12} - N_{,2}^{12} + N^1 + \langle \tilde{\rho} \rangle \ddot{U}^1 &= 0, \\ M_{,22}^{222} - M_{,2}^{22} - N_{,2}^{22} + N^2 + \langle \tilde{\rho} \rangle \ddot{U}^2 &= 0, \\ M_{,22}^{322} - M_{,2}^{32} - N_{,2}^{32} + N^3 + \langle \tilde{\rho} \rangle \ddot{U}^3 &= 0, \\ K^1 + L^1 \langle \tilde{\rho} h h \rangle \ddot{V}^1 &= 0, & K^2 + L^2 + \langle \tilde{\rho} h h \rangle \ddot{V}^2 &= 0, \\ K^3 + L^3 + \langle \tilde{\rho} g g \rangle \ddot{V}^3 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

After substituting the right-hand sides of Eqs. (5) into Eqs. (7), we obtain the system of equations for $U_i = U_i(\mathbf{x}, t)$ and $V_i = V_i(\mathbf{x}, t)$.

Let the wavy-plate midsurface be defined by $z = f \sin(2\pi x^2/l)$ and the micro-shape functions by $h = l^2 \sin(2\pi x^2/l)$, $g = l^2 \sin(4\pi x^2/l)$. Let us restrict these considerations to the analysis of free vibrations for the unbounded wavy-plate. In this case, we shall look for solutions of Eqs. (7) in the form

$$\begin{aligned} U_1 &= 0, & U_2 &= A_2 \sin(kx_2) \cos(\omega_2 t), & U_3 &= A_3 \sin(kx_2) \cos(\omega t), \\ V_1 &= 0, & V_2 &= C_2 \cos(kx_2) \cos(\omega t), & V_3 &= C_3 \cos(kx_2) \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (8)$$

$k := \pi/L$ is the wavenumber, L being the vibration wavelength ($L \gg l$). Substituting the right-hand of Eqs. (8) into Eqs. (7), we obtain non-trivial solutions only if

$$\begin{vmatrix} (\omega)^2 \langle \tilde{\rho} \rangle - C_{33} & C_{35} & C_{36} \\ C_{53} & (\omega)^2 \langle \tilde{\rho} h h \rangle - C_{55} & C_{56} \\ C_{63} & C_{65} & (\omega)^2 \langle \tilde{\rho} g g \rangle - C_{66} \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

where we have denoted

$$\begin{aligned} C_{33} &\equiv B \langle H^{2222} (n^3)^2 \sqrt{a} \rangle k^4 + [B \langle H^{2222} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 22 \end{smallmatrix} \right\} n^3 \sqrt{a} \rangle + D \langle H^{2222} (G_2^3)^2 \sqrt{a} \rangle] k^2, \\ C_{35} = C_{53} &\equiv [B \langle H^{2222} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 22 \end{smallmatrix} \right\} n^2 n^3 h_{,22} \sqrt{a} \rangle - D \langle H^{2222} G_2^2 G_2^3 h_{,2} \sqrt{a} \rangle] k, \\ C_{36} = C_{63} &\equiv [B \langle H^{2222} \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 22 \end{smallmatrix} \right\} n^3 n^3 g_{,22} \sqrt{a} \rangle - D \langle H^{2222} G_2^3 G_2^3 g_{,2} \sqrt{a} \rangle] k, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
C_{55} &\equiv D \langle H^{2222} (G_2^2 h_{,2})^2 \sqrt{a} \rangle + B \langle H^{2222} (n^2 h_{,22})^2 \sqrt{a} \rangle, \\
C_{56} = C_{65} &\equiv -B \langle H^{2222} n^2 n^3 h_{,22} g_{,22} \sqrt{a} \rangle - D \langle H^{2222} G_2^2 G_2^3 h_{,2} g_{,2} \sqrt{a} \rangle, \\
C_{66} &\equiv D \langle H^{2222} (G_2^3 g_{,2})^2 \sqrt{a} \rangle + B \langle H^{2222} (n^3 g_{,22})^2 \sqrt{a} \rangle.
\end{aligned}$$

2. Homogenized theory (HT).

The homogenized model of dynamics of the wavy-plate can be derived from Eqs. (7)–(10) by the asymptotic approximation in which the mezostructure of the wavy-plate is scaled down $l \rightarrow 0$. Keeping in mind that $\delta/l = \text{const}$, we shall neglect mezo-inertial terms $\langle \tilde{\rho} h h \rangle \rightarrow 0$, $\langle \tilde{\rho} g g \rangle \rightarrow 0$, and we can eliminate correctors V_i in Eqs. (7). Now, formula (9) leads to

$$\langle \tilde{\rho} \rangle (\omega)^2 = C_{33} - \frac{C_{66}(C_{35})^2 + C_{55}(C_{36})^2 + 2C_{35}C_{36}C_{56}}{C_{55}C_{66} - (C_{56})^2}. \quad (11)$$

3. The orthotropic plate model

Let us restrict these considerations to the analysis of transverse vibrations of orthotropic plates. In this case, equation of motion has a form [2]

$$B_{22} U_{3,2222} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\tilde{\rho} U_3 - J_1 U_{3,22}) = 0, \quad (12)$$

where [2]

$$B_{22} = B \frac{1}{1 + (\pi f/l)^2}, \quad J_1 = \frac{1}{l} \int_s (z^2 + x^2) \rho ds. \quad (13)$$

We shall look for a solution of Eqs. (12) in the form $U_3 = A_3 \sin(kx_2) \times \cos(\omega t)$. For the free vibration frequency, we obtain the following expression

$$(\omega)^2 = \frac{B_{22}(k)^4}{\tilde{\rho} + J_1(k)^2}. \quad (14)$$

4. The finite element method

Now we shall look for a solution of the free vibrations for the simply supported wavy-plate with the use of the finite element method. The span of the wavy-plate is equal $10l$, where l – mezostructure length parameter (length of the periodic cell) (Fig. 2)

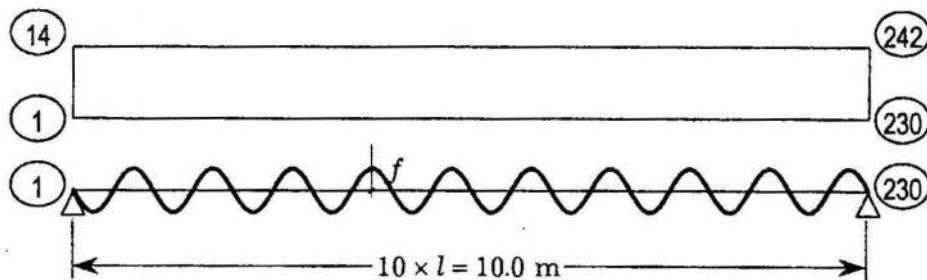


Fig. 2.

In Table for the mezostructural theory, the homogenized theory, the orthotropic plate model and the finite element method, free vibrations frequencies shown versus ratio δ/l , where $f/l = 1/10 = \text{const.}$

	δ/l	1/10	1/25	1/50	1/100
MST	ω_1	12.800	5.263	2.650	1.349
	ω_2	$21.221 \cdot 10^3$	$16.420 \cdot 10^3$	$15.467 \cdot 10^3$	$15.214 \cdot 10^3$
	ω_3	$34.954 \cdot 10^3$	$33.049 \cdot 10^3$	$32.837 \cdot 10^3$	$32.787 \cdot 10^3$
HT	ω	12,803	5.265	2.654	1.339
Orth.	ω	14.050	5.620	2.810	1.405
FEM	ω	13.925	5.570	2.785	1.392
MST/FEM	ω_1/ω	91.9%	94.4%	95.0%	96.9%

6. Conclusions.

- (i) The finite element method can be successfully applied to determine the form of the micro-shape functions.
- (ii) The assumed form of the micro-shape functions $h = l^2 \sin(2\pi x/l)$, $g = l^2 \sin(4\pi x/l)$ well describes a dynamic behaviour of wavy-plates for a different ratio δ/l and for the wavy amplitude $f \leq l/10$.
- (iii) Only mezo-structural model gives us lower and higher free vibrations frequencies for the assumed vibrations form of the wavy-plate.

1. Michalak B., Woźniak Cz., Woźniak M. The dynamic modelling of elastic wavy plates // Arch. Appl. Mech. – 1996. – 66. – P. 177–186.
2. Troitsky M.S. Stiffened plates: Bending, Stability and Vibrations. – Amsterdam-Oxford-New York, Elsevier Company, 1976.

Богдан Міхалак

ПРО ВИБІР ФУНКЦІЙ МІКРОФОРМИ ДЛЯ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ХВИЛЯСТИХ ПЛАСТИН

Обрано функцією мікроформи для хвилястих пластин за допомогою розв'язку задачі на власні коливання комірки періодичності, отриманого методом скінченних елементів. Вибрано також рівняння руху хвилястої пластини для різних типів функцій мікроформи стосовно коливач у площині та з площини пластини. Обчислено та порівняно частоти власних коливач хвилястої пластини, одержані з мезоструктурної, згомогенізованої моделі, а також за теорією ортотропних пластин і методом скінченних елементів.

Стаття надійшла до редколегії 17.06.99

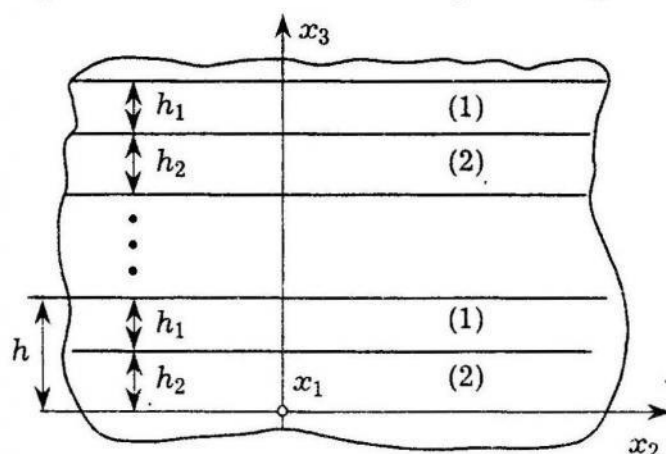
UDC 539.3

Stanisław Matysiak, Radosław Mieszkowski

Institute of Hydrogeology and Engineering Geology
University of Warsaw

DIFFUSOELASTICITY OF PERIODICALLY STRATIFIED BODIES

The diffusion phenomenon is often observed in nature as well as it is utilized in material technology (for example the thin - film technique). The construction of waste dumps have to take into consideration the diffusion processes. The penetration of diffused substance in solids can lead to strains and stresses. The problem of modelling of interactions between diffusion and deformation of homogeneous bodies were considered in many papers (see, for instance [1-3]). In this paper we consider an elastic nonhomogeneous body which in a natural (underformed) configuration is composed of periodically repeated two different isotropic homogeneous layers (see Figure). Let h_1 , h_2



The scheme of periodically elastic body.

be the layer thicknesses, and $h = h_1 + h_2$ be the thickness of each basic unit of the body. Let the axis x_3 be normal to the layering. Let $\lambda^{(r)}$, $\mu^{(r)}$, $r = 1, 2$, denote Lamé constants, $D^{(r)}$ denote the diffusion coefficients, $\chi^{(r)}$ and $\gamma_c^{(r)}$ denote the coupling coefficients of diffusion and stresses of the subsequent layers, respectively. By $\sigma_{ij}^{(r)}$, $r = 1, 2$; $i, j = 1, 2, 3$, we denote the components of stress tensor and let $\eta_i^{(r)}$ be the components of diffusion fluxes

in the layer of r -th kind.

As a basis of consideration the following constitutive relations in the layer of r -th kind are taken into account [5]:

$$\sigma_{ij}^{(r)} = 2\mu^{(r)}\varepsilon_{ij} + (\lambda^{(r)}\varepsilon_{kk} - \gamma_c^{(r)}c)\delta_{ij},$$

$$\eta_i^{(r)} = -D^{(r)}c_{,i} + \chi^{(r)}u_{k'ki},$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{for } i = j, \\ 0, & \text{for } i \neq j, \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1)$$

where $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, u_3)(\mathbf{x}, t)$ denotes the displacement vector, $c = c(\mathbf{x}, t)$ denotes the concentration of the diffusing substance, and t denotes time. The equations of coupled diffusoelasticity take the form:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(r)} + \rho^{(r)} X_i &= \rho^{(r)} \ddot{u}_i, \\ \eta_{ri}^{(r)} + \sigma &= \dot{c},\end{aligned}\quad (2)$$

where $\rho^{(r)}$ denotes the mass densities, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ is the body force vector, $\sigma = \sigma(\mathbf{x}, t)$ is the internal source of substance, B_r is the part of the region occupied by the material of the r -th kind. The equations (2) should be considered together with adequate initial and boundary conditions.

If the body is composed of sufficiently large number of repeated layers then it seems to be useful to apply of homogenized procedure with microlocal parameters [4]. Let an approximate solution of diffusoelasticity for microperiodic two-layered bodies be given in the form:

$$\begin{aligned}u_i(\mathbf{x}, t) &= U_i(\mathbf{x}, t) + \alpha(x_3) \underline{W}_i(\mathbf{x}, t), \\ c(\mathbf{x}, t) &= C(\mathbf{x}, t) + \alpha(x_3) \underline{G}(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\quad (3)$$

where $\alpha(\cdot): R \rightarrow R$ is the known a priori shape function satisfying the conditions

$$\begin{aligned}\alpha(x_3 + h) &= \alpha(x_3), \\ \int_{x_3}^{x_3+h} \alpha(y) dy &= 0, \quad |\alpha(x_3)| < h, \quad \forall x_3 \in R\end{aligned}\quad (4)$$

and it is given as follows:

$$\alpha(x_3) = \begin{cases} x_3 - 0.5 h_1, & \text{for } 0 \leq x_3 \leq h_1, \\ \frac{-\gamma x_3}{1-\gamma} - 0.5 h_1 + \frac{h_1}{1-\gamma}, & \text{for } h_1 \leq x_3 \leq h, \end{cases}\quad (5)$$

where

$$\gamma = \frac{h_1}{h}.\quad (6)$$

The functions $U_i(\cdot)$, $C(\cdot)$ are unknown functions interpreted as components of macrodisplacements and macroconcentration, respectively. The functions $W_i(\cdot)$, $G(\cdot)$ are extra unknowns called the kinematical and diffusional microlocal parameters. They are related with the microperiodic structure of the body. Since $|\alpha(x_3)| < h$ for every $x_3 \in R$, then for small h the underlined terms in Eqs. (3) are small and will be neglected. However, the derivative $\alpha'(\cdot)$ is not small and the terms involving $\alpha'(\cdot)$ cannot be neglected. After some calculations [5], which here will be omitted, the following system of equations is obtained

$$\bar{\mu} U_{iij} + (\tilde{\lambda} + \bar{\mu}) U_{jji} + [\mu] W_{jj} \delta_{i3} + [\mu] W_{i3} + [\lambda] W_{3i} - \tilde{\gamma}_c C_i + \tilde{\rho} X_i - \tilde{\rho} \ddot{U}_i = 0, \quad (7)$$

$$\tilde{D} C_{ii} + [D] G_3 - \dot{C} + \sigma - \tilde{\chi} U_{k'kii} - [\chi] W_{3'ii} = 0$$

and

$$\begin{aligned} -\{[u] (U_{i3} + U_{3'i}) + [\lambda] U_{k'k} \delta_{i3}\} + [\gamma_c] C \delta_{i3} &= \hat{\mu} W_i + (\hat{\lambda} + \hat{\mu}) W_3 \delta_{i3}, \\ [D] C_3 + \hat{D} G - [\chi] U_{k'k3} - \hat{\chi} W_{33} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

where the material parameters in Eqs. (7), (8) can be expressed in the form:

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= f^{(1)} \gamma - (1 - \gamma) f^{(2)}, \\ [f] &= \gamma (f^{(1)} - f^{(2)}), \\ \hat{f} &= f^{(1)} \gamma + \frac{\gamma^2}{1 - \gamma} f^{(2)} \end{aligned} \quad (9)$$

for an arbitrary h -periodic function $f(\cdot)$ taking a constant value $f^{(r)}$ in a layer of r -th kind (the material parameters can be obtained by substituting for a functions $f(\cdot)$ the h -periodic functions $\lambda, \mu, \chi, \rho, \gamma_c, D$). The equations (8) constitute a system of four linear algebraic equations for the microlocal parameters W_i and G . The microlocal parameters W_i, G can be eliminated from Eqs. (7).

The stresses $\sigma_{ij}^{(r)}$ and the diffusion fluxes $\eta_i^{(r)}$ in a layer of r -th kind are expressed in the form

$$\begin{aligned} \eta_\beta^{(r)} &= -D^{(r)} C_\beta + \chi^{(r)} (U_{k'k\beta} + \alpha' W_{3'\beta}), \\ \eta_3^{(r)} &= -D^{(r)} (C_3 + \alpha' G) + \chi^{(r)} (U_{k'k3} + \alpha' W_{33}), \\ \sigma_{\beta\gamma}^{(r)} &= \mu^{(r)} (U_{\beta'\gamma} + U_{\gamma'\beta}) + [\lambda^{(r)} (U_{k'k} + \alpha' W_3) - \gamma_c^{(r)} C] \delta_{\beta\gamma}, \\ \sigma_{\beta 3}^{(r)} &= \mu^{(r)} (U_{\beta'3} + U_{3'\beta} + \alpha' W_\beta), \\ \sigma_{33}^{(r)} &= 2\mu^{(r)} (U_{33} + \alpha' W_3) + \lambda^{(r)} (U_{k'k} + \alpha' W_3) - \gamma_c^{(r)} C, \end{aligned} \quad (10)$$

$r = 1, 2, \quad \beta, \gamma = 1, 2,$

where

$$\alpha' = \begin{cases} 1, & \text{for } r = 1, \\ -\frac{\gamma}{1 - \gamma}, & \text{for } r = 2. \end{cases}$$

It can be shown that the obtained components of diffusion fluxes $\eta_3^{(r)}$ and stress tensors $\sigma_{3i}^{(r)}$, $r = 1, 2$; $i = 1, 2, 3$, satisfy conditions of continuity on interfaces.

The presented model of diffusoelectricity in periodic two-layered bodies can be treated as a basis of theory and a starting point for applications in environmental engineering, composite materials.

Assuming that the considered body is homogeneous, so $\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$, $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$, $\chi^{(1)} = \chi^{(2)}$, $D^{(1)} = D^{(2)}$, $\gamma_c^{(1)} = \gamma_c^{(2)}$, the presented equations of homogenized model reduce to the relations for homogenized bodies [3].

1. Podstrigach Ya. S. Differential equations of thermodiffusion for deformable solids // *Dop. Acad. of Science of Ukraine*, 1961. – P. 169–171 (in Ukrainian).
2. Nowacki W. Thermodiffusion in solids // *J. Theor. And Appl. Mech.* – 1975. – 2, No. 13 – P. 143–158, (in Polish).
3. Nowacki W., Olesiak Z. Thermodiffusion in solids, *Polish Sci. Publ.* – Warsaw. – 1991 (in Polish).
4. Woźniak Cz. A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composites // *Int. J. Eng. Sci.* – 1987. – 25, No. 5. – P. 483–499.
5. Matysiak S. J., Mieszkowski R. On modelling of diffusion processes in periodically stratified elastic bodies // *Int. J. of Heat and Mass Transfer.* – 1999. – 4, No. 26. – P. 539–547.

Станіслав Матисяк, Радослав Мешковський

ДИФУЗІЙНІ ПРОЦЕСИ В ПЕРІОДИЧНО ШАРУВАТИХ ПРУЖНИХ ТІЛАХ

У роботі представлено гомогенізовану модель дифузії в пружних мікроперіодичних шаруватих середовищах. Розв'язки побудовані в рамках лінійної зв'язаної теорії механодифузії [1–3] на основі процедури гомогенізації з мікролокальними параметрами [4]. Рівняння гомогенізованої моделі виражаються за допомогою невідомих макрופереміщень, макроконцентрації та мікролокальних параметрів.

Стаття надійшла до редколегії 11.08.99

УДК 539.3

Михайло Делявський, В'єслав Нагурко, Максим Кравчук

Академія Технічно-Рільнича ім. Я. і А. Снядецьких, Бидгощ
Головна школа сільського господарства у Варшаві
Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України

МЕТОД РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ БАЛОК

Розглянемо шарувату прямокутну балку, складену з ортотропних шарів і віднесемо її до декартової системи координат $x_1 O x_3$ з початком у геометричному центрі середнього шару. Поле переміщень у k -му шарі такої балки $u^{(k)} = \{u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}\}$ описується функціями [1]

$$u_1^{(k)} = u_1(\tilde{x}_1, 0, \tilde{x}_3), \quad u_3^{(k)} = u_3(\tilde{x}_1, 0, \tilde{x}_3), \quad u_2^{(k)} = 0, \quad (1)$$

які вибираємо у вигляді

$$\begin{aligned} u_1^{(k)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ f_{1(m)}^{[1](k)}(x_1) \tilde{T}_m^{*[3]}(x_3^{(k)}) + f_{1(m)}^{[3](k)}(x_3^{(k)}) \tilde{T}_m^{*[1]}(x_1) \right\}, \\ u_3^{(k)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ f_{3(m)}^{[1](k)}(x_1) \tilde{T}_m^{*[3]}(x_3^{(k)}) + f_{3(m)}^{[3](k)}(x_3^{(k)}) \tilde{T}_m^{*[1]}(x_1) \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

враховуючи умови симетрії задачі, де символом $T_m^{*[j]}(x_j)$ позначено функції

$$\tilde{T}_m^{*[j]}(x_j) = \cos \delta_m^{*[j]} x_j, \quad \tilde{T}_m^{*[j]}(x_j) = \sin \delta_m^{*[j]} x_j. \quad (3)$$

Символ «~» означає, що складові вектора переміщень є антисиметричними стосовно змінних x_1 і x_3 , а символ « $\sim$ » належить до симетричних складових вектора переміщень. Для симетричного навантаження поле переміщень набуває вигляду

$$\begin{aligned} u_1^{(k)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ f_{1(m)}^{[1](k)}(x_1) \sin(\delta_m^{*[3]} x_3^{(k)}) + f_{1(m)}^{[3](k)}(x_3^{(k)}) \sin(\delta_m^{*[1]} x_1) \right\}, \\ u_3^{(k)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ f_{3(m)}^{[1](k)}(x_1) \cos(\delta_m^{*[3]} x_3^{(k)}) + f_{3(m)}^{[3](k)}(x_3^{(k)}) \cos(\delta_m^{*[1]} x_1) \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $f_{i(m)}^{[j]}(x_j)$ невідомі функції; $\delta_m^{*[j](k)} = (2m-1)\pi/2a_j^{(k)}$, $i, j = 1, 3$. Задачу розв'язуємо окремо для кожного шару k , а відтак зшиваємо окремі розв'язки шляхом задоволення умов спаю на поверхнях поділу шарів. Тому надалі індекс « k » пропускаємо. Використовуючи геометричні співвідношення Коші:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}]; \quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j), \quad (5)$$

фізичні співвідношення закону Гука [3]:

$$\sigma_{ij} = b_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (6)$$

та рівняння рівноваги

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} = 0, \quad \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} = 0, \quad (7)$$

для шару з номером k приходимо до системи двох диференціальних рівнянь у частинних похідних, які є рівняннями рівноваги (у переміщеннях) розглядуваного шару.

$$\begin{aligned} b_{11} u_{1,11} + (b_{13} + b_{55}) u_{3,13} + b_{55} u_{1,33} &= 0, \\ b_{33} u_{3,33} + (b_{13} + b_{55}) u_{1,13} + b_{55} u_{3,11} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Підставляючи в ці рівняння представлення (4) для складових вектора переміщень і розділяючи змінні, дістанемо систему звичайних диференціальних рівнянь стосовно невідомих функцій $f_{p(m)}^{[j]}(x_j)$:

$$\sum_{r=1}^3 \left\{ A_{kr}^{[j]} f_{1(m)}^{[j]}{}^{(3-r)}(x_j) + C_{kr}^{[j]} f_{3(m)}^{[j]}{}^{(3-r)}(x_j) \right\} = 0. \quad (9)$$

Коефіцієнти $A_{kr}^{[j]}$, $C_{kr}^{[j]}$ визначаються так:

$$\begin{aligned} A_{11}^{[1]} &= b_{11}, \quad A_{13}^{[1]} = -b_{55} \delta_m^{*[3]^2}, \quad C_{11}^{[1]} = 0, \quad C_{13}^{[1]} = 0, \quad A_{13}^{[1]} = 0; \\ C_{23}^{[1]} &= -b_{33} \delta_m^{*[3]^2}; \quad C_{21}^{[1]} = A_{11}^{[3]}; \quad A_{13}^{[3]} = -b_{11} \delta_m^{*[1]^2}; \\ C_{11}^{[3]} &= 0, \quad C_{13}^{[1]} = -(b_{13} + b_{55}) \delta_m^{*[1]^2}; \quad C_{13}^{[3]} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Розв'язки системи диференціальних рівнянь (9) вибираємо у вигляді

$$f_{p(m)}^{[j]} = R_{p(m)}^{[j]} \exp[\lambda_{(m)}^{*[j]} x_j], \quad (11)$$

де $R_{p(m)}^{[j]}$ і $\lambda_{(m)}^{*[j]}$ – невідомі комплексні параметри:

$$R_{p(m)}^{[j]} = C_{p(m)}^{[j]} + i S_{p(m)}^{[j]}, \quad \lambda_{(m)}^{*[j]} = \alpha_{(m)}^{*[j]} + i \beta_{(m)}^{*[j]}. \quad (12)$$

Підставляючи розв'язки (11), в рівняння (9) приходимо до однорідної системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно невідомих коефіцієнтів $R_{p(m)}^{[j]}$. З рівності нулю їх визначників одержуємо характеристичні рівняння на параметри $\lambda_{(m)}^{*[j]}$:

$$\sum_{r=1}^3 A_{1r}^{[j]} \lambda_{(m)}^{*[j]}{}^{3-r} \sum_{s=1}^3 C_{2s}^{[j]} \lambda_{(m)}^{*[j]}{}^{3-r} - \sum_{r=1}^3 A_{2r}^{[j]} \lambda_{(m)}^{*[j]}{}^{3-r} \sum_{s=1}^3 C_{1s}^{[j]} \lambda_{(m)}^{*[j]}{}^{3-r} = 0. \quad (13)$$

Кожне з цих рівнянь є рівнянням четвертого порядку з дійсними коефіцієнтами і містить тільки парні степені параметрів $\lambda_{(m)}^{*[j]}$. Тому воно має чотири дійсні попарно рівні корені. У результаті загальний розв'язок системи (9) набуває вигляду [2]

$$f_{p(m)}^{[j]}(x_j) = \sum_{v=1}^4 R_{p(m)}^{[j]} \exp[\lambda_{v(m)}^{[j]} x_j]. \quad (14)$$

Коефіцієнти $R_{3(m)}^{[j]}$ і $R_{1(m)}^{[j]}$ лінійно залежні ($R_{3(m)}^{[j]} = R_{1(m)}^{[j]} K_v^{[j]}$), де

$$K_v^{[1]} = \frac{b_{1111} \gamma_v^{[1]^2} - b_{55}}{(b_{1133} + b_{55}) \gamma_v^{[1]}}, \quad K_v^{[3]} = \frac{b_{1313} \gamma_v^{[3]^2} - b_{1111}}{(b_{1133} + b_{1313}) \gamma_v^{[1]}}, \quad \text{де } \gamma_v^{[j]} = \lambda_{v(m)}^{[j]} / \delta_m^{*[j]}. \quad (15)$$

У результаті одержуємо загальні вирази для переміщень

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1(m)}^{[1]} [E_{v(m)}^{[1]}(\xi_1) \sin \delta_m^{[3]} \xi_3] + R_{1(m)}^{[3]} [E_{v(m)}^{[3]}(\xi_3) \sin \delta_m^{[1]} \xi_1] \right\}, \\ u_3 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1(m)}^{[1]} [K_v^{[1]} E_{v(m)}^{[1]}(\xi_1) \cos \delta_m^{[3]} \xi_3] + R_{1(m)}^{[3]} [K_v^{[3]} E_{v(m)}^{[3]}(\xi_3) \cos \delta_m^{[1]} \xi_1] \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

і для напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1(m)}^{[1]} \delta_m^{*[3]} (b_{1111} \gamma_v^{[1]} - b_{1133} K_v^{[1]}) E_{v(m)}^{[1]}(\xi_1) \sin \delta_m^{[3]} \xi_3 + \right. \\ &\quad \left. + R_{1(m)}^{[3]} \delta_m^{*[1]} (b_{1111} + b_{1133} K_v^{[3]} \gamma_v^{[3]}) E_{v(m)}^{[3]}(\xi_3) \cos \delta_m^{[1]} \xi_1 \right\}, \\ \sigma_{33} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1(m)}^{[1]} \delta_m^{*[3]} (b_{1133} \gamma_v^{[1]} - b_{3333} K_v^{[1]}) E_{v(m)}^{[1]}(\xi_1) \sin \delta_m^{[3]} \xi_3 + \right. \\ &\quad \left. + R_{1(m)}^{[3]} \delta_m^{*[1]} (b_{1133} + b_{3333} K_v^{[3]} \gamma_v^{[3]}) E_{v(m)}^{[3]}(\xi_3) \cos \delta_m^{[1]} \xi_1 \right\}, \\ \sigma_{13} &= \frac{1}{2} b_{1313} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1(m)}^{[1]} \delta_m^{*[3]} (1 + K_v^{[1]} \gamma_v^{[1]}) E_{v(m)}^{[1]}(\xi_1) \cos \delta_m^{[3]} \xi_3 + \right. \\ &\quad \left. + R_{1(m)}^{[3]} \delta_m^{*[1]} (\gamma_v^{[3]} - K_v^{[3]}) E_{v(m)}^{[3]}(\xi_3) \sin \delta_m^{[1]} \xi_1 \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

де $\xi_1 = \frac{x_1}{a_1}$, $\xi_3 = \frac{x_3}{a_3}$, $E_{v(m)}^{[j]}(\xi_j) = \exp[\lambda_{v(m)}^{[j]} \xi_j]$; $\lambda_{v(m)}^{[j]} = \gamma_v^{[j]} \delta_m a_j / a_{3-j}$.

Як приклад розглянемо поперечний згин тришарової вільно опертої балки. На краях $\xi_1 = \pm 1$ повинні задовольнятися умови: $u_3|_{\xi_1=1} = 0$, $\sigma_{11}|_{\xi_1=1} = 0$. Виконання цих умов призводить до рівності нулю коефіцієнтів $R_{1(m)}^{[1]} = 0$. Наведемо кінцеві формули:

$$u_1^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1(m)}^{[3]} [\exp \lambda_{v(m)}^{[3]}(\xi_3) \sin \delta_m^{[1]} \xi_1] \right\},$$

$$u_3^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1(m)}^{[3]} K_v^{[3]} \left[\exp \lambda_{v(m)}^{[3]} (\xi_3) \cos \delta_m^{[1]} \xi_1 \right] \right\}; \quad (18)$$

$$\sigma_{11}^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1(m)}^{[3]} \delta_m^{*[1]} C_{11}^{(i)} \exp \lambda_{v(m)}^{[3]} (\xi_3) \cos \delta_m^{[1]} \xi_1 \right\},$$

$$\sigma_{33}^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1(m)}^{[3]} \delta_m^{*[1]} C_{33}^{(i)} \exp \lambda_{v(m)}^{[3]} (\xi_3) \cos \delta_m^{[1]} \xi_1 \right\}; \quad (19)$$

$$\sigma_{13}^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{1(m)}^{[3]} \delta_m^{*[1]} S_{11}^{(i)} \exp \lambda_{v(m)}^{[3]} (\xi_3) \sin \delta_m^{[1]} \xi_1 \right\}.$$

Тут уведені позначення:

$$C_{11}^{(i)} = b_{1111}^{[3]} + b_{1133}^{[3]} K_v^{[3]} \gamma^{[3]}; \quad C_{33}^{(i)} = b_{3311}^{[3]} + b_{3333}^{[3]} K_v^{[3]} \gamma^{[3]};$$

$$S_{13}^{(i)} = b_{1313}^{[3]} (\gamma^{[3]} - K_v^{[3]}); \quad (20)$$

i – номер шару. Невідомі коефіцієнти $R_{1(m)}^{[3]}$ визначаються з граничних умов та умов спаю.

1. Делявский М. В. Анализ напряженно-деформированного состояния ортотропных плит под действием изгибающей нагрузки // Пробл. прочно-сти. – 1995. – № 11-12. – С.45-53.
2. Delyavskyy M., Podhorecki A., Nagorko W. O pewnej metodzie wyznaczania odkształceń i naprężeń w prostokątnych belkach ortotropowych // XXXVIII Sympozjum PTMTiS Modelowanie w Mechanice, Politechnika Śląska, Gliwice. – 1999. – No. 9. – S. 51-56.
3. Lehnitski S.G. Anizotropnye plastinki. – Moskva: GITL, 1957. – 464 с.

Mykhailo Delyavsky, Wiesław Nagórko, Maksym Kravchuk

THE METHOD OF STRESS-STRAIN STATE CALCULATION OF THE MULTILAYERED ORTHOTROPIC BEAMS

The methodology of calculation of stress-strain state of multilayered orthotropic beams that are differently loaded is developed. The problem is solved separately for every layer. The unknown parameters of the problem will be determined from the boundary conditions and conditions of perfect mechanical contact on the common surfaces of the layers.

Стаття надійшла до редколегії 15.06.99

В'еслав Нагурко, Ярослав Зелінські

Головна школа сільського господарства у Варшаві

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ПЛАСТИНАХ, УТВОРЕНИХ ПЕРІОДИЧНО НЕОДНОРІДНИМИ ШАРАМИ

1. Вступ. Розглядатимемо пластину, яка займає у тривимірному просторі область Ω , і яку в прямокутній системі координат можна писати виразом $\Omega = \Pi \times (-h, h)$, $\Pi \subset R^2$, $(-h, h) \subset R$. Координати точок області Ω позначимо через (x_1, x_2, y) , а області Π – відповідно через (x_α) , $\alpha = 1, 2$. Нехай переміщеннями точок пластини будуть величини $v = (v_k)$, де $v_k : \Omega \rightarrow R$, $k = 1, 2, 3$ – регулярні функції. Простір векторних функцій v позначимо через V .

Припустимо, що пластина складається з шарів Ω^c , $c = 1, 2, \dots, c_0 \geq 1$ таких, що $\Omega^c = \Pi \times (y_{c-1}, y_c)$ і $-h = y_0 < y_1 < \dots < y_{c_0} = h$ (рис. 1). Кожний шар Ω^c є періодично неоднорідним, причому у ньому можна виділити елемент періодичності $\Delta^c \times (y_{c-1}, y_c)$ такий, що $\Delta^c \subset \Pi$ є прямокутником з паралельними до осей x_1, x_2 сторонами l_1^c, l_2^c .

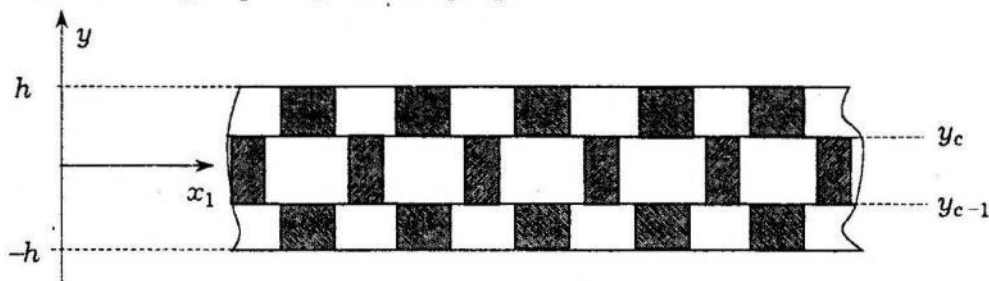


Рис. 1. Пластина, яка складається з періодично неоднорідних шарів.

Густину пластини позначимо через $\rho = \rho(x_1, x_2, y)$. Ця функція теж періодична стосовно Δ^c . Вважаємо також, що $\rho(x_1, x_2, y)|_{y \in (y_{c-1}, y_c)} = \rho(x_1, x_2)$, тобто густина не змінюється уздовж товщини шару Ω^c .

Отже,

$$\rho(x_1, x_2, y) \equiv \rho^c(x_1, x_2) = \rho^c(x_1 + l_1^c, x_2 + l_2^c) \quad (1.1)$$

для всіх $(x_1, x_2) \in \Pi$ таких, що $(x_1 + l_1^c, x_2 + l_2^c) \in \Pi$ при $y \in (y_{c-1}, y_c)$.

Запишемо рівняння термопружності для розглянутих пластин

$$(\forall v \in V) \int_{\Omega} (\sigma_{ki} \varepsilon_{ki} - b_k v_k + \rho \ddot{u}_k v_k) dv = \int_{\partial \Omega} p_k v_k da,$$

$$(\forall \Omega_0 \subset \Omega) \int_{\Omega_0} g dv + \int_{\partial \Omega_0} h_i n_i da = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho c_p \theta dv, \quad (1.2)$$

де напруження, деформації та потоки тепла мають вигляд

$$\sigma_{kl} = B_{klmn} \varepsilon_{mn} - \lambda_{kl} \theta, \quad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}), \quad h_k = K_{kl} \theta_{,l}; \quad (1.3)$$

θ – температура тіла; (b_k) – масові сили; (p_k) – поверхневі навантаження; g – тепло, яке утворюється всередині тіла; (n_i) – компоненти одиничного вектора, нормального до поверхні довільної підобласті Ω_0 ; (c_p) – теплоємність.

Величини B_{klmn} характеризують пружні властивості пластини, λ_{kl} – механічні і термічні властивості пластини, K_{kl} – її теплопровідність. Вони є тензорами відповідно четвертого і другого порядку. Скалярні функції B_{klmn} , λ_{kl} , $K_{kl} : \Omega \rightarrow R$, $k, l, m, n = 1, 2, 3$ є періодичними функціями стосовно Δ^c (аналогічно до (1.1)). Також припустимо, що в Ω^c вони не залежать від y . З залежностей (1.2) та (1.3) видно, що переміщення та температура у пластині перебувають незалежно. Тому для початку подамо спрощену модель опису переміщень, вважаючи, що поле температури $\theta(x_1, x_2, y, t)$ є відомим.

2. Двовимірна модель для переміщень. У кожному шарі Ω^c переміщення $v_k = v_k(x_1, x_2, y, t)$ в інтервалі $y \in (y_{c-1}, y_c)$ апроксимуватимемо так:

$$v_k(x_1, x_2, y, t)|_{y \in (y_{c-1}, y_c)} = v_k^{c-1}(x_1, x_2, t) \xi^{c-1}(y) + v_k^c(x_1, x_2, t) \xi^c(y), \quad c = 1, \dots, c_0,$$

де $v_k^a(x_1, x_2, t) \equiv v_k(x_1, x_2, y_a, t)$, $a = 0, 1, \dots, c_0$ – шукані переміщення поверхонь поділу шарів. Простір функцій $(v_k^0, v_k^1, \dots, v_k^{c_0})$ позначимо через T . Функції $\xi^a(y)$ відомі. Припустимо, що вони неперервні та отримані обтинанням функції $\Xi_a(y)$ на інтервалі $(-h, h)$. Функції $\Xi_a(y)$ визначені для $y \in R$ так, що $\Xi_a(y) = 0$ для $y \leq y_{a-1}$ або $y \geq y_{a+1}$, $\Xi_a(y_a) = 1$, $a = 0, 1, \dots, c_0$ та $y_{-1} = -h - 1$, $y_{c_0+1} = h + 1$ (рис. 2).

Звідси випливає, що переміщення у пластині можна подати у вигляді

$$v_k(x_1, x_2, y, t) = v_k^a(x_1, x_2, t) \xi^a(y). \quad (2.1)$$

Такий поділ пластини можна вважати її дискретизацією на елементи, якими є шари Ω^c . Тоді функції ξ^a відіграють роль функцій форми.

Підставляючи (2.1) у (1.3)₁₋₂, а потім у (1.2)₁ та інтегруючи послідовно по інтервалах (y_{c-1}, y_c) $c = 1, 2, \dots, c_0$, одержуємо співвідношення щодо невідомих переміщень поверхонь поділу шарів. Оскільки вони залежать тільки від змінних в області Π , то запропонований опис є двовимірний.

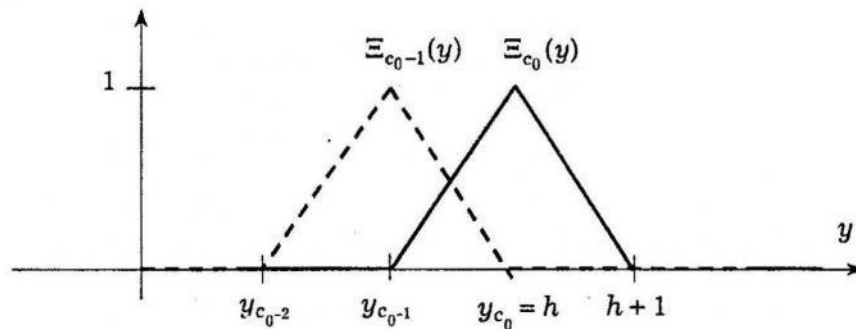


Рис. 2. Функції форми для переміщень.

3. Усереднена модель для переміщень. Згідно з нашими припущеннями, кожний з шарів пластини періодично неоднорідний. Елементом періодичності є прямокутник Δ^c з розмірами l_1^c , l_2^c . Надалі розглядатимемо пластини, для яких елемент Δ^c можна поділити на прямокутники, які вже є однорідними. Нехай ці елементи мають сторони, паралельні до осей координат. Позначимо їхні довжини через l_{1i}^c , l_{2j}^c , $i = 1, 2, \dots, n_0$, $j = 1, 2, \dots, m_0$,

причому $l_1^c = \sum_{i=1}^{n_0} l_{1i}^c$, $l_2^c = \sum_{j=1}^{m_0} l_{2j}^c$. Прямокутник зі сторонами l_{1i}^c , l_{2j}^c позначимо через Δ^{cij} . Згідно з нашими припущеннями кожна складова Δ_{ij}^c вже однорідна, тобто для $(x_1, x_2) \in \Delta_{ij}^c$ функції B_{klmn}^c є сталими:

$$B_{klmn}^c(x_1, x_2) \in B_{klmn}^c.$$

Подібні припущення приймемо також стосовно функцій λ_{kl} і K_{mn}

$$\lambda_{kl}^c(x_1, x_2) = \lambda_{kl}^{cij}, \quad K_{mn}^c(x_1, x_2) = K_{mn}^{cij}$$

для всіх $(x_1, x_2) \in \Delta_{ij}^c$.

Вирази (1.2) тепер можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} (\forall v \in V) \quad \int_{\Pi} \sum_{c=1}^{c_0} \int_{y_{c-1}}^{y_c} (B_{klmn}^c u_{m,n} v_{k,l} - \lambda_{kl}^c \theta v_{k,l} - b_k v_k + \rho^c \ddot{u}_k v_k) dv = \\ = \int_{\Pi} (p_k^+ + p_k^-) v_k da, \end{aligned} \quad (3.1)$$

де (p_k^+) , (p_k^-) – навантаження відповідно на верхній і нижній поверхнях пластини.

Метод усереднення, який пропонується застосувати, не можна використати для довільного періодичного композиту. Він потребує, щоб комірок періодичності у композиті було досить багато та, щоб їхні розміри були набагато меншими від розмірів усієї пластини. У цій праці скористаємось теорією мікролокальної гомогенізації з використанням апарату нестандартного аналізу [1].

Нехай $\bar{\rho}^c, \bar{B}_{klmn}^c, \bar{\lambda}_{kl}^c$ – функції композиту, у якому розглядуваний елемент був зменшений у n разів (розміри елемента тепер є $l_1^c/n, l_2^c/n$), а товщина залишається без змін. Якщо такий композит далі займає конфігурацію Ω і діють ті самі масові сили b та навантаження p , то задача для такого композиту відрізняється від (3.1) тільки тим, що замість $\rho^c, B_{klmn}^c, \lambda_{kl}^c$ потрібно підставити до (3.1) функції $\bar{\rho}^c, \bar{B}_{klmn}^c, \bar{\lambda}_{kl}^c$. Розв'язок цієї нової задачі, який позначимо через $\bar{u}_k$, переважно відрізняється від розв'язку u_k задачі (3.1). Вимагатимемо, щоб ці розв'язки відрізнялися між собою порівняно мало, тобто різниця

$$\bar{u}_k(x_1, x_2, y, t) - u_k(x_1, x_2, y, t) \equiv \bar{u}_k(x_1, x_2, y, t)$$

була порівняно малою стосовно u_k для кожного $(x_1, x_2, y) \in \Omega$. Якщо це виконується для кожного n , то, розглядаючи характерний елемент безмежно малих розмірів $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, матимемо, що функції $\bar{u}_k$ набувають безмежно малих значень ${}^\varepsilon u_k$, а u_k стають функціями *u_k , визначеними в ${}^*\Omega$ зі значеннями в *R , де ${}^*\Pi \subset {}^*R^2$; *R є множиною всіх чисел вигляду ${}^*x = x + \varepsilon$, $x \in R$; ε – довільне нескінченно мале число [1]. Отже,

$$\bar{u}_k(x_1, x_2, y, t) = {}^*u_k(x_1, x_2, y, t) + {}^\varepsilon u_k(x_1, x_2, y, t). \quad (3.2)$$

На нескінченно малі члени ${}^\varepsilon u_k$ накладаємо тепер в'язі. Приймемо, що

$${}^\varepsilon u_k(x_1, x_2, y, t) = \xi^a(y) h_s^a(x_1, x_2) q_k^{as}(x_1, x_2, t), \quad (3.3)$$

де підсумовування за s відбувається від 1 до s_0 ; q_k^{as} є стандартними функціями, визначеними в ${}^*\Pi$ зі значеннями у ${}^*R^2$. Називатимемо їх мікролокальними параметрами [2]. Функції h_s^a – відомі. Простір (q_k^{as}) позначимо через Q .

Віртуальні переміщення $\bar{v}_k^a$ набудуть аналогічного до (3.2) і (3.3) вигляду. Мікролокальні параметри для них позначимо через r_k^{as} .

Використовуючи метод нестандартного аналізу, варіаційний принцип для згомогенізованої періодично неоднорідної пластини набуде вигляду

$$\begin{aligned} & \left(\forall (v^0, v^1, \dots, v^{s_0}) \in T \right) \left(\forall (r^0, r^1, \dots, r^{s_0}) \in Q \right) \int_{\Pi} \left[B_{\kappa\alpha m \beta}^{cij} \mu^{cab} \left(\eta_{ij}^c u_m^a{}_{,\beta} + \eta_{ijs}^{cab} q_m^{as} \right) + \right. \\ & + B_{\kappa\alpha m 3}^{cij} \mu_3^{cab} \eta_{ij}^c u_m^a - \lambda_{\kappa\alpha}^{cij} \theta_{ij}^{cb} \left. \right] v_k^b{}_{,\alpha} + \left[B_{k3 m \beta}^{cij} \mu_3^{cba} \left(\eta_{ij}^c u_k^a{}_{,\beta} + \eta_{ijs}^{cab} q_m^{as} \right) + \right. \\ & + B_{k3 m 3}^{cij} \mu_{33}^{cab} \eta_{ij}^c u_m^a - \lambda_{k3}^{cij} \theta_{ij}^{cb3} - b_k^{cb} + \rho^{cij} \mu^{cab} \eta_{ij}^c \dot{u}_k^a \left. \right] v_k^b + \\ & + \left[B_{\kappa\alpha m \beta}^{cij} \mu^{cab} \left(\eta_{ij}^c u_m^a{}_{,\beta} + \eta_{ijs}^{cab\beta} q_m^{as} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ B_{\kappa\alpha m 3}^{cij} \mu_3^{cab} \eta_{ijt}^{caa} u_m^a - \lambda_{\kappa\alpha}^{cij} \theta_{ijt}^{cba} \} r_k^{bt} \} dv = \int_{\Pi} (p_k^+ v_k^0 + p_k^- v_k^{c_0}) da \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \mu^{cab} &= \int_{y_{c-1}}^{y_c} \xi^a \xi^b dy, & \mu_3^{cab} &= \int_{y_{c-1}}^{y_c} \xi^a_{,3} \xi^b dy, \\ \mu_{33}^{cab} &= \int_{y_{c-1}}^{y_c} \xi^a_{,3} \xi^b_{,3} dy, & b^{cab} &= \int_{y_{c-1}}^{y_c} \xi^a b dy, \end{aligned}$$

а також

$$\eta_{ij}^c = \frac{l_1^c l_2^c}{l_1^c l_2^c}, \quad \eta_{ijs}^{cab} = \frac{1}{l_1^c l_2^c} \int_{\Delta_{ij}^c} h_{s,\beta}^a da, \quad \eta_{ijst}^{cab\alpha\beta} = \frac{1}{l_1^c l_2^c} \int_{\Delta_{ij}^c} h_{s,\alpha}^a h_{t,\beta}^b da. \quad (3.5)$$

Функції θ_{ij}^{cb} , $\theta_{ijt}^{cb^3}$, $\theta_{ijt}^{cb\alpha}$ є визначені згідно з залежностями

$$\begin{aligned} \theta_{ij}^{cb} &= \frac{1}{l_1^c l_2^c} \int_{\Delta_{ij}^c} \int_{y_{c-1}}^{y_c} \xi^b \theta dy da, & \theta_{ijt}^{cb^3} &= \frac{1}{l_1^c l_2^c} \int_{\Delta_{ij}^c} \int_{y_{c-1}}^{y_c} \xi^b_{,3} \theta dy da, \\ \theta_{ijt}^{cb\alpha} &= \frac{1}{l_1^c l_2^c} \int_{\Delta_{ij}^c} h_{t,\alpha}^b \int_{y_{c-1}}^{y_c} \xi^b \theta dy da. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Співвідношення (3.4) разом з виразами (3.5), (3.6) описують поведінку пластини під впливом навантаження і температури.

4. Усереднена модель для температури. Нехай Ω^c – довільний шар у пластині. Вплив неоднорідності шару на температуру $\theta(x_1, x_2, y, t)$, $(x_1, x_2, y) \in \Omega^c$ розглядатимемо, припускаючи, що її можна подати у аналогічному до (3.2) вигляді

$$\theta(x_1, x_2, y, t) = \vartheta^c(x_1, x_2, y, t) + {}^e\vartheta_c(x_1, x_2, y, t),$$

де ${}^e\vartheta_c(x_1, x_2, y, t) = l_s^c(x_1, x_2) \gamma_s^c(x_1, x_2, y, t)$.

Функція $l_s^c(x_1, x_2)$ відіграє тут роль, аналогічну до $h_s^c(x_1, x_2)$ і є функцією форми; γ_s^c – невідомі функції, які є мікролокальними параметрами для температури.

Згідно з [2], усереднені рівняння на температуру набудуть вигляду

$$\begin{aligned} K_{mn}^{cij} (\eta_{ij}^c \vartheta_{,nm}^c + \eta_{ijs}^{cn} \gamma_{,m}^{cs}) + g^c - s^{cij} \eta_{ij}^c \dot{\vartheta}^c &= 0, \\ K_{mn}^{cij} (\eta_{ijs}^{cn} \vartheta_{,m}^c + \eta_{ijst}^{cnm} \gamma^{ct}) &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

де η_{ij}^c є визначеними так само, як і (3.5)₁, а для інших коефіцієнтів правильні залежності

$$\eta_{ijs}^{cn} = \frac{1}{l_1^c l_2^c} \int_{\Delta_{ij}^c} l_{s,n}^c da, \quad \eta_{ijst}^{cnm} = \frac{1}{l_1^c l_2^c} \int_{\Delta_{ij}^c} l_{s,n}^c l_{t,m}^c da,$$

$$s^{cij} = \rho^c c_p^c \Big|_{(x_1, x_2, y) \in \Delta_{ij}^c} \quad (4.2)$$

$$\text{а також } g^c = \frac{1}{l_1^c l_2^c h^c} \int_{\Delta^c \times (y_{c-1}, y_c)} h_s^a, h_t^b da.$$

Для точок $(x_1, x_2, y) \in \partial\Omega^c - \partial\Omega \cap \partial\Omega^c$ приймаємо умови вільного притоку тепла.

Зазначимо, що всі величини, які входять у (4.2), аналогічні до величин (3.5) і є числами.

5. Висновки. Вирази (3.4) описують пластину, яка складається з періодично неоднорідних шарів. Введення в'язей (2.1) дало змогу замінити віднесені до тривимірної області переміщення функціями, визначеними на двовимірній області. В'язі (3.3) і аналогічні в'язі для температури, спричиняють те, що у співвідношення (3.4) і (4.1) вже не входять сильно осцилюючі матеріальні функції, а тільки постійні. Невідомими функціями у цій моделі є переміщення поверхонь поділу шарів у пластині, температура і мікролокальні параметри, які описують вплив неоднорідності матеріалу.

Серед введених припущень відзначимо два: одержана модель може бути використана тільки для пластин, у яких є багато комірок періодичності, а кількість шарів може бути довільною, проте не дуже великою.

1. Robinson A. Non Standard Analysis. – North Holland, Amsterdam. – 1966.
2. Woźniak Cz. A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composites // Int. J. Eng. Sci. – 1987. – 5. – P. 483–499.
3. Nagórko W. Two methods of modelling of periodic nonhomogeneous elastic plates // J. of Theoret. App. Mech. – 1998. – 36. – P. 291–303.

Wyeslav Nagurko, Yaroslav Zelins'ki

ON HEAT CONDUCTION MODELLING IN PLATES FORMED BY PERIODICALLY NONHOMOGENEOUS LAYERS

The paper deals with modelling problems of layered elastic plates. By means of the homogenization method based on the nonstandart analysis we derive homogenized model of layered elastic plate in which each layer is composed of n different homogeneous anisotropic linear-elastic elements.

Стаття надійшла до редколегії 25.08.99

Margaret Woźniak, Volodymyr Pauk

Łódź University of Technology

PLANE CONTACT PROBLEMS FOR A LAYER RESTING ON THE COMBINED FOUNDATION

1. Introduction. The plane contact problem for an elastic layer which rests on the rigid planar base was studied in [4]. Analogous problem for a layer supported by the Winkler foundation was solved in [2]. In this contribution we consider the contact of a rigid punch with an elastic isotropic layer resting on the combined foundation, which is a combination of the rigid base and the Winkler medium. Two cases of the punch geometry are considered: the parabolic cylinder (fig. 1,a) and flat strip (fig. 1,b).

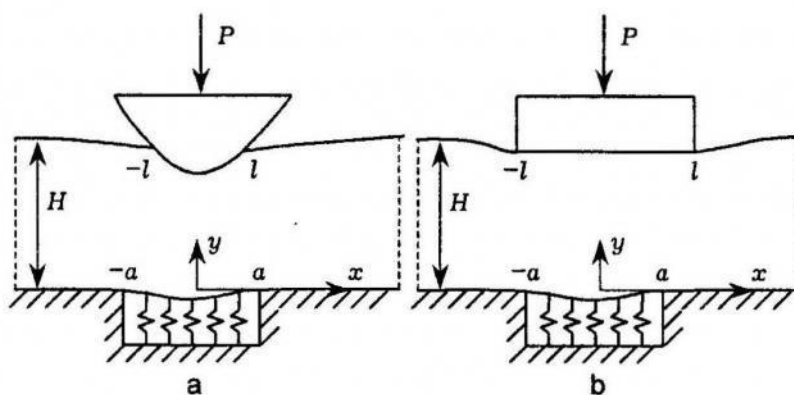


Fig. 1.

The problems involving an underground excavation have the great practical importance in geotechnics and mining engineering. Previously [5], the similar axially symmetric contact problems for a layer supported by the combined foundation was studied.

2. System of integral equations of contact problems. Mathematically, the problems formulated above are reduced to the solution of Lamé equations

$$2(1-\nu)u_{,xx} + (1-2\nu)u_{,yy} + v_{,xy} = 0, \quad (1-2\nu)v_{,xx} + 2(1-\nu)v_{,yy} + u_{,xy} = 0 \quad (1)$$

with the following boundary conditions

$$\tau_{xy}(x, H) = 0, \quad |x| < \infty, \quad (2)$$

$$\sigma_{yy}(x, H) = 0, \quad |x| > l, \quad v(x, H) = \delta - g(x), \quad |x| \leq l, \quad (3)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad |x| < \infty, \quad (4)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad |x| > a, \quad \sigma_{yy}(x, 0) = k v(x, 0), \quad |x| \leq a, \quad (5)$$

where Oxy is the system of Cartesian co-ordinates; u, v are components of the displacement vector; σ_{yy}, τ_{xy} are components of the stress tensor; ν is Poisson's ratio; k is the stiffness of Winkler material; δ is the punch rigid displacement and $g(x)$ is the function describing the punch geometry.

The solution of equations (1) obtained by the Fourier transforms [3] has the form

$$u(x, y) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty \{A(\alpha) \sinh(\alpha y) + B(\alpha)[2(1-\nu) \cosh(\alpha y) + \alpha y \sinh(\alpha y)] + \\ + C(\alpha) \cosh(\alpha y) + D(\alpha)[2(1-\nu) \sinh(\alpha y) + \alpha y \cosh(\alpha y)]\} \sin(\alpha x) d\alpha, \quad (6)$$

$$v(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty \{-A(\alpha) \cosh(\alpha y) + B(\alpha)[(1-2\nu) \sinh(\alpha y) - \alpha y \cosh(\alpha y)] - \\ - C(\alpha) \sinh(\alpha y) + D(\alpha)[(1-2\nu) \cosh(\alpha y) - \alpha y \sinh(\alpha y)]\} \cos(\alpha x) d\alpha, \quad (7)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \alpha \{A(\alpha) \sinh(\alpha y) + B(\alpha) \alpha y \sinh(\alpha y) + \\ + C(\alpha) \cosh(\alpha y) + D(\alpha) \alpha y \cosh(\alpha y)\} \cos(\alpha x) d\alpha, \quad (8)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \alpha \{A(\alpha) \cosh(\alpha y) + B(\alpha)[\sinh(\alpha y) + \alpha y \cosh(\alpha y)] - \\ - C(\alpha) \sinh(\alpha y) + D(\alpha)[\cosh(\alpha y) + \alpha y \sinh(\alpha y)]\} \sin(\alpha x) d\alpha, \quad (9)$$

where μ is the shear module of the layer and functions $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ are unknown. For the determination of these unknowns the boundary conditions (2)–(5) must be used. Note here that the boundary conditions (3), (5) are of mixed type at both upper and lower surfaces of the layer.

Applying the method of dual equations we obtain the final form of system of two integral equations of the contact problem under consideration for the contact pressure $p(x)$ and the function $h(t)$

$$h(t) - t \int_0^a h(t') R_1(t, t') dt' - \frac{t}{2(\lambda + \mu)} \int_0^l p(x') R_2(x', t) dx' = 0, \quad 0 \leq t \leq a \quad (10)$$

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{2}{\pi} \int_0^a h(t') R_2(x, t') dt' + \frac{1-\nu}{\mu} \frac{2}{\pi} \int_0^l p(x') R_4(x', x) dx' = \delta - g(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (11)$$

where λ is Lamé constant and

$$R_1(t', t) = \int_0^\infty \alpha \left[1 - F_1(\alpha) - \frac{\theta}{\alpha H} \right] J_0(\alpha t') J_0(\alpha t) d\alpha, \\ R_2(x', t) = \int_0^\infty F_2(\alpha) \cos(\alpha x') J_0(\alpha t) d\alpha, \quad R_4(x', x) = \int_0^\infty F_4(\alpha) \cos(\alpha x') \cos(\alpha x) \frac{d\alpha}{\alpha}, \\ F_1(\alpha) = \frac{\sinh^2(\alpha H) - \alpha^2 H^2}{\sinh(\alpha H) \cosh(\alpha H) + \alpha H}, \quad F_2(\alpha) = \frac{\alpha H \cosh(\alpha H) + \sinh(\alpha H)}{\sinh(\alpha H) \cosh(\alpha H) + \alpha H}, \\ F_4(\alpha) = \frac{\sinh^2(\alpha H)}{\sinh(\alpha H) \cosh(\alpha H) + \alpha H}.$$

Here $J_0(\cdot)$ is the Bessel function of the first kind and $\theta = (1-\nu)kH/\mu$.

The system (10), (11) must be completed by the equilibrium equation

$$2 \int_0^l p(x) dx = P \quad (12)$$

where P is the load.

Introducing dimensionless variables and functions

$$t = a\tau, \quad t' = a\tau', \quad x = l\xi, \quad x' = l\xi', \quad \beta = \alpha H, \quad \kappa_1 = a/H, \quad \kappa_2 = l/H,$$

$$p(x) = \frac{P}{l} p^*(\xi), \quad h(t) = \frac{1-2\nu}{2\mu} P h^*(\tau), \quad g(x) = \frac{1-\nu}{\mu} P g^*(\xi)$$

and displaying the singular part of the kernel $R_4(\cdot)$, the system (10)–(12) can be transformed to the form

$$h^*(\tau) - \kappa_2^2 \tau \int_0^1 h^*(\tau') R_1^*(\tau', \tau) d\tau' - \frac{\kappa_2 \tau}{2} \int_{-1}^1 p^*(\xi') R_2^*(\xi', \tau) d\xi' = 0, \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad (13)$$

$$\frac{2\kappa_1 \kappa_2}{\pi} \int_0^1 h^*(\tau') R_2^*(\xi, \tau') d\tau' + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p^*(\xi') \left\{ \frac{1}{\xi - \xi'} - R_{40}^*(\xi', \xi) \right\} d\xi' = -g^{*\prime}(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad (14)$$

$$\int_{-1}^1 p^*(\xi) d\xi = 1, \quad (15)$$

where the dimensionless kernels $R_1^*(\cdot)$, $R_2^*(\cdot)$, $R_{40}^*(\cdot)$ are some known functions. The singular integral equation (14) is the Cauchy-type for the function of contact pressure. Knowing the function $h^*(\tau)$, the deflection in the excavation zone can be calculated as

$$w_0(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_{\xi}^1 \frac{h^*(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} d\tau, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (16)$$

3. Contact of the parabolic punch with the layer. In this case, presented in fig. 1a, the function $g^{*\prime}(\xi)$ has the form

$$g^{*\prime}(\xi) = -\frac{2}{\pi} \frac{l}{l_H^2} \frac{P_H}{P} \xi, \quad (17)$$

where l_H, P_H are the contact size and the load in the Hertz problem. In the future analysis we will assume that the contact size l is equal to l_H , but the ratio P_H/P is unknown.

The distribution of the contact pressure in this case can be expressed as

$$p^*(\xi) = \varphi(\xi) \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (18)$$

where $\varphi(\xi)$ is a new unknown function.

Using the Gauss-Chebyshev quadrature formulae of the first kind [1], the system (13)–(15) can be transformed to the equivalent system of linear algebraic equations which was solved numerically.

The numerical analysis was performed to display the effect of stiffness of Winkler material θ on the distribution of the contact pressure $p^*(\xi)$ and the deflection in excavation zone $w_0(\xi)$ for different values of parameters κ_1, κ_2 . The obtained results showed that the stiffness of material in the excavation has small influence on the contact pressure but the deflection $w_0(\xi)$ depends strongly with the stiffness θ .

4. Contact of the flat punch with the layer. In this case, presented in fig. 1, b, the function $g^*(\xi)$ has the form $g^*(\xi) = 0$.

The distribution of the contact pressure for the index equal to 1 can be written as $p^*(\xi) = \varphi(\xi)/\sqrt{1-\xi^2}$, where $\varphi(\xi)$ is a new unknown function.

Using the Gauss-Chebyshev quadrature formulae of the second kind [1], the system (13)–(15) can be transformed to the equivalent system of linear algebraic equations which was solved numerically.

The obtained results showed that the stiffness θ has as before small influence on the contact pressure. Moreover, the geometry of the punch has no influence on the distribution of the deflection $w_0(\xi)$.

5. Conclusions. The elastic layer supported by the combined foundation can be considered as a model of soil structure with the excavation. It is known that old non-used mines are filled by the sand which is modeled here as the Winkler medium. These problems are very important in underground building and mining engineering.

1. Belotserkovskij S. M., Lifanov I. K. Numerical methods in the singular integral equations. – Moscow: Nauka, 1985.
2. Dempsey J. P., Zhao Z. G., Minnetyan L., Li H. Plane contact of an elastic layer supported by a Winkler foundation // J. Appl. Mech. – 1990. – 57. – P. 974–980.
3. Sneddon I. N. Fourier transforms. – New York: McGraw-Hill, 1951.
4. Vorovich I. I., Aleksandrov V. M., Babeshko V. A. Non-classical mixed problems of the elasticity. – Moscow: Nauka, 1976.
5. Woźniak M., Hummel A., Pauk V. Axisymmetric contact problems for an elastic layer resting on a rigid base with a Winkler type excavation // Int. J. Solids Struct. – 1999. (in press).

Маргарита Возняк, Володимир Паук

ПЛОСКІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ШАРУ НА КОМБІНОВАНІЙ ОСНОВІ

Розглянуто плоскі контактні задачі для смуги, яка лежить на жорсткому півпросторі з приповерхневою заглибиною, що заповнена матеріалом Вінклера. З використанням перетворення Фур'є задачі зведені до систем інтегральних рівнянь, які розв'язані чисельно. Досліджено характер контактного тиску і прогинів над заглибиною.

Стаття надійшла до редколегії 22.07.99

Stanisław Matysiak, Alexander Yevtushenko, Volodymyr Zelenjak

Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, University of Warsaw

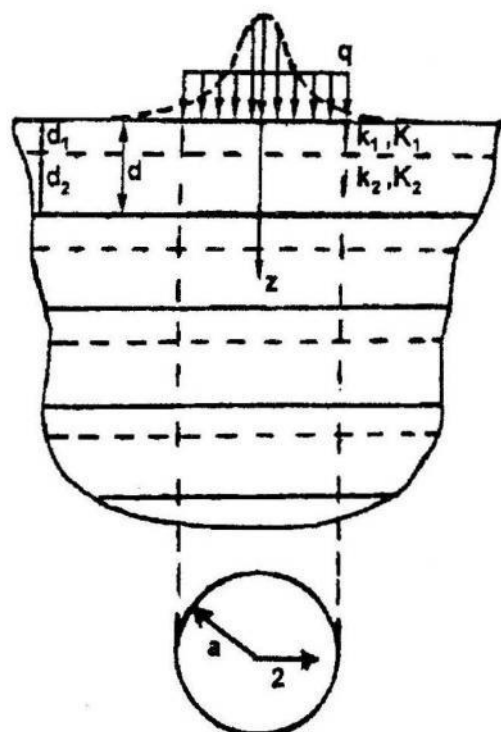
Ivan Franko National University of L'viv

Technical University of L'viv

ON NONSTATIONARY THERMOELASTIC PROBLEMS OF PERIODIC LAYERED COMPOSITES

1. Introduction. The problems of temperature and stress distributions in thermoelastic bodies caused by local thermal sources are very important in engineering practice. The non-stationary temperature fields in the homogeneous half-space due to the action of laser beam on the boundary were considered in papers [3–6]. The distributions of temperature and stresses in the homogeneous thermoelastic semi-infinite body caused by a laser ray were investigated in [7–8]. The influence of micro periodically layered structure of composite half-space under the uniform and normal (Gaussian) distributions of heat flux on the boundary on the temperature fields is presented in [9].

This paper is a continuation of the studies [9] concerning the problem of laser heating of thermoelastic microperiodically stratified half-space.



The middle-cross of the microperiodic two-layered half-space.

2. Formulation of the problem.

Consider a microperiodic laminated elastic half-space in which each lamina is composed of two homogeneous isotropic layers. The middlecross section of the body is shown in Figure. Let d_1 , d_2 be thicknesses of these layers and $d = d_1 + d_2$ be thickness of the repeated lamina. The composite components are characterized by Lamé constants λ_i , μ_i , coefficients of thermal conductivity K_i , coefficients of thermal diffusivity k_i , $i = 1, 2$. The perfect mechanical bonding and ideal thermal contact between the layers are assumed. The problem is related to the cylindrical coordinate system (r, φ, z) such that the z -axis is normal to the layering, see Figure.

The boundary plane of composite half-space is heated by the laser rays described as an uniform and Gaussian distributions of heat flux and the plane is assumed to be free of loadings. The

problem is solved within the framework of the homogenized model with microlocal parameters [1-2]. The temperature field $T(\cdot)$ and displacement vector $\mathbf{u}(\cdot)$ are assumed in the form

$$T(r, z, t) = Q(r, z, t) + h(z) \varepsilon(r, z, t),$$

$$\mathbf{u}(r, z, t) \cong [u_r, 0, u_z] (r, z, t) = [w_r, 0, w_z] (r, z, t) + h(z) [W_r, 0, W_z], \quad (1)$$

where $h: R \rightarrow R$ is the known continuous d -periodic function, next defined

$$h(z) = \begin{cases} z - 0.5d_1, & \text{for } 0 \leq z \leq d_1, \\ -\frac{\eta z}{1-\eta} - 0.5d_1 + \frac{d_1}{1-\eta}, & \text{for } d_1 \leq z \leq d, \end{cases} \quad (2)$$

$$h(z) \in O(d), \quad h'(z) \in O(1), \quad \forall z \in R.$$

where

$$\eta = d_1/d. \quad (3)$$

The unknown functions $\theta(\cdot)$, $w_r(\cdot)$, $w_z(\cdot)$, are interpreted as the macro-temperature and macrodisplacements, respectively. The unknown functions $\varepsilon(\cdot)$, $W_r(\cdot)$, $W_z(\cdot)$ are the microlocal thermal and kinematical parameters and they are connected with the microstructure of the body.

The problems of heated periodic stratified half-space are determined by the following initial and boundary conditions :

a) *thermal*

$$\theta(\rho, Z, \tilde{F}_0 = 0), \quad \text{for } \rho, Z \geq 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = -\Lambda G_i(\rho), \quad i = 1 \text{ or } 2, \quad \text{for } \rho > 0, Z = 0, \tilde{F}_0 > 0,$$

$$\theta(\infty, Z, \tilde{F}_0) = \theta(\rho, \infty, \tilde{F}_0) = 0, \quad \text{for } \tilde{F}_0 > 0, \quad (4)$$

where

$$\Lambda = \frac{q_0 a}{K}, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad Z = \frac{z}{a}, \quad \tilde{F}_0 = \frac{k_0 t}{a^2},$$

$$K_0 = \frac{K}{\tilde{K}}, \quad K = \tilde{K} - \frac{[K]^2}{K}, \quad k_0 = \frac{\tilde{\rho} \tilde{c}}{\tilde{K}},$$

$$\tilde{K} = \eta K_1 + (1-\eta) K_2, \quad \tilde{\rho} \tilde{c} = \eta \rho_1 c_1 + (1-\eta) \rho_2 c_2,$$

$$[K] = \eta(K_1 - K_2), \quad K = \eta K_1 + \frac{\eta^2}{1-\eta} K_2,$$

$$G_1(\rho) = H(1-\rho), \quad \rho \geq 0, \quad G_2(\rho) = \exp(-\rho), \quad \rho \geq 0, \quad (5)$$

(b) *mechanical*

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}(\rho, Z=0, \tilde{F}_0) &= 0, \quad \rho \geq 0, \quad \tilde{F}_0 > 0, \quad \sigma_{zr}(\rho, Z=0, \tilde{F}_0) = 0, \quad \rho \geq 0, \quad \tilde{F}_0 > 0, \\
w_z(\rho, Z, \tilde{F}_0=0) &= w_r(\rho, Z, \tilde{F}_0=0) = 0, \quad \rho \geq 0, \quad Z \geq 0, \\
w_z(\infty, Z, \tilde{F}_0) &= w_r(\infty, Z, \tilde{F}_0) = w_z(\rho, \infty, \tilde{F}_0) = w_r(\rho, \infty, \tilde{F}_0) = 0, \quad \text{for } \tilde{F}_0 > 0. \quad (6)
\end{aligned}$$

The governing equations described the homogenized model are presented in [1].

3. Solution of the problem (a) temperature field

(a) temperature field

The temperature $\theta(\cdot)$ can be written in the form [9]

$$\theta(\rho, Z, \tilde{F}_0) = \Lambda \int_0^\infty \xi \varphi_i(\xi) \Phi(\xi, Z_0, \tilde{F}_0) J_0(\xi \rho) d\xi, \quad i = 1, 2, \quad \rho \geq 0, \quad Z \geq 0, \quad \tilde{F}_0 \geq 0, \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned}
\Phi(\xi, Z, \tilde{F}_0) &= \frac{1}{2\xi K_0} \left[\exp(-\xi Z_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{Z_0}{2\sqrt{\tilde{F}_0}} - \xi\sqrt{\tilde{F}_0}\right) - \exp(Z_0\xi) \operatorname{erfc}\left(\frac{Z_0}{2\sqrt{\tilde{F}_0}} + \xi\sqrt{\tilde{F}_0}\right) \right], \\
Z_0 &= \sqrt{K_0} Z,
\end{aligned}$$

where $\operatorname{erfc}(\cdot)$ is the complementary error function, $J_0(\cdot)$, $J_1(\cdot)$ are the Bessel functions and

$$\rho_1(\xi) = \frac{1}{\xi} J_1(\xi), \quad \rho_2(\xi) = \frac{1}{2} \exp(-\xi^2/4). \quad (8)$$

The numerical analysis of the obtained temperature $\theta(\cdot)$ was presented in paper [9]. The following conclusions can be formulated:

- 1° the temperature on the boundary of composite half-space due to the uniform distribution is higher then due to the Gaussian distribution for the fixed radius of the heating circle
- 2° the temperature fields are characterized by considerable gradients in the radial and axial directions.
- 3° the increase of ratio of thermal conductivity $K^* = K_1/K_2$ makes the increase of the temperature. The increase of the ratio of temperature diffusivity $k^* = k_1/k_2$ leads to the reduction of the temperature.
- 4° assuming that the heated half-space is homogeneous then the temperature given by (7) is reduced to the function of temperature for homogeneous half-space presented in [4].

(b) mechanical field

The displacements and stresses in the microperiodic two-layered half-space can be obtained by using three potentials derived for the homogenized model in [10] and Hankel and Fourier integral transforms (with a general trigonometric kernel). The thermoelastic state of stresses can initiate the brittle

fracture of material. The knowledge of stresses allows for the optimization of thermal fracturing processes of the layered composite.

1. Woźniak Cz. A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composites // *Int. J. Engng. Sci.* – 1987. – 25. – P. 489–498.
2. Matysiak S. J., Woźniak Cz. On the microlocal modelling of thermoelastic composites // *J. Techn. Phys.* – 1988. – 29. – P. 85–97.
3. Hector L. G., Hetnarski R. B. Thermal stresses in materials due to laser heating, *Thermal Stresses*, IV, R.B. Hetnarski-editor Elsevier Sci. – 1996. – P. 453–531.
4. Rykalin N. N., Uglov A. A., Zuiev I. V., Kokora A.H. Laser processing of materials, (in Russian), Machine Construction, Moscow. – 1975.
5. Rykalin N. N., Uglov A. A., Zuiev I.V., Kokora A.H., Laser and electronic beam processing of materials, (in Russian), Machine Construction, Moscow. – 1985.
6. Duley W. W. CO₂ laser: Effects and applications. – New York: Acad. Press, 1976.
7. Lauriello P. J., Chen Y. Thermal fracturing of hard rock // *Trans. ASME, J. of Appl. Mech.* – 1973. – No. 4. – P. 909–914.
8. Yevtushenko A. A., Matysiak S. J., Ivanyk E. G. On the modelling of laser thermal fracturing of hard rock // *Engn. Transactions.* – 1997. – 45. – P. 447–461.
9. Matysiak S. J., Yevtushenko A. A., Ivanyk E. G. Temperature field in a microperiodic two-layered composite caused by a circular laser heat source // *Heat and Mass Transfer.* – 1998. – 34. – P. 127–133.
10. Kaczyński A. Three-dimensional thermoelastic problems of interface cracks in periodic two-layered composites // *Engng. Fracture Mech.* – 1994. – 48, No. 6. – P. 783–800.

Станіслав Матисяк, Олександр Євтушенко, Володимир Зеленьк

ПРО НЕСТАЦІОНАРНІ ТЕРМОПРУЖНІ ЗАДАЧІ ПЕРІОДИЧНО ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТИВ

Розглянуто розподіл температури та напружень у періодично шаруватій півплощині, яка піддана дії лазерного нагрівання. Задача розв'язана з використанням гомогенізованої моделі з мікролокальними параметрами [1, 2]. Розв'язок одержано у вигляді інтегралів Ганкеля, деякі числові результати подано у вигляді графіків.

Стаття надійшла до редколегії 07.09.99

УДК 539.3

Єжи Ґолась

Академія Технічно-Рільнича ім. Я. і А. Снядецьких, Бидгощ

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ТОВСТИХ БАГАТОШАРОВИХ КОМПОЗИТНИХ ОПОРНИХ БАЛОК З ВИКОРИСТАННЯМ СХЕМИ ГІБРИДНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У НАПРУЖЕННЯХ

1. Вступ. Багатошарові композитні опорні балки з огляду на різницю механічних властивостей окремих шарів відзначаються великою поперечною деформівністю (обтисненням) поперечного перерізу. Тому під час аналізу утримувальної здатності таких балок обов'язковим стає врахування поперечного зсуву, а часто також і впливу видовження-стиску їхніх нормальних елементів [1–3]. Особливо це необхідно у випадку товстих плит з відношенням товщини до поздовжнього розміру $h/L > 0.25$. Однак це може також стосуватися тонших балок з великим відношенням ($E_x^i/E_x^{i+1} > 100$) модулів пружності шарів [8, 9]. Правильно визначити напруження та деформації, які виникають у таких опорних балках, можливого лише з використанням таких програм числових обчислень, що враховують згадані ефекти.

Нижче викладений алгоритм, на основі якого розроблено програму числового аналізу статичної задачі циліндричного згину багатошарових ламінатів та наведено приклади обчислень. Для побудови алгебричних рівнянь використано гібридну схему методу скінченних елементів у напруженнях, засновану на змодифікованому варіаційному функціоналі Райсснера [1–5].

2. Формулювання задачі. Досліджується циліндричний згин (у площині x, z) грубої багатошарової композитної опорної балки, що складається з N

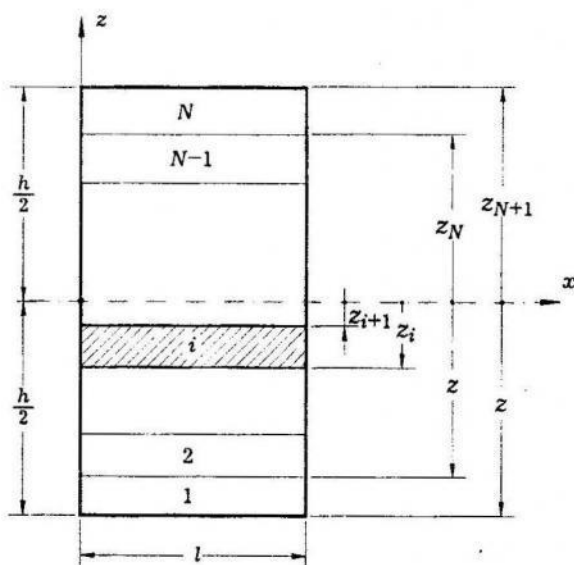


Рис. 1.

шарів різної жорсткості. Жорсткість окремих шарів у напрямі їхньої товщини стала, однак може змінюватися уздовж довжини опорної балки – у напрямі осі x . Матеріал кожного шару ортотропний та лінійно пружний. Статичне зовнішнє навантаження опорної балки прикладене до зовнішніх поверхонь $z = \pm h/2$. На внутрішніх точках діють масові сили. На краях опорної балки задані також відповідні геометричні умови.

Перпендикулярними до поздовжньої осі x перерізами поділяємо опорну балку на довільну кількість n_e шарових елементів. Характерний шаровий скінченний елемент зображено на рис. 1.

На торцьових краях $x = 0, l$ елементів справджуються крайові умови на переміщення $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$. Змодифікований варіаційний функціонал Райсснера набуває у цьому випадку вигляду [2, 3]

$$\Pi_{mR}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{n_e} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[-\frac{1}{2} \int_{V_{ni}} \boldsymbol{\sigma}^{iT} \mathbf{S}^i \boldsymbol{\sigma}^i dV + \int_{V_{ni}} \boldsymbol{\sigma}^{iT} \mathbf{e}^i(\mathbf{u}^i) dV - \int_{V_{ni}} \hat{\mathbf{f}}_i^T \mathbf{u}^i dV - \int_{S_{\sigma ni}} \hat{\mathbf{t}}^T \mathbf{u}^i dS \right] \right\}, \quad (1)$$

де $\boldsymbol{\sigma}^i, \mathbf{e}^i, \mathbf{u}^i, \mathbf{S}^i$ – відповідно вектори напружень, деформацій переміщень і матриця коефіцієнтів податності ортотропного матеріалу i -го шару; V_{ni} – об'єм i -го шару в n -му елементі; $S_{\sigma ni}$ – поверхня, на якій задано зовнішнє навантаження; $\hat{\mathbf{t}}; \hat{\mathbf{f}}_i$ – вектор масових сил.

Поле напружень $\boldsymbol{\sigma}^{iT} = \{\sigma_x^i, \sigma_z^i, \sigma_{xz}^i\}$, поле переміщень $\mathbf{u}^{iT} = \{u_i, w_i\}$ і поле деформацій $\mathbf{e}^{iT} = \{\varepsilon_x^i, \varepsilon_z^i, \gamma_{xz}^i\}$ апроксимують функції

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{P}^i \begin{Bmatrix} \bar{\beta}^i \\ \beta^i \\ \bar{\beta}^{i+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{P}^i \beta_i, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{N}^i \mathbf{d}^i, \quad (3)$$

$$\mathbf{e}^i = \mathbf{B}^i \mathbf{d}^i, \quad (4)$$

у яких $\mathbf{P}^i, \mathbf{N}^i, \mathbf{B}^i$ – матриці апроксимаційних функцій; $\mathbf{d}^i$ – вектор вузлових переміщень; β_i – вектори, що містять як приписані обсягу (внутрішності) даного шару вузлові параметри напружень β^i , так і аналогічні параметри $\bar{\beta}^i$ і $\bar{\beta}^{i+1}$, пов'язані відповідно з її нижньою і верхньою поверхнями. Умови неперервності напружень на поверхнях контакту шару i з шаром $i+1$, а саме

$$\sigma_z^i(z = z_{i+1}) = \sigma_z^{i+1}(z = z_{i+1}), \quad \sigma_{xz}^i(z = z_{i+1}) = \sigma_{xz}^{i+1}(z = z_{i+1}), \quad (5)$$

вимагають рівності відповідних параметрів $\bar{\beta}^i$ і $\bar{\beta}^{i+1}$ контактуючих шарів. Якщо на зовнішніх поверхнях крайніх шарів 1 і N задані статичні умови вигляду

$$\sigma_{xz}^1(z = z_1) = 0, \quad \sigma_z^1(z = z_1) = 0, \quad \sigma_{xz}^N(z = z_{N+1}) = 0, \quad (6)$$

то тоді

$$\bar{\beta}^1 = 0, \quad \bar{\beta}_{\sigma_{xz}}^{N+1} = 0, \quad (7)$$

де нижній індекс σ_{xz} означає вибір тільки тих параметрів $\bar{\beta}^{N+1}$, які пов'язані зі складовими дотичних напружень.

Підставляючи залежності (2), (3) і (4) у функціонал (1), після підсумовування за всіма шарами $i = 1, 2, \dots, N$, одержуємо:

$$\Pi_{mc}(\mathbf{d}_e, \beta) = \sum_{n_e} \Pi_{mc}^e = \sum_{n_e} \left(-\frac{1}{2} \beta^T \mathbf{H} \beta + \beta^T \mathbf{Q} \mathbf{d}_e - \mathbf{d}_e^T \mathbf{F}_e \right), \quad (8)$$

де матриці $\mathbf{H}$, $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{F}_e$, що відповідають шаровому елементу, складаються з таких підматриць:

$$\mathbf{H}^i = \int_{V_{ni}} \mathbf{P}^{iT} \mathbf{S}^i \mathbf{P}^i dV, \quad \mathbf{Q}^i = \int_{V_{ni}} \mathbf{P}^{iT} \mathbf{B}^i dV, \quad \mathbf{F}^i = \int_{V_{ni}} \mathbf{N}^{iT} \hat{\mathbf{f}}^i dV + \int_{S_{oni}} \mathbf{N}^{iT} \hat{\mathbf{t}}^i dS, \quad (9)$$

складовими векторів β і $\mathbf{d}_e$ є відповідні параметри з окремих шарів елемента. Вузли для опису переміщень обирають лише на поверхнях контакту елементів $x = \text{const}$.

За умов стаціонарності функціоналу (8) щодо взаємно незалежних параметрів β і $\mathbf{d}_e$ одержуємо

$$\beta = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{d}_e, \quad (10)$$

а також

$$\sum_{n_e} (\mathbf{k} \mathbf{d}_e - \mathbf{F}_e) = \mathbf{0} \quad \text{або} \quad \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F}, \quad (11)$$

де символом

$$\mathbf{k} = \mathbf{Q}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Q} \quad (12)$$

позначено матрицю жорсткості шарового елемента.

З алгебричних рівнянь рівноваги (11), що стосуються цілої системи, визначають переміщення. Далі за допомогою залежностей (10) і (2) – напруження в окремих шарах системи.

Розроблено дві версії комп'ютерної програми для скінченного елемента з N шарами. Перша – з кількістю параметрів апроксимації напружень $n_p = 14N - 5$ та кількістю параметрів апроксимації переміщень $n_u = 8N + 4$; друга – відповідно з кількістю параметрів $14N - 5$ та $4N + 4$.

В обох випадках двовимірне поле напружень у кожному шарі шарового елемента апроксимували залежністю

$$\sigma^i(x, z) = \underset{(3 \times 1)}{\mathbf{P}^i(x, z)} \underset{(19 \times 1)}{\beta_i}, \quad (13)$$

у якій матриця поліноміальних функцій $\mathbf{P}^i(x, z)$ містить відповідно для окремих складових: для σ_x^i – апроксимації третього степеня в обох напрямках осей координат x та z ; для σ_z^i – лінійні апроксимації у напрямі x та п'ятого степеня у напрямі осі z ; для σ_{xz}^i – квадратичну апроксимацію у напрямі осі x і четвертого степеня у напрямі осі z . Наприклад, елементи $P_{1,14}^i$, $P_{2,14}^i$ і $P_{3,14}^i$ матриці $\mathbf{P}^i(x, z)$ є такі:

$$P_{1,14}^i = F_i(z) x^3, \quad P_{2,14}^i = \frac{3}{10} K_i(z) x, \quad P_{3,14}^i = \frac{3}{20} R_i(z) x^2, \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} F_i(z) &= \frac{1}{5} (z_i^3 + 4z_i^2 z_{i+1} + 4z_i z_{i+1}^2 + z_{i+1}^3) - \frac{3}{10} (3z_i^2 + 4z_i z_{i+1} + 3z_{i+1}^2) z + z^3, \\ K_i(z) &= 2(z_i^3 z_{i+1}^2 + z_i^2 z_{i+1}^3) - z(4z_i^3 z_{i+1} + 7z_i^2 z_{i+1}^2 + 4z_i z_{i+1}^3) + \\ &\quad + 2z^2(z_i^3 + 4z_i^2 z_{i+1} + 4z_i z_{i+1}^2 + z_{i+1}^3) - z^3(3z_i^2 + 4z_i z_{i+1} + 3z_{i+1}^2) + z^5, \end{aligned}$$

$$R_i(z) = (4z_i^3 z_{i+1} + 7z_i^2 z_{i+1}^2 + 4z_i z_{i+1}^3) - 4z(z_i^3 + 4z_i^2 z_{i+1} + 4z_i z_{i+1}^2 + z_{i+1}^3) + 3z^2(3z_i^2 + 4z_i z_{i+1} + 3z_{i+1}^2) - 5z^4. \quad (15)$$

Разом з тим вектор параметрів β_i має вигляд $\{\bar{\beta}_1^i, \bar{\beta}_2^i, \dots, \bar{\beta}_5^i; \beta_1^i, \beta_2^i, \dots, \beta_9^i; \bar{\beta}_1^{i+1}, \bar{\beta}_2^{i+1}, \dots, \bar{\beta}_5^{i+1}\}^T$. До того ж застосований опис напружень (13) задовольняє однорідні рівняння рівноваги в області шару та статичні умови на зовнішніх поверхнях крайніх шарів.

Для опису поля переміщень $\mathbf{u}^i(x, z) = \{u^i, w^i\}^T$ у характерному шарі елемента на краях $x = 0, L$ обрано по три вузли у першій версії програми та по два вузли у другій. У кожному з вузлів допускаються по два трансляційні ступені вільності. Тому у кожній зі смуг для розглядуваних версій програми маємо відповідно по $n_p = 9$ і $n_u = 12$ та $n_p = 9$ і $n_u = 8$ незалежних параметрів напружень та ступенів вільності переміщень.

3. Числовий аналіз та висновки. Подібно до того, як це зроблено у [3], програму протестували на прикладі тришарової балки з ламінату, для якої точний аналітичний розв'язок на основі рівнянь теорії пружності містить праця [6]. У цьому випадку для ламінату з епоксидних шарів, зміцнених вугільними волокнами, за відношення $h/L = 0.25$ та поділу на 24 шарові елементи відносна похибка прогинів та складових компонент тензора напружень перебувала у межах $1.3 \div 3.7\%$. Програма зверифікована теж за допомогою поміщених у праці [7] тестів номер 3e і 3f, що стосуються плоского напруженого стану. У розглянутому прикладі однорідної опорної плити розмірами 2.0×10.5 м, опертої на краї $x = 0$ і навантаженій зосередженою силою на вільному краї $x = 10.5$ м, одержані результати обчислень для найбільших вертикальних переміщень $w(L)$ відрізнялися відповідно на 5.7% і 3.2% при поділі на 10 і 14 чотиришарових елементів. Отримані поля переміщень і напружень σ_x зображені на рис. 2. На рис. 3 зображено відповідні результати для розглядуваної плити за рівномірного навантаження її нижньої поверхні $z = -h/2 = -1.0$ м.

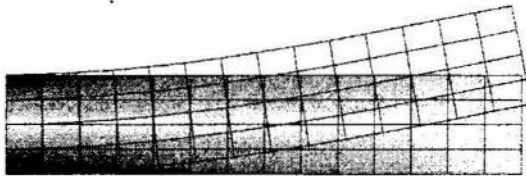


Рис. 2. Опорна плита, завантажена зосередженою силою P .

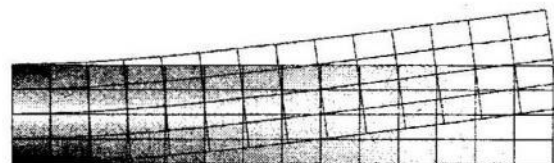


Рис. 3. Опорна плита за рівномірного навантаження.

На рисунках переміщення збільшені у десять разів стосовно до геометрії плити. Зростання міри інтенсивності затемнення фрагментів плити відповідає збільшенню величини напружень.

1. *Mau S. T., Tong P., Pian T. H. H.* Finite element solution for laminated thick plates // *J. Comp. Materials.* – 1972. – No. 6. – P. 304–311.
2. *Spilker R. L., Chou S. C., Orringer O.* Alternate hybrid-stress elements for analysis of multilayer composite plates // *J. Comp. Materials.* – 1977. – No. 11. – P. 51–70.
3. *Spilker R. L.* A hybrid-stress finite element formulation for thick multilayer laminates // *Computer and Structures.* – 1980. – No. 11. – P. 507–514.
4. *Pian T. H. H., Chen D.* Alternative ways for formulation of hybrid stress elements // *Intern. J. for Numer. Meth. in Engng.* – 1982. – **18**. – P. 1679–1684.
5. *Pian T. H. H., Chen D.* On the suppression of zero energy deformation modes // *Intern. J. for Numer. Meth. in Engng.* – 1983. – **19**. – P. 1741–1752.
6. *Pagano N. J.* Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending // *J. Comp. Materials.* – 1969. – No. 3. – P. 398–411.
7. *Kleiber M.* Wprowadzenie do MES. – Warszawa-Poznań: PWN, 1989.
8. *Gołaś J.* On limits of application of Kirchhoff's hypothesis in the theory of viscoelastic fibrous composite plates // *Engng. Trans.* – 1995. – **43**, No. 4. – P. 603–626.
9. *Gołaś J.* On necessity of making allowance for shear strain in cylindrical bending of fibre composite viscoelastic plates // *Arch. Civil Engng.* – 1997. – **43**, No. 2. – P. 121–147.

Jerzy Gołaś

**NUMERICAL ANALYSIS OF THICK MULTILAYER LAMINATED BEAMS
WITH HYBRID-STRESS FINITE ELEMENTS APPLICATION**

At the considered paper the algorythm with the help of which the program is developed for the static calculation of cylindrically loaded multilayered laminated beams is proposed. For the construction of the algebraic equations the hybrid-stress finite elements method based on modified Raissner variational functional is used.

Стаття надійшла до редколегії 24.08.99

Ольга Турчин

Львівський національний університет ім. І. Франка

ПЕРЕХІДНІ ОСЕСИМЕТРИЧНІ ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ У
БАГАТОШАРОВОМУ ПІВПРОСТОРИ

Дослідження нестационарного процесу теплопровідності в неоднорідних тілах та фізико-механічних явищ, що його супроводжують, є актуальним з огляду на численні проблеми у вирішенні сучасних технологічних завдань [1]. Сьогодні у літературі практично відсутні аналітичні розв'язки такого класу задач. У цій праці на основі методу інтегрального перетворення Лагерра [2] розроблено методику побудови розв'язку квазістатичних двовимірних задач термодинаміки для плоскошаруватих композитів.

Розглянемо композит, віднесений до циліндричної системи координат r, z ($0 \leq r < \infty$; $0 \leq z < \infty$), який складається з M шарів різної товщини та з різними фізико-механічними властивостями (елемент з номером M – півпростір). У момент часу $t = 0$ на його граничній поверхні починає діяти джерело тепла інтенсивності $q^*(r, t)$. Вважаючи, що початкова температура композита дорівнює нулю, температурне поле в ньому визначимо розв'язком початково-крайової задачі, яка в безрозмірних змінних ρ, γ, τ буде мати вигляд

$$\partial_{\rho\rho}^2 T^{(i)} + \rho^{-1} \partial_{\rho} T^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 T^{(i)} = \tilde{a}_i^{-1} \partial_{\tau} T^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (1)$$

$$T^{(i)} = 0, \quad \tau = 0, \quad i = \overline{1, M}; \quad (2)$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)} \partial_{\gamma} T^{(1)} = -q^*(\rho, \tau), \quad \gamma = 0; \quad \partial_{\gamma} T^{(M)} = T^{(M)} = 0, \quad \gamma \rightarrow \infty; \quad (3)$$

$$T^{(i)} = T^{(i+1)}, \quad \tilde{\lambda}_T^{(i)} \partial_{\gamma} T^{(i)} = \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} \partial_{\gamma} T^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (4)$$

де $\rho = \frac{r}{d}$, $\gamma = \frac{z}{d}$, $\tau = \frac{a_0 t}{d^2}$, $\tilde{a}_i = \frac{a_i}{a_0}$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \frac{\lambda_T^{(i)}}{\lambda_T^{(0)}}$, $\gamma_i = \sum_{k=1}^i \tilde{h}_k$, $\tilde{h}_i = \frac{h_i}{d}$; d – де-

який лінійний розмір; $\lambda_T^{(i)}$, a_i – відповідно, коефіцієнти тепло- і температуропровідності; h_i – товщина i -го шару.

Застосовуючи до рівнянь (1), крайових умов (3) та умов спряження (4) інтегральне перетворення Ганкеля – Лагерра, після врахування початкових умов (2) одержимо трикутну послідовність крайових задач:

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \omega_i^2 \bar{T}_n^{(i)} = \beta_i \sum_{m=0}^{n-1} \bar{T}_m^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (5)$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)} d_{\gamma} \bar{T}_n^{(1)} \Big|_{\gamma=0} = -\bar{q}_n(\xi), \quad \bar{T}_n^{(M)} \Big|_{\gamma \rightarrow \infty} = 0; \quad (6)$$

$$\bar{T}_n^{(i)} = \bar{T}_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1},$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(i)} d_\gamma \bar{T}_n^{(i)} = \tilde{\lambda}_T^{(i+1)} d_\gamma \bar{T}_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (7)$$

у формулах (5)-(7) $n = 0, 1, 2, \dots$, $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \int_0^\infty \rho \left[\int_0^\infty e^{-\lambda \tau} T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) L_n(\lambda \tau) d\tau \right] J_0(\rho \xi) d\rho$

– зображення за Лагерром і Ганкелем, $L_n(\cdot)$ – поліноми Лагерра, $\omega_i^2 = \xi^2 + \beta_i$, $\beta_i = \lambda/\tilde{a}_i$, λ – масштабний множник.

Загальний розв'язок трикутної послідовності (5) подамо у вигляді алгебричної згортки:

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \gamma) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \gamma) \right], \quad i = \overline{1, M}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

де

$$G_j(\gamma, \omega_i) = \exp(-\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(\omega_i \gamma)^k}{k!}; \quad W_j(\gamma, \omega_i) = \exp(\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(-\omega_i \gamma)^k}{k!}, \quad (9)$$

а коефіцієнти $a_{j,k}^i$ задовольняють рекурентні співвідношення:

$$a_{j,k+1}^i = \frac{1}{2} \left(a_{j,k+2}^i - \frac{\beta_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^i \right). \quad (10)$$

Задовольняючи крайові умови, умови спряження шарів та умови на безмежності, одержуємо трикутну послідовність функційних рівнянь:

$$[b_{k,l}] \{A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, \dots, A_n^{(l)}, B_n^{(l)}, \dots, A_n^{(M)}, B_n^{(M)}\}^T = \{c_n^k\}, \quad B_n^{(M)} \equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

У системах (11) коефіцієнти матриці $b_{k,l}$ не залежать від n і є значеннями фундаментальних розв'язків $G_j(\gamma, \omega_i)$ та $W_j(\gamma, \omega_i)$ та їхніх похідних на граничній поверхні $\gamma = 0$ та на лініях поділу шарів $\gamma = \gamma_i$. Стовпець вільних членів c_n^k складається з комбінації невідомих $A_m^{(i)}$, $B_m^{(i)}$, $m = \overline{0, n-1}$, одержаних за попередніх значень n .

Знайшовши всі $A_n^{(i)}$ і $B_n^{(i)}$, а отже, і $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma)$ за формулою (8), розв'язок задачі (1)-(4) подамо у вигляді

$$T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty \xi \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) J_0(\xi \rho) d\xi \right] L_n(\lambda \tau). \quad (12)$$

Визначимо напружено-деформований стан у композиті, спричинений температурним полем (12), припустивши, що його гранична поверхня $\gamma = 0$ вільна від навантажень, а на поверхнях поділу шарів виконуються умови ідеального механічного контакту.

У термінах ключових функцій $\theta^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \operatorname{div} \bar{U}^{(i)}$ і $w^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$, де $\bar{U}^{(i)} = (u^{(i)}, w^{(i)})^T$ – вектор пружних переміщень в i -му шарі, задача полягає у відшуванні для кожного шару розв'язку $2M$ рівнянь Пуассона:

$$\Delta\theta^{(i)} = \tilde{\alpha}_T^{(i)} \frac{1+v_i}{1-v_i} \Delta T^{(i)}, \quad \Delta w^{(i)} = -\frac{1}{1-2v_i} \partial_\gamma \theta^{(i)} + \tilde{\alpha}_T^{(i)} \frac{2(1+v_i)}{1-2v_i} \partial_\gamma T^{(i)}, \quad i = \overline{1, M} \quad (13)$$

за нульових початкових умов:

$$\theta^{(i)}(\rho, \gamma, 0) = w^{(i)}(\rho, \gamma, 0) = 0, \quad i = \overline{1, M}, \quad (14)$$

крайових умов:

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)} = \sigma_{\rho\gamma}^{(1)} = 0, \quad \gamma = 0; \quad u^{(M)} = w^{(M)} = 0, \quad \gamma \rightarrow \infty \quad (15)$$

та умов спряження шарів:

$$u^{(i)} = u^{(i+1)}, \quad w^{(i)} = w^{(i+1)}, \quad \sigma_{\rho\gamma}^{(i)} = \sigma_{\rho\gamma}^{(i+1)}, \quad \sigma_{\gamma\gamma}^{(i)} = \sigma_{\gamma\gamma}^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (16)$$

Тут, $\tilde{\alpha}_T^{(i)} = \alpha_T^{(i)} / \alpha_T^{(1)}$, $\tilde{E}_i = E_i / E_0$, $\Delta = \partial_{\rho\rho}^2 + \rho^{-1} \partial_\rho + \partial_{\gamma\gamma}^2$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат.

Розв'язок рівнянь (13) у просторі зображень за Ганкелем – Лагерром знайдемо у вигляді

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = C_n^{(i)}(\xi) e^{\xi\gamma} + D_n^{(i)}(\xi) e^{-\xi\gamma} + \tilde{\alpha}_T^{(i)} \frac{1+v_i}{1-v_i} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma); \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = & F_n^{(i)}(\xi) e^{\xi\gamma} + H_n^{(i)}(\xi) e^{-\xi\gamma} - \frac{\gamma}{2(1-2v_i)} [C_n^{(i)}(\xi) \operatorname{ch}(\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi) \operatorname{sh}(\xi\gamma)] + \\ & + \frac{\tilde{\alpha}_T^{(i)} (1+v_i)}{\beta_i (1-v_i)} d_\gamma \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma), \end{aligned} \quad (18)$$

де $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - \bar{T}_{n-1}^{(i)}(\xi, \gamma)$, $n = 1, 2, \dots$; $\bar{T}_0^{(i)}(\xi, \gamma) = \bar{T}_0^{(i)}(\xi, \gamma)$.

З крайових умов та умов спряження одержимо системи функційних рівнянь для визначення невідомих $C_n^{(i)}, D_n^{(i)}, F_n^{(i)}, H_n^{(i)}$:

$$\begin{aligned} [d_{k,l}] \{C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, F_n^{(1)}, H_n^{(1)}, \dots, C_n^{(i)}, D_n^{(i)}, F_n^{(i)}, H_n^{(i)}, \dots, \\ C_n^{(l)}, D_n^{(M)}, F_n^{(M)}, H_n^{(M)}\}^T = \{f_{k,n}\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Кінцевий розв'язок задачі подаємо у вигляді.

$$\begin{Bmatrix} w^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) \\ \theta^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) \end{Bmatrix} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \xi \begin{Bmatrix} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \\ \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \end{Bmatrix} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) J_0(\xi\rho) d\xi \right] L_n(\lambda\tau); \quad (20)$$

$$u^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} (\bar{\theta}_n^{(i)} - \partial_\gamma \bar{w}_n^{(i)}) J_1(\xi\rho) d\xi \right] L_n(\lambda\tau). \quad (21)$$

Компоненти тензора напружень у разі відомих переміщень одержуємо за законом Гука.

Числовий аналіз виконували для семишарового періодичного композиту, перший, третій, п'ятий і сьомий (півпростір) елементи якого виготовлені з алюмінієвого стопу, а другий, четвертий і шостий – з Al_2O_3 . Під час обезрозмірювання за базові величини $\lambda_T^{(0)}$, a_0 , $\alpha_T^{(0)}$, E_0 взяли відповідні параметри алюмінієвого стопу.

За формулою (12) розраховували температурне поле в композиті. Виявилось, що в разі утримання 30 членів ряду за Лагерром відносна похибка в розрахунках не перевищує 1%. На рис. 1 зображено результат розрахунку безрозмірного температурного поля по осі $\alpha = 0$ для різних значень змінної τ . Як бачимо, зміна температури за глибиною в кожному шарі зі збільшенням часу набуває майже лінійного характеру, що пояснюється невеликою відносною товщиною шарів. На рис. 2 зображено результати розрахунку безрозмірних радіальних напружень у різних точках осі $\alpha = 0$ залежно від змінної τ . Можемо простежити, що тривалість перехідного процесу зі збільшенням глибини зменшується, хоча абсолютне значення радіальних напружень для деяких ділянок композиту зі збільшенням значень змінної γ зростає.

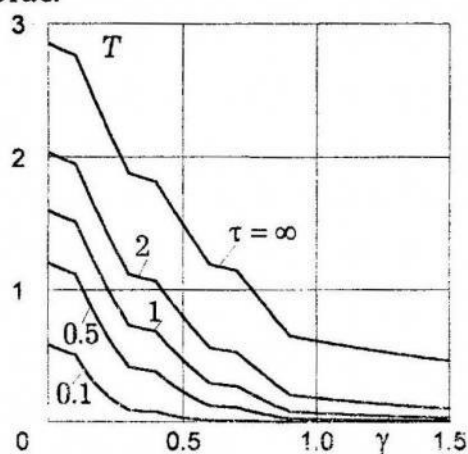


Рис. 1.

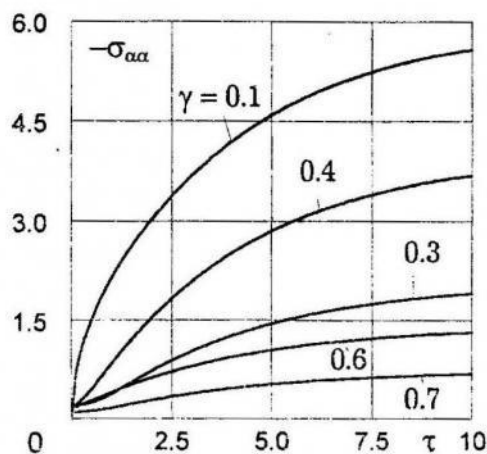


Рис. 2.

Треба зазначити, що запропоновану методику можна використовувати для дослідження фізико-механічних полів у функційно-градієнтальних областях при кусково-статій апроксимації їхніх фізичних коефіцієнтів в одному напрямі.

1. Галазюк В. А. Метод поліномів Чебишева – Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку в часткових похідних з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3–7.
2. Taya M., Arsenault R. J. Metal matrix composites – thermomechanical behavior – New York: At the Pergamon Press, 1989. – 305 p.

Olga Turchyn

AXISYMMETRIC TRANSIENT THERMAL STRESS ANALYSIS OF A MULTILAYERED HALFSPACE

In the paper the quasistatic thermoelastic axisymmetric problem for multilayered halfspace is considered. The problem is solved using Laguerre and Hankel integral transformations. The numerical analysis is carried out for the case of seven-layered periodic composite.

Стаття надійшла до редколегії 09.07.99

Юрій Пир'єв, Збігнев Олесьяк

Львівський національний університет ім. І. Франка
Варшавський університет**ФРИКЦІЙНЕ ТЕПЛОУТВОРЕННЯ ПІД ЧАС РУХУ ПРУЖНОГО ТІЛА
ТИПУ «ЗЧЕПЛЕННЯ-КОВЗАННЯ»**

Розглянемо одновимірну модель термопружного контакту плити ($L \times a \times b$) масою M з ідеально провідними півпросторами, які рухаються з постійними швидкостями V (рис. 1). Відстань між півпросторами має довжину товщини плити L і в початковий момент зменшується на величину ε . Плита утримується у вертикальному положенні пружиною з жорсткістю C і може виконувати рух уздовж осі Z декартової системи координат XYZ . Внаслідок дії сил тертя F_{fr} на поверхнях контакту $X = 0$, $X = L$ відбувається теплоутворення. Між поверхнями контакту плити і півпросторів відбувається тепловіддача за законом Ньютона. Не контактуючі бічні поверхні плити теплоізовані і для їхніх розмірів правильне $L/a \ll 1$, $L/b \ll 1$, що виправдовує використання одновимірної моделі теплопровідності. Приймаємо, що згідно з законом Амонтона $F_{fr} = f(V_{rel})N(t)$, де $f(V_{rel})$ – коефіцієнт тертя (рис. 2), який залежить від відносної швидкості $V_{rel} = V - \dot{Z}(t)$, причому $f(-V_{rel}) = -f(V_{rel})$, $N(t)$ – нормальна сила. Приймаємо, що в початковий момент плита розташована на відстані Z_0 від положення стаціонарного стану системи, де для зручності розмістимо початок системи координат. Початкова швидкість плити дорівнює нулю. Треба визначити температуру $T(X, t)$ плити, переміщення $U(X, t)$, нормальні напруження $\sigma_{xx}(X, t)$ вздовж осі X , величину зміщення $Z(t)$ плити стосовно положення статичної рівноваги та її швидкість.

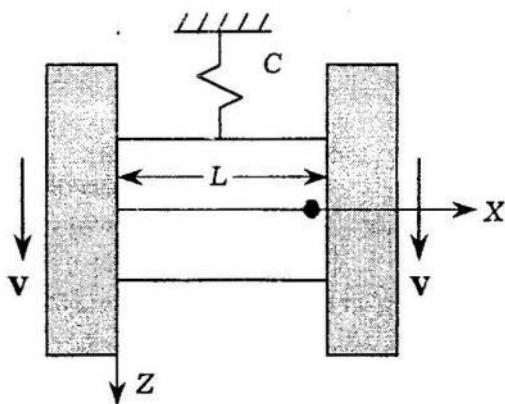


Рис. 1.

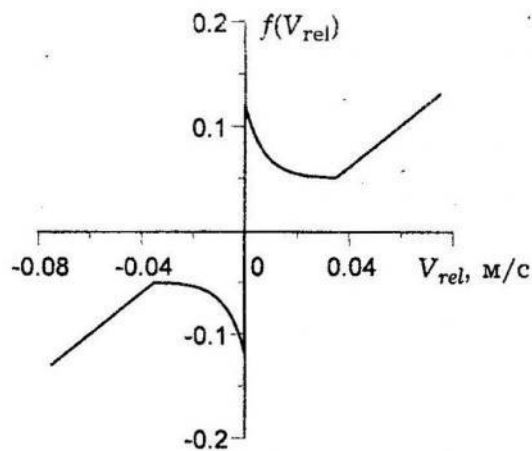


Рис. 2.

Задача зводиться до розв'язування системи диференціальних рівнянь квазістаціонарної незв'язаної термопружності:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial}{\partial X} U(X, t) - \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T(X, t) \right] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} T(X, t) = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} T(X, t) \quad (2)$$

та рівняння руху плити як абсолютно жорсткого тіла:

$$m \frac{d^2}{dt^2} Z(t) + c Z(t) = 2f(V_{rel}) P(t) - 2f(V) P_{st} \quad (3)$$

за таких механічних граничних умов:

$$U(0, t) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(L, t) = -\frac{\varepsilon}{2}, \quad (4)$$

теплових граничних умов:

$$\begin{aligned} K \frac{\partial T(0, t)}{\partial X} - \frac{1}{R} T(0, t) &= -f(V_{rel}) V_{rel} P(t), \\ K \frac{\partial T(L, t)}{\partial X} + \frac{1}{R} T(L, t) &= f(V_{rel}) V_{rel} P(t) \end{aligned} \quad (5)$$

і початкових умов:

$$T(X, 0) = 0, \quad Z(0) = Z_0, \quad \frac{d}{dt} Z(0) = 0. \quad (6)$$

Нормальні напруження в плиті знаходимо за формулою:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-2\nu} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial U}{\partial X} - \alpha T \right]. \quad (7)$$

У формулах (1)–(7) E – модуль Юнга; ν , K , k , α , R – коефіцієнти Пуассона, теплопровідності, температуропровідності, лінійного температурного розширення, термічного опору тепловіддачі від плити до півпросторів; $m = M/ab$; $c = C/ab$; $P(t) = N(t)/ab = -\sigma_{xx}(0, t)$ – контактний тиск; P_{st} – контактний тиск у положенні статичної рівноваги $Z = 0$.

Розв'язок крайової задачі (1)–(7) одержимо за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часом t . Для переходу в область оригіналів використовуємо теореми розкладення і добутку зображень. У результаті отримуємо задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння:

$$\ddot{z}(\tau) + z(\tau) = \Omega \left[f(V(1 - \dot{z}(\tau))) p(\tau) - \frac{f(V)}{1 - \gamma f(V)} \right], \quad z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = 0, \quad (8)$$

де безрозмірний контактний тиск є розв'язком інтегрального рівняння:

$$p(\tau) = 1 + 2\gamma \tilde{\omega} Bi \int_0^\tau G(\tau - \eta) f(V(1 - \dot{z}(\eta))) (1 - \dot{z}(\eta)) p(\eta) d\eta. \quad (9)$$

Безрозмірну контактну температуру $\theta(\tau) = \theta(0, \tau) = \theta(L/L_*, \tau)$ знаходимо за формулою:

$$\theta(\tau) = \tilde{\omega} \int_0^\tau g(\tau - \eta) f(V(1 - \dot{z}(\eta))) (1 - \dot{z}(\eta)) p(\eta) d\eta. \quad (10)$$

У подання (9), (10) входять вирази

$$g(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_3(\mu_m)}{\Delta'_1(\mu_m)} \exp(-\mu_m^2 \tilde{\omega} \tau), \quad G(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_2(\mu_m)}{\Delta'_1(\mu_m)} \exp(-\mu_m^2 \tilde{\omega} \tau),$$

$$\Delta'_1(\mu_m) = 0.5(2BiS_m + C_m - Bi^2(C_m - S_m)/\mu_m^2),$$

$$\Delta(\mu_m) = 2BiC_m + S_m(Bi^2 - \mu_m^2),$$

$$\Delta_2(\mu_m) = S_m - BiC_m^0, \quad \Delta_3(\mu_m) = 1 + C_m + BiS_m,$$

$$C_m = \cos(\mu_m), \quad S_m = \frac{\sin(\mu_m)}{\mu_m}, \quad C_m^0 = \frac{C_m - 1}{\mu_m},$$

де μ_m – корені характеристичного рівняння $\Delta(\mu_m) = 0$. У розв'язку (8)–(10) введені такі безрозмірні величини:

$$x = \frac{X}{L_*}, \quad z = \frac{Z}{L_*}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad v = \frac{\dot{Z}(t)}{V}, \quad z_0 = \frac{Z_0}{L_*}, \quad u = \frac{U}{L_*}, \quad p = \frac{P}{P_0},$$

$$p_{st} = \frac{P_{ps}}{P_0}, \quad \theta = \frac{T}{T_*}, \quad \tilde{\omega} = \frac{k}{L_*^2 \omega}, \quad Bi = \frac{R_0}{R}, \quad \Omega = \frac{2P_0}{m\omega V}, \quad \gamma = \tilde{E}\tilde{\alpha}\tilde{\omega}RV$$

і характерні параметри:

$$t_* = \frac{1}{\omega}, \quad L_* = \frac{V}{\omega}, \quad T_* = P_0 R_0 V, \quad P_0 = \tilde{E} \frac{\varepsilon}{L},$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad \tilde{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad R_0 = \frac{L}{K}.$$

Співвідношення (8)–(10) є системою нелінійних інтегрального і диференціального рівнянь. Розв'язок шукаємо методом Рунге-Кутта та ітерацій із використанням квадратурної формули трапецій.

Числовий аналіз виконано для сталевго шару ($\alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $K = 21 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$, $k = 5.9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu = 0.3$, $E = 19 \cdot 10^{10} \text{ Па}$) при $Bi = 4.76$, $\Omega = 12.8$, $\tilde{\omega} = 0.26 \cdot 10^{-2}$, $V = 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$ для різних значень z_0 . Суцільні криві на рис. 3–6 відповідають випадковій знехтування величиною теплового розширення $\gamma = 0$, штрихові криві $\gamma = 10$. Фазова картина руху плити зображена на рис. 3, 5. Поведінка безрозмірної контактної температури зображена на рис. 4, 6.

Висновок. У цій статті викладена методика та наведені основні результати розв'язку нової модельної задачі про фрикційний термопружний контакт тіла з рухомим оточуючим середовищем. Особливістю запропонованої моделі є врахування інерційності тіла, залежності коефіцієнтів тертя від відносної швидкості контактуючих тіл. Інерційність контактуючого тіла враховувалась також у працях [1, 2]. Розглядувану модель можна використовувати для обчислення контактних характеристик рухомих трибосистем. Розглянута задача є типовою моделлю для вивчення самозбуджувальних коливань (автоколивань).

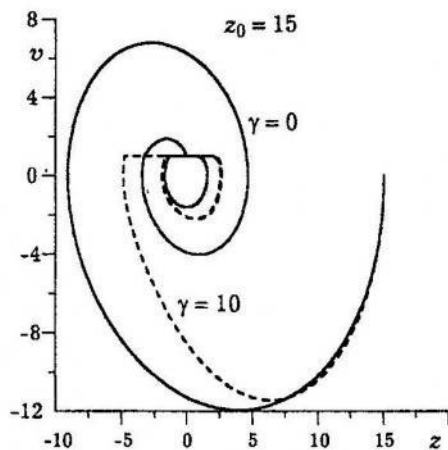


Рис. 3.

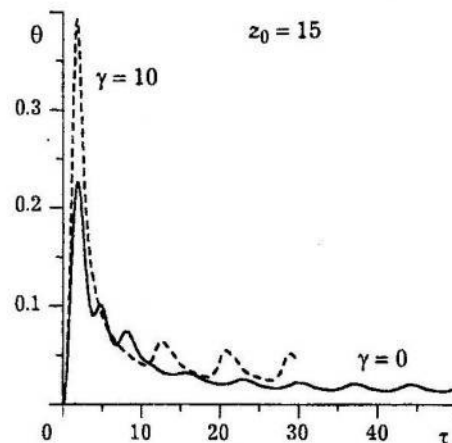


Рис. 4.

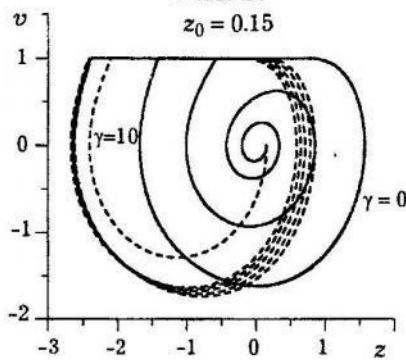


Рис. 5.

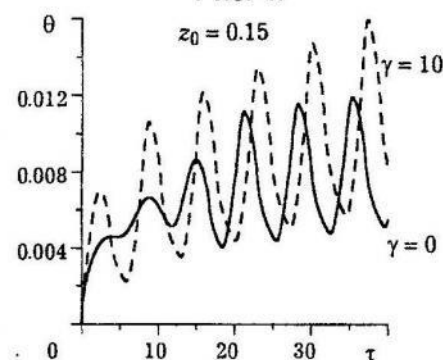


Рис. 6.

Автори вдячні Комітету наукових досліджень (The grant of the State Committee for Scientific Research of Poland, nr. 7 TO7A 030 12) за фінансову підтримку.

1. Пыр'єв Ю. А. Динамическая модель термоупругого контакта в условиях фрикционного нагрева и ограниченности теплового расширения // Трение и износ. – 1994. – 15, № 6. – С. 941–948.
2. Olesiak Z. S., Pyryev, Y. On dynamical thermoelastic contact of two solids with heat of friction generation and wear // Third Int. Congr. on Thermal Stresses. June 13–17, 1999. – Krakow (Poland), 1999. – P. 599–602.

Yuriy Pyryev, Zbignev Olesiak

GENERATION OF FRICTIONAL HEAT IN A «STICK-SLIP» RELATIVE MOTION OF ELASTIC SOLIDS

A new model of a one-dimensional thermoelastic contact problem has been proposed for the case of frictional heat generation and a «stick-slip» motion. A two dimensional heavy solid hanged on an elastic spring can oscillate in the vertical direction. The solid is in contact with two layers moving vertically with a constant velocity of small magnitude. The purpose of the paper is twofold: firstly the elastic strain is taken into account, secondly the effect of the generated heat of friction on the behaviour of the process is considered. Here the Cauchy problem has been reduced to a nonlinear ordinary differential equation. To obtain the solution we have made use of the Laplace transforms and have constructed a numerical algorithm. The results have been presented in the form of diagrams suitable for discussion.

Стаття надійшла до редколегії 15.06.99

Роман Кушнір

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ З НЕСТАЦІОНАРНИМ ФРИКЦІЙНИМ ТЕПЛОУТВОРЕННЯМ

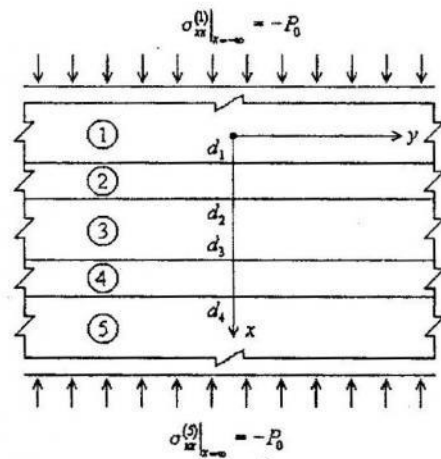
У праці [3] запропонована методика визначення нестационарного температурного поля і зумовлених ним температурних напружень у стисненій кусково-однорідній структурі з фрикційним теплоутворенням. Вона ґрунтується на рівняннях термопружності однорідних тіл з використанням узагальнених функцій для опису всієї структури як єдиного цілого і виконання математичної постановки узагальненої задачі спряження стосовно цих рівнянь [2, 6] за умов неідеального термомеханічного контакту на поверхнях спряження різновидних складових структури. У результаті одержуємо частково-вироджені диференціальні рівняння квазістатичної задачі термопружності з розривними коефіцієнтами. Побудову їхніх розв'язків виконуємо з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом і одного способу знаходження фундаментальної системи розв'язків звичайного диференціального рівняння довільного порядку з кусково-сталими коефіцієнтами [4].

За такою методикою знайдено розв'язок і проведено числовий аналіз задачі для двох стиснених на безмежності паралельно до осі Ox зусиллями P_0 різновидних півпросторів, між якими рухається зі сталою швидкістю v_0 і тертям паралельно до їхніх граничних поверхонь прошарок з відмінними від просторів фізико-механічними характеристиками [3, 5]. Побудуємо розв'язок цієї ж задачі за умови, що прошарок теж є кусково-однорідним (схема задачі зображена на рис.).

Для цього випадку треба розв'язати частково-вироджене диференціальне рівняння нестационарної задачі теплопровідності [3]:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{1}{a(x)} \frac{\partial t}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^4 \left\{ \left[\left(1 - K_{\lambda}^{(k)} \right) \frac{\partial t_{k+1}}{\partial x} \right]_{x=d_k} - \frac{f_k P_0 v_0}{\lambda_t^{(k)}} \right] \delta_-(x - d_k) + \left[\frac{2\lambda_t^{(k+1)}}{h_k} \frac{\partial t_{k+1}}{\partial x} \right]_{x=d_k} + \frac{f_k P_0 v_0}{h_k} \right] \delta'_-(x - d_k) \right\} \quad (1)$$

із початковою та граничними умовами



$$t(x, 0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} t(x, \tau) = 0, \quad (2)$$

де f_k і h_k – коефіцієнти тертя і термічної провідності, $K_\lambda^{(k)} = \lambda_t^{(k+1)} / \lambda_t^{(k)}$; шукана функція температури $t(x, \tau)$, а також коефіцієнти теплопровідності $\lambda_t(x)$ і температуропровідності $a(x)$ подають у вигляді

$$p(x) = p_1 + \sum_{k=1}^4 (p_{k+1} - p_k) S_-(x - d_k), \quad (3)$$

де $p(x)$ і p_k – відповідно температура та фізико-механічні характеристики всієї кусково-однорідної структури та її k -ї складової; $S_-(x)$ – асиметрична одинична функція.

Розв'язок крайової задачі (1), (2) будуюмо з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом τ . У результаті, як і в [3], одержуємо вираз для трансформанти функції температури:

$$\bar{t}(x, s) = Q_1(x, s) + \sum_{k=1}^4 Q_{k+1}(x, s) S_-(x - d_k), \quad (4)$$

$$\text{де } \bar{t}(x, s) = \int_0^\infty t(x, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad a_k = a;$$

$$Q_1(x, s) = C e^{x\sqrt{s/a}}, \quad Q_{k+1}(x, s) = \left(\sum_{l=1}^k \frac{dQ_l(x, s)}{dx} \Big|_{x=d_k} \right) \Theta_k^*(x) + \Theta_k^0(x), \quad k = \overline{1, 4};$$

$$\Theta_k^0(x) = -F_k(s) \left[\frac{\text{sh} \sqrt{s/a}(x - d_k)}{\lambda_t^{(k+1)}} + \frac{1}{h_k} \sqrt{\frac{s}{a}} \text{ch} \sqrt{\frac{s}{a}}(x - d_k) \right], \quad F_k(s) = \frac{f_k P_0 v_0}{s} \sqrt{\frac{a}{s}},$$

$$\Theta_k^*(x) = \left[(K_\lambda^{(k)})^{-1} - 1 \right] \frac{\sqrt{a} \text{sh} \sqrt{s/a}(x - d_k)}{\sqrt{s}} + \frac{2\lambda_t^{(k)}}{h_k} \text{ch} \sqrt{\frac{s}{a}}(x - d_k);$$

$$C = - \left(\sum_{k=1}^4 e^{-\sqrt{s/a} d_k} \tilde{Q}_k \right) \left(2 + \sum_{k=1}^4 \hat{p}_k(d_k) e^{-\sqrt{s/a} d_k} \bar{\Theta}_k^* \right)^{-1};$$

$$\tilde{Q}_1 = \bar{\Theta}_1^0, \quad \tilde{Q}_k = \left(\sum_{m=1}^{k-1} \frac{d\tilde{p}_m(x)}{dx} \Big|_{x=d_k} \right) \bar{\Theta}_k^* + \bar{\Theta}_k^0, \quad k = \overline{2, 4};$$

$$\tilde{p}_1(x) = \Theta_1^0(x), \quad \tilde{p}_m(x) = \left(\sum_{l=1}^{m-1} \frac{d\tilde{p}_l(x)}{dx} \Big|_{x=d_m} \right) \Theta_m^*(x) + \Theta_m^0(x), \quad m \geq 2;$$

$$\hat{p}_1(x) = \sqrt{s/a} e^{\sqrt{s/a} x}, \quad \hat{p}_k(x) = \hat{p}_{k-1}(x) + \hat{p}_{k-1}(d_{k-1}) \frac{d\Theta_{k-1}^*(x)}{dx}, \quad k = \overline{2, 4};$$

$$\bar{\Theta}_k^0 = -F_k(s) \left(\frac{1}{\lambda_t^{(k+1)}} + \frac{1}{h_k} \sqrt{\frac{s}{a}} \right), \quad \bar{\Theta}_k^* = \sqrt{\frac{a}{s}} \left[(K_\lambda^{(k)})^{-1} - 1 \right] + \frac{2\lambda_t^{(k)}}{h_k}.$$

Зумовлене цим нестационарним температурним полем термopужне переміщення знаходимо з такого диференціального рівняння [3, 5]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta(x) t(x, \tau) + C_u, \quad (5)$$

де $\beta(x) = \frac{\alpha_t(x)[1 + \nu(x)]}{1 - \nu(x)}$; C_u – стала інтегрування; $\alpha_t(x)$ і $\nu(x)$ – відповідно температурний коефіцієнт лінійного розширення і коефіцієнт Пуассона, які подають у вигляді (2).

У рівнянні (5) вже враховані умови рівності переміщень ($u_k = u_{k+1}$) на поверхнях спряження $x = d_k$, а для відшукування сталої C_u використовуємо такі умови контакту на цих поверхнях [1, 5]:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k+1)} = -P_0 \quad \text{при} \quad x = d_k, \quad (6)$$

де $\sigma_{xx}^{(k)} = \mu_k \varepsilon_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} - \beta_k t_k \right)$, $\mu_k = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)}$, $\varepsilon_k = \frac{2(1 - \nu_k)}{1 - 2\nu_k}$, E_k – модуль пружності k -ї складової кусково-однорідної структури.

Застосувавши до рівняння (5) інтегральне перетворення Лапласа, зінтегруємо його. Одержимо таке зображення для термопружного переміщення:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, s) = & C\beta_1 \sqrt{\frac{a}{s}} \left\{ e^{x\sqrt{s/a}} [1 - S_-(x - d_1)] + e^{d_1\sqrt{s/a}} S_-(x - d_1) \right\} + \\ & + \beta_2 S_-(x - d_1) \int_{d_1}^x \sum_{k=1}^2 Q_k(x) dx - \beta_2 S_-(x - d_2) \int_{d_2}^x \sum_{k=1}^2 Q_k(x) dx + \\ & + \beta_3 S_-(x - d_2) \int_{d_2}^x \sum_{k=1}^3 Q_k(x) dx - \beta_3 S_-(x - d_3) \int_{d_3}^x \sum_{k=1}^3 Q_k(x) dx + \\ & + \beta_4 S_-(x - d_3) \int_{d_3}^x \sum_{k=1}^4 Q_k(x) dx - \beta_4 S_-(x - d_4) \int_{d_4}^x \sum_{k=1}^4 Q_k(x) dx + \\ & + \beta_5 S_-(x - d_4) \int_{d_4}^x \sum_{k=1}^5 Q_k(x) dx + C_u x, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{де} \quad C_u x = C_u^{(1)} x + \sum_{k=1}^4 [C_u^{(k+1)} - C_u^{(k)}] (x - d_k) S_-(x - d_k), \quad C_u^{(k)} = -\frac{1}{\mu_k \varepsilon_k} \frac{P_0}{s}.$$

Для випадку, коли на поверхнях спряження $x = d_2$ і $x = d_3$ складових прошарку враховується лише їхній термоопір $R_k = 2/h_k$ ($k = 2, 3$), у формулах (4) і (7) треба прийняти $f_2 = f_3 = 0$.

Як часткові випадки з формул (4) і (7) при $\lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(k)}$, $\alpha_t^{(2)} = \alpha_t^{(k)}$, $E_2 = E_k$ і $\nu_2 = \nu_k$ ($k = 3, 4$), $d_1 = 0$ одержуємо трансформанти температури і переміщення у стисненій на безмежності тришаровій структурі [3, 5], а також прийнявши додатково, що $\lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(5)}$, $\alpha_t^{(2)} = \alpha_t^{(5)}$, $E_2 = E_5$, $\nu_2 = \nu_5$,

$d_4 \rightarrow \infty$, $h_5 \rightarrow \infty$ – для відповідної задачі про контактну взаємодію двох різнорідних півпросторів із урахуванням фрикційного нагріву [1].

Щоб одержати розв'язок сформульованої квазістатичної задачі термopружності відновлюємо оригінали $t(x, \tau)$ і $u(x, \tau)$ зображень $\bar{t}(x, s)$ та $\bar{u}(x, s)$ за допомогою числового спектрального методу обернення у базисі ортогональних многочленів Якобі [5]. Це дає змогу проводити числовий аналіз залежностей від часової і просторової координат нестационарного температурного поля і зумовленого ним термopружного переміщення, які виникають внаслідок контактної взаємодії складових такої кусково-однорідної структури, при різних співвідношеннях їхніх фізико-механічних характеристик.

1. Гриліцький Д. В. Термopружні контактні задачі в трибології. – К., 1996. – 204 с.
2. Коляно Ю. М., Кулик О. М., Кушнір Р. М. Про постановку узагальненої задачі спряження для рівнянь термopружності кусково-однорідних тіл // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 2. – С. 43–47.
3. Кушнір Р. М. Використання методу узагальнених задач спряження в термopружності кусково-однорідних тіл при неідеальному контакті // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 1. – С. 108–116.
4. Кушнір Р. М. Про побудову розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь з кусково-сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 9. – С. 54–57.
5. Кушнір Р. М., П'янило Я. Д. Дослідження термонапруженого стану кусково-однорідного вузла тертя // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 3. – С. 98–102.
6. Kushnir R. M. Thermoelasticity of piecewise-homogeneous structures: method of investigation utilizing the distribution technique // Thermal Stresses '97: Proc. of the 2nd Int. Symp. of Thermal Stresses and Related Topics, June 8–11, 1997. – Rochester, New York: Rochester Inst. of Techn., 1997. – P. 557–560.

Roman Kushnir

THERMOELASTIC STATE OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS STRUCTURE INVOLVING NONSTATIONARY FRICTIONAL HEATING

A nonstationary temperature field and thermal displacement caused by them in two compressible inhomogeneous half-spaces with piecewise-homogeneous layer moving between them with friction are determined using the method of generalized coupling problems.

Стаття надійшла до редколегії 27.07.99

UDC 539.3

Alexander Yevtushenko¹, Sylvester Konieczny¹, Roksolana Chapovska²¹Lódź University of Technology²Lviv State Institute of Finance and EconomyDETERMINATION OF TEMPERATURE IN RAIL
DURING SLIDING OF WHEEL

1. Statement of the problem. The circular cylinder (the wheel) of radius R is moving with a constant running speed V over the bounding of the semi-space (the rail) and is pressed into it by force P . It is known that in wheel-rail contact the creep caused the sliding within the contact region with the speed V_s . Sliding is accompanied by heat generation in the form of the heat fluxes which are directed in both the wheel and rail. Because of the temperature rise the microstructural changes of subsurface layers in rail is possible. Thus in this paper we consider the problem of the frictional heating of the rail only. For this purpose we now introduce the rectangular coordinate axes Oxy , rigidly connected to the leading edge of the wheel. To expedite calculation, the following assumptions were made:

- the width of the contact area $2a$ is small with comparison of the wheel radius R ;
- the creep due to elastic deformation is neglected here. For gross sliding (the creep $0.1\% < s < 2\%$) the sliding speed V_s is equal $V_s = sV$;
- at the leading edge of the contact zone, only a small temperature difference between wheel and rail can be observation. Thus, the heat partitioning factor becomes $\lambda = 0.5$; the intensity of the heat flux q on the contact area $0 \leq x \leq a$ is equal $q = \lambda f V_s p$, where f is the coefficient of friction, p is the contact pressure;
- the convective heat transfer outside of the contact region is neglected;
- the fast-moving of the frictional heat sources is considered;
- the steady state in the rail is taking into consideration;
- the mechanical and thermal properties of the rail material is constant.

Under these assumptions the heat conductivity problem can be written as

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad |\xi| < \infty, \quad 0 < \eta < \infty. \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \begin{cases} -\Lambda p^*(\xi), & 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0, & -\infty < \xi < 0, \quad 1 < \xi < \infty \end{cases} \quad (2)$$

$$T \rightarrow 0 \quad \text{at} \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \rightarrow \infty, \quad (3)$$

where

$$\xi = \frac{x}{2a}, \quad \eta = \frac{y}{d}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}, \quad p_0 = \frac{P}{2a}, \quad d = \sqrt{\frac{2ak}{V_s}}, \quad \Lambda = \frac{fV_s p_0 d}{K},$$

T is the temperature, K is the conductivity, k is the diffusivity.

2. Method of solution. The solution of the heat conductivity problem (1)–(3) is obtained by applying the Fourier transform in the form [6]

$$T(\xi, \eta) = \frac{\Lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^b G(\xi - \tau, \eta) p^*(\tau) d\tau, \quad (4)$$

$$G(\xi, \eta) = \frac{\exp(-\eta^2/(4\xi))}{\sqrt{\xi}}, \quad b = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi < 0 \\ \xi, & 0 \leq \xi \leq 1 \\ 1, & 1 < \xi < \infty \end{cases}.$$

Since $p^*(\tau)$ is arbitrary, Ling and Yang [6] have proposed a Fourier series representation for the contact pressure. In present paper for this purpose we use the piecewise-linear functions (roof functions) method [2]. We shall introduce a uniform mesh into the integration interval $[0, b]$: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = b$, $\tau_i = i\delta\tau$, $\delta\tau = b/n$, $i = 0, 1, \dots, n$. Corresponding with every knot τ_i of the mesh a «roof» functions will be put:

$$\varphi_0(\tau) = \begin{cases} (\tau_1 - \tau) / \delta\tau, & \tau \in [\tau_0, \tau_1] \\ 0, & \tau \notin [\tau_0, \tau_1] \end{cases}, \quad \varphi_n(\tau) = \begin{cases} (\tau - \tau_{n-1}) / \delta\tau, & \tau \in [\tau_{n-1}, \tau_n] \\ 0, & \tau \notin [\tau_{n-1}, \tau_n] \end{cases},$$

$$\varphi_i(\tau) = \begin{cases} (\tau - \tau_{i-1}) / \delta\tau, & \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i] \\ (\tau_{i+1} - \tau) / \delta\tau, & \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \\ 0, & \tau \notin [\tau_{i-1}, \tau_{i+1}] \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

We shall build approximation of function $p^*(\tau)$ in the form

$$p^*(\tau) = \sum_{i=0}^n p_i^* \varphi_i(\tau), \quad p_i^* \equiv p^*(\tau_i). \quad (5)$$

The uniform error of this approximation for $p^*(\tau) \in C^2([0, b])$ has order $O(\delta\tau^2)$ [2].

Substituting the approximation (5) into the equation (4) we find

$$T(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi < 0 \\ \frac{\Lambda}{\sqrt{\pi} \delta\tau} \sum_{i=0}^n p_i^* L_i(\xi, \eta), & 0 \leq \xi \leq 1 \\ \frac{\Lambda}{\sqrt{\pi} \delta\tau} \sum_{i=0}^n p_i^* M_i(\xi, \eta), & 1 < \xi < \infty \end{cases} \quad (6)$$

where

$$M_0(\xi, \eta) = \tau_1 J_0(\tau_1, \xi, \eta) - J_1(\tau_1, \xi, \eta)$$

$$\begin{aligned}
M_n(\xi, \eta) &= J_1(\tau_n, \xi, \eta) - J_1(\tau_{n-1}, \xi, \eta) - \tau_{n-1}[J_0(\tau_n, \xi, \eta) - J_0(\tau_{n-1}, \xi, \eta)] \\
M_i(\xi, \eta) &= \tau_{i-1}J_0(\tau_{i-1}, \xi, \eta) - (\tau_{i+1} + \tau_{i-1})J_0(\tau_i, \xi, \eta) + \tau_{i+1}J_0(\tau_{i+1}, \xi, \eta) - \\
&\quad - J_1(\tau_{i-1}, \xi, \eta) + 2J_1(\tau_i, \xi, \eta) - J_1(\tau_{i+1}, \xi, \eta), \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\
J_0(\tau_i, \xi, \eta) &= -2\sqrt{\xi - \tau_i} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4(\xi - \tau_i)}\right) + 2\sqrt{\xi} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\xi}\right) - \\
&\quad - \eta\sqrt{\pi} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi - \tau_i}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}\right) \right], \quad \xi > \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\
J_1(\tau_i, \xi, \eta) &= \frac{2}{3}(\xi - \tau_i)\sqrt{\xi - \tau_i} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4(\xi - \tau_i)}\right) - \frac{2}{3}\xi\sqrt{\xi} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\xi}\right) + \\
&\quad + \left(\frac{\eta^2}{6} + \xi\right)J_0(\tau_i, \xi, \eta), \quad \xi > \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned} \tag{7}$$

The functions $L_i(\xi, \eta)$ in the equations (6) were calculated using the formulae (7) at substitution of functions $J_k(\tau_i, \tau_i, \eta)$, $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 0, 1$ instead of functions $J_k(\tau_i, \xi, \eta)$, where

$$\begin{aligned}
J_0(\tau_i, \tau_i, \eta) &= -2\sqrt{\tau_i} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\tau_i}\right) - \eta\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\tau_i}}\right), \\
J_1(\tau_i, \tau_i, \eta) &= -\frac{2}{3}\tau_i\sqrt{\tau_i} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4\tau_i}\right) + \left(\frac{\eta^2}{6} + \tau_i\right)J_0(\tau_i, \tau_i, \eta), \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

3. Contact pressure. The distribution of the contact pressure has the form [4]

$$p^*(\tau) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha\beta} \tau^\alpha (1 - \tau)^\beta, \tag{8}$$

where

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{\pi} \arctg\left(\frac{1}{f|B - H|}\right), \quad \beta = 1 - \alpha, \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \\
B &= \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}, \quad H = \frac{2\delta k\mu}{1 - \nu}, \quad \delta = \frac{\alpha_t(1 + \nu)}{K}.
\end{aligned} \tag{9}$$

The values of the parameters B and H for a large range of materials are given in [4]. Note that the parameter H is remarkably close to unity for most metals.

At $H = 0$ from the formulae (8) and (9) we obtain the known solution of the isothermal contact problem [1]. If $f = 0$ or $H = B$ then $\alpha = \beta = 1/2$ and we have the solution of the plane Hertz contact problem [1].

4. Numerical example and conclusions. The numerical examples has been considered for the friction couple wheel-rail at $R = 0.5$ m; $f = 0.3$; $\nu = 0.3$; $\mu = 80.8$ GPa; $K = 41$ W/(m·K); $k = 9.1 \cdot 10^{-6}$ m²/s; $\alpha_t = 10^{-5}$ K⁻¹ because of the

experimental data [5] for three cases of the load. These results are listed in the following table

Parameters	Passenger carstatic load	Locomotive wheelstatic load	Locomotive wheeldynamic load
P (N/m)	10^5	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$
V (m/s)	25	75	75
s , %	0,1	1	2
V_s (m/s)	0,025	0,75	1,5
a (mm)	0,37	0,52	0,74
p_0 (MPa)	66,7	94,3	133,4
$T_{\max}$ (K)	1,5	13,8	32,9

It is observed that the maximum contact temperature is reached in the case at high running speed ($V = 75$ m/s) with a creep of 2% for the dynamic locomotive wheel load. The calculated temperatures do not exceed 350°C . Thus, the thermally induced phase transformation of the rail material, where the temperature of at least 600°C would be needed [6], cannot be induced.

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. – М.: Гос. издат. техн.-теорет. л-ры, 1953.
2. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981.
3. Archard J. F., Rowntree R. A. Metallurgical phase transformations in rubbing of steels // Proc. R. Soc. London, Ser.A. – 1988. – **418**. – P. 405–424.
4. Hills D. A., Nowell D., Sackfield A. The state of stress induced by cylindrical sliding contacts with frictional heating // Int. J. Mech. Sci. – 1990. – **32**, No. 9. – P. 767–778.
5. Knothe K., Liebelt S. Determination of temperatures for sliding contact with applications for wheel-rail systems // Wear. – 1995. – **189**, No. 1–2. – P. 91–99.
6. Ling F. F., Yang C. C. Temperature distribution in a semi-infinite solid under a fast-moving arbitrary heat source // Int. J. Heat Mass. Transfer. – 1971. – **17**. – P. 199–206.

Олександр Євтушенко, Сильвестр Конечный, Роксолана Чаповська

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРИ У РЕЙЦІ ПІД ЧАС КОВЗАННЯ КОЛЕСА

Запропоновано математичну модель визначення температурного поля під час тертя внаслідок ковзання залізничного колеса по рейці. Використано відомий розв'язок Лінга плоскої квазістационарної задачі теплопровідності. На базі методу кусково-лінійної апроксимації побудовано розрахункову схему та виконано числовий аналіз для декількох типів інтенсивності фрикційного теплового потоку.

Стаття надійшла до редколегії 03.08.99

Volodymyr Pauk

Łódź University of Technology

CONTACT PROBLEM WITH THE FRICTIONAL HEATING FOR A HALF-SPACE AND A PUNCH WITH BOUNDARY RECTANGULAR-SHAPE WAVINESS

1. Introduction. The contact problem for an elastic half-space and the rigid punch having the profile of periodically distributed rectangular waviness was considered in [4]. Recently [3] we studied the contact with frictional heating of bodies with the boundary parabolic waviness. In this work we consider the following contact problem. The rigid thermoinsulated punch is pressed to the thermoelastic half-space $y < 0$ and slides with the constant velocity V in z -axis direction (Fig. 1). It is assumed that the punch has the profile of rectangular waviness with the period L and the contact occurs on the region

$\Gamma = \bigcup_{k=-\infty}^{k=+\infty} (a_k, b_k)$. The friction forces σ_{zy} which have place in the contact area

are described by Amonton's law. Moreover, these forces produce the heat which conducts into the half-space only. Outside the contact region the Newton's type of heat exchange is allowed. The problem is considered as planar.

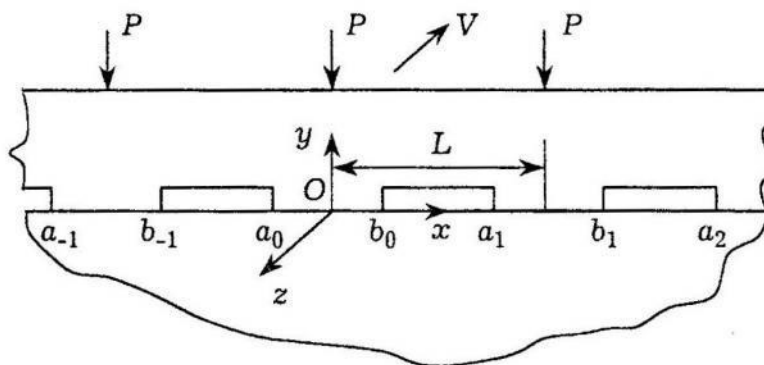


Fig. 1.

2. System of integral equations of the problem. Main idea in the construction of integral equations of the problem under consideration is that the contact pressure, heat flux, temperature are the very same in all contact regions (a_k, b_k) , $k = -\infty, \dots, +\infty$, or to be more exact, all fields in the half-space are L -periodic functions. Under this assumption it is possible to write the integral equations on the simple contact region (a_0, b_0) . This approach, proposed

in [4], was applied in [3] to the boundary problems of thermoelasticity. The system of integral equations of problem formulated above has the form [3]

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{\pi\mu} \int_{a_0}^{b_0} \frac{p(x')}{x-x'} dx' - \frac{1-\nu}{\mu L} \int_{a_0}^{b_0} p(x') G(x-x') dx' - \frac{fV\delta}{\pi} \int_{a_0}^{b_0} p(x') N(x-x') dx' + \\ + \frac{\delta h}{\pi} \int_{a_0}^{b_0} T(x') N(x-x') dx' = g'(x), \quad a_0 \leq x \leq b_0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$T(x) - \frac{h}{\pi K} \int_{a_0}^{b_0} T(x') M(x-x') dx' + \frac{fV}{\pi K} \int_{a_0}^{b_0} p(x') M(x-x') dx' = 0, \quad a_0 \leq x \leq b_0, \quad (2)$$

$$\int_{a_0}^{b_0} p(x') dx' = P, \quad (3)$$

where ν , μ , K , δ , h are, respectively, Poisson's ratio, shear module, thermal conductivity, thermal distortion and radiation coefficient of the half-space; $p(x)$ is contact pressure, $T(x)$ is temperature of the half-space boundary; f is friction coefficient; P is load applied within one period; $g(x)$ is the function describing the waviness geometry, which is equal $g(x) = \text{const}$ for rectangular-shape waviness. Kernels of these integral equations have the forms

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi z}{L} \right) + \frac{1}{45} \left(\frac{\pi z}{L} \right)^3 + \frac{2}{945} \left(\frac{\pi z}{L} \right)^5 + \frac{1}{4725} \left(\frac{\pi z}{L} \right)^7 + \dots, \\ N(z) &= 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi j z / L)}{2\pi j + hL/K}, \quad M(z) = \frac{\pi K}{hL} + 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi j z / L)}{2\pi j + hL/K}. \end{aligned}$$

Introducing dimensionless variables and functions

$$\begin{aligned} r = x'/a, \quad s = x/a, \quad p^*(r) = \frac{a}{P} p(x), \quad T^*(r) = \frac{K}{fVP} T(x), \\ \beta = \frac{fV\delta\mu a}{1-\nu}, \quad \lambda = L/a, \quad Bi = \frac{ha}{K}, \quad a = \frac{1}{2}(a_0 + b_0) \end{aligned} \quad (4)$$

the system (1)–(3) can be rewritten in the dimensionless form

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p^*(r) \left\{ \frac{1}{s-r} - \frac{\pi}{\lambda} G^*(s-r) - \beta N^*(s-r) \right\} dr + \\ + \frac{\beta Bi}{\pi} \int_{-1}^1 T^*(r) N^*(s-r) dr = 0, \quad |s| \leq 1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$T^*(s) - \frac{Bi}{\pi} \int_{-1}^1 T^*(r) M^*(s-r) dr + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p^*(r) M^*(s-r) dr = 0, \quad |s| \leq 1, \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 p^*(r) dr = 1, \quad (7)$$

where kernels $G^*(\cdot)$, $M^*(\cdot)$, $N^*(\cdot)$ are some dimensionless functions.

3. Numerical solution of the system of integral equations. The integral equation (5) is of the Cauchy-type with the index equal to 1. In this case the distribution of contact pressure can be written as

$$p^*(s) = \varphi(s) / \sqrt{1-s^2}, \quad (8)$$

where $\varphi(s)$ is a new unknown function. The integral equation (6) is of the Fredholm-type of second kind with the weakly-singular kernel. So the temperature will be consider of the class of limited functions.

Using the Gauss-Chebyshev quadrature formulae [2] and rectangular quadrature, the system (5)-(7) can be transformed to the system of linear algebraic equations

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \varphi(r_k) w_k \left\{ \frac{1}{s_m - r_k} - \frac{\pi}{\lambda} G^*(s_m - r_k) - \beta N^*(s_m - r_k) \right\} + \\ & + \frac{2\beta Bi}{\pi n} \sum_{k=1}^n T^*(\rho_k) N^*(s_m - \rho_k) = 0, \quad m = 1, \dots, n-1, \\ & T^*(\rho_m) - \frac{Bi}{\pi} \sum_{k=1}^n T^*(\rho_k) A_{km} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \varphi^*(r) w_k M^*(\rho_m - r_k) = 0, \quad m = 1, \dots, n, \\ & \sum_{k=1}^n \varphi^*(r) w_k = 1, \end{aligned} \quad (9)$$

where $r_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$, $w_k = \frac{\pi}{n}$, $k = 1, \dots, n$;

$$s_m = \cos \frac{m}{n} \pi, \quad m = 1, \dots, n-1; \quad \rho_k = -1 + \frac{1}{n}(2k-1), \quad k = 1, \dots, n;$$

$$A_{km} = \frac{2\pi}{n\lambda Bi} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(2\pi j + \lambda Bi)} \left\{ \sin \frac{2\pi j X_1}{\lambda} - \sin \frac{2\pi j X_2}{\lambda} \right\}, \quad k, m = 1, \dots, n;$$

$$X_1 = (2m - 2k + 1)/n, \quad X_2 = (2m - 2k - 1)/n, \quad k, m = 1, \dots, n.$$

The system of $2n$ equations (9) is closed for $2n$ unknowns $\varphi(r_k)$, $T^*(\rho_k)$, $k = 1, \dots, n$.

4. Results. There are following input parameters of the problem: Biot's coefficient Bi , dimensionless period λ and parameter β which can be considered as a frictional heating ratio. The numerical calculations showed that the Biot's coefficient has not effects on the contact pressure distribution but has the great influence on the contact temperature. Analyzing the effects of the parameters λ and β on the contact pressure, some interesting results were

obtained. For some values of these parameters the function $\varphi(s)$ changes the sign for $s = \pm 1$. This can be treated as a perturbation of the contact at corner points of the punch. The values of λ and β for which the contact in points $s = \pm 1$ is lost are placed above the solid line in Fig. 2. Below this line the contact in the region $|s| \leq 1$ is full. For $\lambda \rightarrow \infty$ the well-known result $\beta_{cr} = 1.16$ [1] for critical value of the frictional heating ratio in the single punch problem was approached.

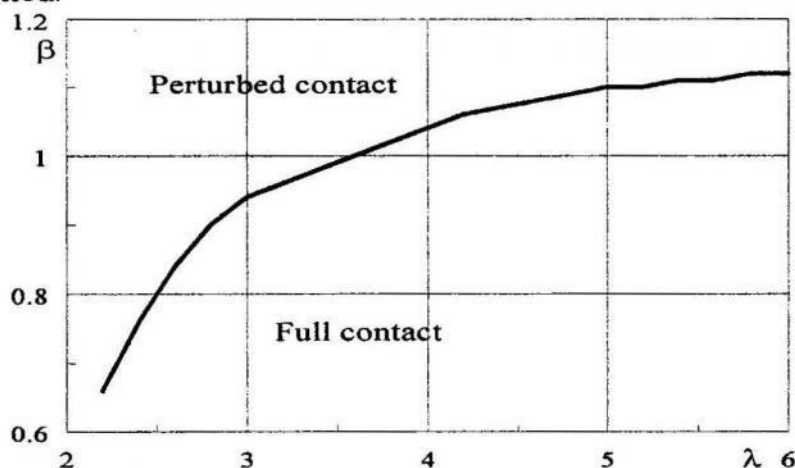


Fig. 2.

It is clear that the perturbations of the contact have place for small values of the period λ (i.e. for a «dense» waviness) and for great values of the ratio β (i.e. for high speed V , great friction coefficient f , etc., See (4)).

1. Barber J. R. Some thermoelastic contact problems involving frictional heating // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1976. – 29. – P. 1–13.
2. Belotserkovskij S. M., Lifanov I. K. Numerical methods in the singular integral equations. – M.: Nauka, 1985. – 256 p.
3. Pauk V. J. Problems of solid mechanics involving boundary microstructure. – Łódź: Wydawnictwo PŁ, 1997. – 96 p.
4. Shtayermann I. Y. Contact problem of elasticity. – M.: Nauka, 1949. – 272 p.

Володимир Паук

КОНТАКТНА ЗАДАЧА З ТЕПЛОУТВОРЕННЯМ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З ПРЯМОКУТНО ХВИЛЯСТОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Досліджено контактну взаємодію пружного теплопровідного півпростору та жорсткого теплоізованого рухомого штампa. Вважається, що основа штампa має форму прямокутної періодичної хвилястості. Взято до уваги явище виділення тепла внаслідок тертя тіл. Для розв'язування задачі використано метод сингулярних інтегральних рівнянь. Досліджено вплив поверхневої структури штампa на розв'язок задачі.

Стаття надійшла до редколегії 20.07.99

Віктор Семерак

Львівський національний університет ім. І. Франка

ТЕМПЕРАТУРА ПОВЕРХНІ ТЕРТЯ ПІД ЧАС ГАЛЬМУВАННЯ

Вступ. У працях [1, 2] температура поверхні фрикційних елементів гальм подана як сума температури довкілля, підвищення об'ємної температури, середньої поверхневої і температури спалаху. Середню температуру номінальної поверхні тертя знаходимо з розв'язку теплової задачі тертя для двох півбесмежених тіл $z \geq 0$ (тіло 1, фрикційна накладка) та $z \leq 0$ (тіло 2, диск) [2]:

$$\frac{\partial^2 T_i(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{k_i} \frac{\partial T_i(z, t)}{\partial t}, \quad z > 0, \quad i = 1 \quad \text{та} \quad z < 0, \quad i = 2; \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (1)$$

$$T_i(z, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$T_1(0, t) = T_2(0, t) = T(t), \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (3)$$

$$K_1 \frac{\partial T_1(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0+} - K_2 \frac{\partial T_2(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0-} = q(t), \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (4)$$

$$T_i \rightarrow 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (5)$$

де T_i – температури взаємодіючих тіл; K_i – коефіцієнти теплопровідності; k_i – коефіцієнти температуропровідності; $q(t)$ – інтенсивність фрикційного потоку тепла; t – час; t_s – час гальмування.

Точні розв'язки крайової задачі теплопровідності (1)–(5) одержано для трьох випадків зміни з часом питомої потужності сил тертя [3]: 1) $q(t) = q_0 = \text{const}$; 2) $q(t) = q_0 \sqrt{t}$; 3) $q(t) = q_0 t$. Насправді часова залежність функції

$$q(t) = f(t)p(t)V(t), \quad 0 \leq t \leq t_s \quad (6)$$

суттєво відрізняється від наведених трьох залежностей. Зокрема, контактний тиск під час гальмування зростає від нуля, в початковий момент часу, до максимального значення p_0 за законом [4]:

$$p(t) = p_0 p^*(t/t_m), \quad p^*(t) = 1 - \exp(-t), \quad (7)$$

де t_m – параметр, що характеризує час досягнення функцією $p(t)$ номінального значення p_0 . При заданому тиску (7) і постійному коефіцієнті тертя $f(t) = f_0$ швидкість під час гальмування зменшується від початкової V_0 при $t = 0$ до нуля в момент зупинки $t = t_s$ [5]:

$$V(t) = V_0 V^*(\tau), \quad V^*(\tau) = 1 - \tau + \tau_m p^*(\tau^*), \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (8)$$

де $\tau = t/t_S^0$; $\tau_m = t_m/t_S^0$; $\tau^* = \tau/\tau_m$; $t_S^0 = 2W/(f_0 p_0 V_0)$ – час гальмування при $t_m = 0$ (гальмування з постійним сповільненням); W – початкова кінетична енергія системи. Час гальмування t_S знаходимо з рівняння $V(t_S) = 0$:

$$\tau_S - \tau_m p^*(\tau_S/\tau_m) = 1, \quad \tau_S = t_S/t_S^0 \geq 1. \quad (9)$$

Знайдену з рівняння (9) залежність безрозмірного часу гальмування τ_S від параметра τ_m з абсолютною похибкою меншою за 1%, можна апроксимувати функцією: $\tau_S = 1 + \tau_m^{0.58}$.

Температура. Розв'язок крайової задачі теплопровідності (1)–(5), якщо відомі питома потужність сил тертя (6)–(8) та час гальмування t_S (9), отримуємо за допомогою теореми про множення зображень для інтегрального перетворення Лапласа (теореми про згортку [6]) у вигляді

$$T_i(z, t) = \Lambda \int_0^{\tau} p^*\left(\frac{\tau - \tau'}{\tau_m}\right) V^*(\tau - \tau') \tau'^{-1/2} \exp\left(-\frac{\zeta_i^2}{\tau'}\right) d\tau', \quad 0 \leq t \leq t_S, \quad (10)$$

$$\text{де} \quad \Lambda = \frac{f_0 p_0 V_0}{(1 + k_\varepsilon) K_1} \sqrt{\frac{k_1 t_S^0}{\pi}}, \quad k_\varepsilon = \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \quad \zeta_i = \frac{|z|}{2\sqrt{k_i t_S^0}}, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Підставляючи функції $p^*(\tau)$ (7) та $V^*(\tau)$ (8) в розв'язок (10), одержуємо:

$$T_i(z, t) = \Lambda \left[(1 + \tau_m - \tau) N^-(\zeta_i, \tau) + N^+(\zeta_i, \tau) - (1 + 2\tau_m - \tau) L^-(\zeta_i, \tau, \tau_m) + \right. \\ \left. + \tau_m L^-(\zeta_i, \tau, \tau_m/2) - L^+(\zeta_i, \tau, \tau_m) \right], \quad (12)$$

$$\text{де} \quad \left[\begin{matrix} N^\pm(\zeta_i, \tau) \\ L^\pm(\zeta_i, \tau, \tau_m) \end{matrix} \right] = \int_0^{\tau} \tau'^{\pm 1/2} \exp\left(-\frac{\zeta_i^2}{\tau'}\right) \left[\exp\left[-(\tau - \tau')/\tau_m\right] \right] d\tau', \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

Знайдемо інтеграли $N^\pm(\zeta_i, \tau)$. Інтегрування в (13) частинами дає

$$N^-(\zeta_i, \tau) = 2\sqrt{\tau} \exp(-\eta_i^2) - 2\zeta_i^2 \int_0^{\tau} \tau'^{-3/2} \exp(-\zeta_i^2/\tau') d\tau', \quad (14)$$

$$N^+(\zeta_i, \tau) = \frac{2}{3} \tau \sqrt{\tau} \exp(-\eta_i^2) - \frac{2}{3} \zeta_i^2 N^-(\zeta_i, \tau), \quad \eta_i = \zeta_i/\sqrt{\tau}. \quad (15)$$

Беручи до уваги значення інтеграла [7]

$$\int_x^\infty \exp(-y^2) dy = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(x),$$

з (14) одержуємо

$$N^-(\zeta_i, \tau) = 2\sqrt{\tau} \exp(-\eta_i^2) - 2\zeta_i \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\eta_i), \quad \operatorname{erfc}(\infty) = 1 - \operatorname{erf}(\infty). \quad (16)$$

Інтеграли $L^\pm(\zeta_i, \tau, \tau_m)$ (13), обчислені за допомогою методики [5], мають вигляд

$$L^-(\zeta_i, \tau, \tau_m) = \sqrt{\pi \tau_m} \exp(-\tau^*) \{ [F_C(\zeta_i, \tau, \tau_m) - 1] \sin(2\eta_{im}) + \\ + C(\tau_i, \tau, \tau_m) \cos(2\eta_{im}) \}, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

$$L^+(S_i, \tau, \tau_m) = \frac{1}{2} \tau_m \sqrt{\pi \tau_m} \exp(-\tau^*) \{ [F_C(\zeta_i, \tau, \tau_m) + 2\eta_{im} C(\zeta_i, \tau, \tau_m) - 1] \times \\ \times \sin(2\eta_{im}) + [F_C(\zeta_i, \tau, \tau_m) - 2\eta_{im} F_S(\zeta_i, \tau, \tau_m) + \eta_{im}] \cos(2\eta_{im}) \}, \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} F_S(\zeta_i, \tau, \tau_m) \\ F_C(\zeta_i, \tau, \tau_m) \end{bmatrix} = \operatorname{erf}(2\eta_i) + \begin{bmatrix} S(\zeta_i, \tau, \tau_m) \\ C(\zeta_i, \tau, \tau_m) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} S(\zeta_i, \tau, \tau_m) \\ C(\zeta_i, \tau, \tau_m) \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta_i^2) \int_0^{\sqrt{\tau^*}} e^{x^2} \begin{bmatrix} \sin(2\eta_i x) \\ \cos(2\eta_i x) \end{bmatrix} dx, \quad \eta_{im} = \zeta_i / \sqrt{\tau_m}. \quad (20)$$

Підставивши інтеграли $N^\pm(\zeta_i, \tau)$ (15), (16) та $L^\pm(\zeta_i, \tau, \tau_m)$ (17)–(20) у співвідношення (12), визначимо повне температурне поле робочих елементів (фрикційної накладки і диска) при одноразовому гальмуванні.

Контактну температуру знаходимо з (12) при $z = 0$ у вигляді

$$T(t) = \Lambda \left[\left(2 + \tau_m - \frac{4}{3} \tau \right) \sqrt{\tau} - \left(1 + \frac{3}{2} \tau_m - \tau \right) 2\sqrt{\tau_m} F(\sqrt{\tau^*}) + \right. \\ \left. + \tau_m \sqrt{2\tau_m} F(\sqrt{2\tau^*}) \right], \quad 0 \leq t \leq t_S, \quad (21)$$

де $F(\tau) = \exp(-\tau^2) \int_0^\tau \exp(x^2) dx$ – інтеграл Досона [8].

При $t_m = 0$ ($t_S = t_S^0$) зі співвідношення (21) одержуємо відомий результат [10] для контактної температури під час гальмування з постійним сповільненням:

$$T(t) = 2\Lambda \left(1 - \frac{2}{3} \frac{t}{t_S} \right) \sqrt{\frac{t}{t_S}}, \quad 0 \leq t \leq t_S. \quad (22)$$

Числовий аналіз та висновки. Незалежними початковими параметрами задачі є дві безрозмірні величини τ_m (8) і ζ_i (11).

Контактна температура досягає найбільшого значення під час гальмування з постійним сповільненням (рис. 1).

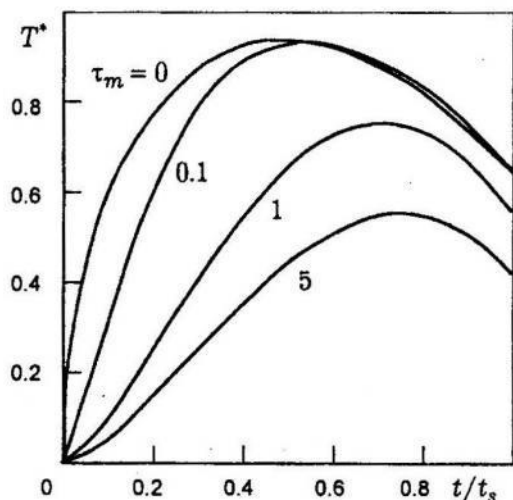


Рис. 1.

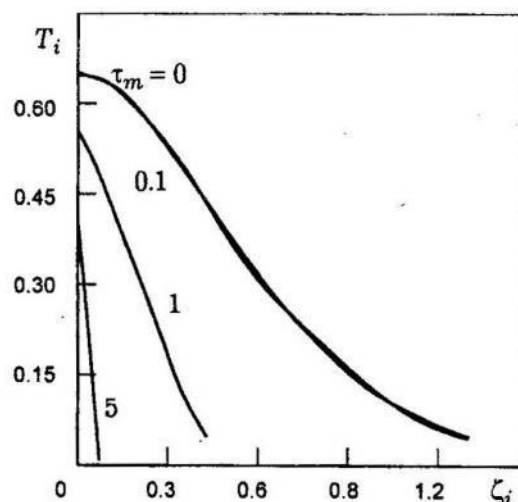


Рис. 2.

Час досягнення максимального значення контактної температури $t \approx 0.5t_s$ при $\tau_m = 0$. Зі збільшенням параметра τ_m цей час зміщується, стає ближчим до зупинки ($t \rightarrow t_s$).

Під час гальмування фізико-хімічні та механічні перетворення матеріалу фрикційного елемента відбуваються у тонких приповерхневих шарах. Товщина цих шарів характеризується «ефективною глибиною прогрівання», що визначається як глибина, на якій температура становить п'ять відсотків від поверхневої [11]. Температура швидко знижується в осьовому напрямі (рис. 2). Це зменшення лінійне при $\tau_m > 1$. Ефективна глибина прогрівання найбільша під час рівносповільненого гальмування; зі збільшенням параметра τ_m вона зменшується (особливо швидко при $\tau_m \rightarrow 1$).

1. Чичинадзе А. В. Расчет и исследование внешнего трения при торможении. – М.: Наука, 1967. – 231 с.
2. Чичинадзе А. В., Браун Э. Д., Гинзбург А. Г., Игнатъева З. В. Расчет и исследование внешнего трения при торможении. – М.: Наука, 1979. – 267 с.
3. Пехович А. И., Жидких В. М. Расчет теплового режима твердых тел. – Л.: Энергия, 1968. – 304 с.
4. Гинзбург А. Г. Теоретические и экспериментальные основы расчета однокредного процесса торможения с помощью системы уравнений тепловой динамики трения // Оптимальное использование фрикционных материалов в узлах трения машин. – М.: Наука, 1973. – С. 93–105.
5. Коваленко Е. В., Евтушенко А. А., Иванык Е. Г. К расчету температур при торможении. // Трение и износ. – 1997. – 15, № 1. – С. 435–441.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая шк., 1967. – 599 с.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
8. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
9. Barber J. R., Martin-Moran C. J. Green's functions for transient thermoelastic contact problems for the half-plane // Wear. – 1982. – 79. – P. 11–19.
10. Fasekas G. A. G. Temperature gradient and heat stresses in brakes drums // SAE. Trans. – 1953, No. 1. – P. 279–284.
11. Игнатъев З. В., Чичинадзе А. В. Определение температуры поверхности трения тормозов при различной эффективной глубине проникновения тепла // Тепловая динамика трения. – М.: Наука, 1970. – С. 17–20.

Victor Semerak

TEMPERATURE OF THE FRICTIONAL SURFACE DURING BRAKING

This paper deals with the one-dimensional transient heat conductivity contact problem of a sliding two semi-spaces, which induces of friction and heat generation during braking. In the present temperature analysis the capacity of the frictional source on the contact plane dependent on the time of braking. The problem solved exactly using the Laplace transform technique. Numerical results for the temperature are obtained for the different value of the input parameter, which characterize the duration of increase of the contact pressure during braking from zero to the maximum value.

Стаття надійшла до редколегії 11.08.99

Петро Краснюк

Львівський національний університет ім. І. Франка

**ТЕРМОПРУЖНА КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ КІЛЬЦЯ ТА ЦИЛІНДРА
ЗА ФРИКЦІЙНОГО ТЕПЛОУТВОРЕННЯ**

Контактні вузли, які складаються з обтисненого бандажем пружного циліндра, широко використовують у машинобудуванні, що робить актуальним як у теоретичному, так і у прикладному аспектах дослідження відповідних контактних задач. Одним із прикладів такої взаємодії є випадок обтиснення довгого циліндра тонким пружним кільцем. Відповідна пружна контактна задача для такої системи розглянута в [1], де одержано аналітичну формулу для контактного тиску.

Це повідомлення стосується дослідження статичної термопружної задачі взаємодії порожнинного циліндра та насадженої на нього без натягу кільцевої пластини постійної товщини, коли їхній контакт супроводжується стаціонарним теплоутворенням від дії сил тертя.

Постановка задачі. Нехай на довгий пружний циліндр (рис. 1) із внутрішнім радіусом a_1 та зовнішнім a_0 насаджено тонку кільцеву пластину з внутрішнім радіусом a_0 та зовнішнім a_2 постійної товщини 2δ (коли δ – мале порівняно з a_0). На поверхнях $r = a_j$, $j = 1, 2$ задаються радіальні напруження q_j , де q_1 змінюється вздовж осі циліндра, а змінною навантаження q_2 вздовж бічної поверхні пластини нехтуємо.

Припустимо, що пластина обертається стосовно

циліндра з малою кутовою швидкістю ω . За рахунок дії сил тертя, які виникають на співдотичних поверхнях тіл і підпорядкованих закону Амонтона, відбувається теплоутворення, тепловий контакт тіл неідеальний, а між неконтактуючими поверхнями циліндра та пластини і довкіллям нульової температури відбувається теплообмін за законом Ньютона.

Розглядаючи задачу у статичній постановці, визначимо розподіл напружень, переміщень, температури і теплових потоків у трибосистемі за врахування у кільцевій пластині відцентрових сил інерції.

Вважаючи переріз, що проходить через середину пластини нульовим, віднесемо цю трибопару до циліндричної системи координат, спрямувавши

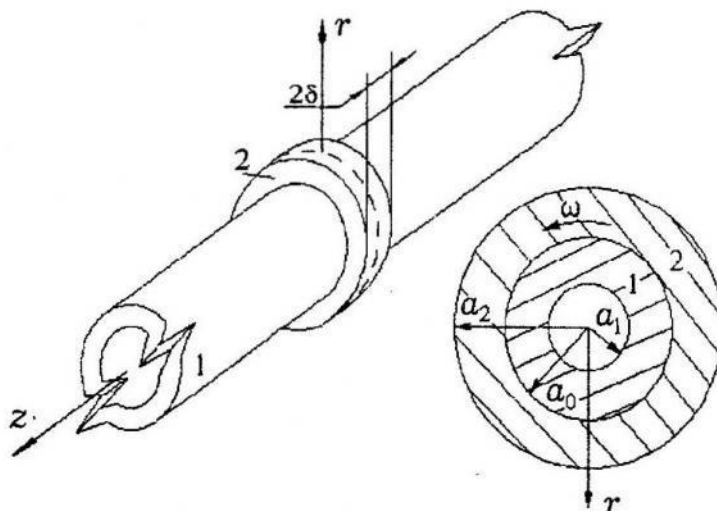


Рис. 1.

вісь z за віссю циліндра. Додатково припускаємо, що розподіл навантаження $q_1(z)$ є симетричним стосовно осі $z = 0$, а його поведінка на нескінченності така, що допускає використання інтегрального косинус-перетворення Фур'є.

Тоді, за зроблених припущень, для циліндра розглядаємо осесиметричну задачу термопружності, яка математично зводиться до побудови розв'язку системи, яка охоплює диференціальні рівняння теплопровідності:

$$\partial_r^2 T_1 + r^{-1} \partial_r T_1 + \partial_z^2 T_1 = 0, \quad (1)$$

рівноваги, сумісності деформацій та співвідношення закону Гука (формули (1.2)–(1.4) з праці [2] при $j = 1$). Натомість у пластині реалізується узагальнений плоский напружений стан, тому тут одержимо систему, яка складається з рівняння теплопровідності тонких пластин:

$$\partial_r^2 T_2 + r^{-1} \partial_r T_2 - \kappa^2 T_2 = 0 \quad (2)$$

(де коефіцієнт κ характеризує інтенсивність тепловіддачі з основ пластини) та рівняння термопружності з урахуванням відцентрових сил інерції:

$$\partial_r^2 u_r^{(2)} + r^{-1} \partial_r u_r^{(2)} - r^{-2} u_r^{(2)} + \omega^2 \tilde{c}^{-2} r = \alpha_2 (1 + \nu_2) \partial_r T_2. \quad (3)$$

При цьому розв'язки систем диференціальних рівнянь мають задовольняти граничні та контактні умови:

$$r = a_1: \quad \partial_r T_1 = \gamma_1 T_1; \quad \sigma_r^{(1)} = -q_1(z); \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0; \quad (4)$$

$$r = a_2: \quad \partial_r T_2 = -\gamma_2 T_2; \quad \sigma_r^{(2)} = -q_2; \quad (5)$$

$$r = a_0, |z| \leq \delta: \quad \lambda_1 \langle \partial_r T_1 \rangle - \lambda_2 \partial_r T_2 = f \omega a_0 \langle p(z) \rangle; \quad (6)$$

$$\lambda_1 \langle \partial_r T_1 \rangle + \lambda_2 \partial_r T_2 + h (\langle T_1 \rangle - T_2) = 0; \quad (7)$$

$$\langle u_r^{(1)} \rangle = u_r^{(2)}; \quad \langle \sigma_r^{(1)} \rangle = \sigma_r^{(2)} = -\langle p(z) \rangle; \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0; \quad (8)$$

$$r = a_0, |z| > \delta: \quad \partial_r T_1 = -\gamma_0 T_1; \quad \sigma_r^{(1)} = 0; \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad (9)$$

де $\gamma_j = \bar{\alpha}_j / \lambda_j$ ($\gamma_0 = \bar{\alpha}_0 / \lambda_1$); $\tilde{c} = \sqrt{E_2 / (\rho_2 (1 - \nu_2^2))}$; $p(z)$ – контактний тиск; T_j – температура; $\sigma_r^{(j)}$, $\tau_{rz}^{(j)}$ – радіальне і дотичне напруження; $u_r^{(j)}$ – радіальне переміщення; E_j – модуль Юнга; f , ν_j , λ_j , α_j , $\bar{\alpha}_j$ ($\bar{\alpha}_0$) – відповідно коефіцієнти тертя, Пуассона, теплопровідності, лінійного теплового розширення та теплообміну; h – термічна провідність площини контакту; ρ_2 – густина. У наведених та наступних формулах значення $j = 1$ стосується циліндра, $j = 2$ – пластини.

Оскільки товщина циліндричної пластини приймається малою, то на ділянці взаємодії досить забезпечити виконання усереднених за z теплофізичних (6), (7) та механічних (8) контактних умов, про що свідчить наявність доданків у трикутних дужках для компонент, які відповідають порож-

нистому циліндру (наприклад, $\langle u_r^{(1)} \rangle(r) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} u_r^{(1)}(r, z) dz$). У випадку циліндричної пластини таке означення є очевидним і впливає з умови узагальненого плоского напруженого стану.

Побудова розв'язку. Ввівши дві невідомі функції

$$f_1(z) = (\partial_r T_1(a_0, z) + \gamma_0 T_1(a_0, z)) H(\delta - |z|) \quad \text{та} \quad \langle f_2(z) \rangle = -\partial_r T_2(a_0) \quad (10)$$

(де $H(z)$ – функція Гевісайда), для кожної зі складових трибосистеми запишемо вирази для температури, напружень і переміщень у тілах стосовно функцій f_j та невідомого контактного тиску. Для того щоб одержати кінцевий розв'язок задачі, потрібно визначити характер зміни вздовж осі z контактного тиску та функцій f_j і задовольнити контактні умови при $r = a_0$, $|z| \leq \delta$.

Стосовно контактного тиску прийmemo, згідно з [1], що

$$p(z) = p_* (\delta^2 - z^2)^{\beta-1}, \quad (11)$$

якщо β є першим додатним коренем характеристичного рівняння:

$$\operatorname{tg}(\pi\beta) \sin(\pi\beta) = -\frac{(1-\nu_1^2) E_2}{(1-\nu_2^2) E_1} (1 - 2\beta^2 - \cos(\pi\beta)).$$

Щодо функцій $f_j(z)$, то припустивши, що при $|z| \leq \delta$: $T_1(a_0, z) = T_1(a_0)$ та скориставшись теплофізичними контактними умовами (6), (7), запишемо такі вирази:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= 0.5 f \omega a_0 \lambda_1^{-1} p_* (\delta^2 - z^2)^{\beta-1} + (\gamma_0 - 0.5 h \lambda_1^{-1}) T_1(a_0) + 0.5 h \lambda_1^{-1} T_2(a_0), \\ f_2(z) &= 0.5 f \omega a_0 \lambda_2^{-1} p_* (\delta^2 - z^2)^{\beta-1} + 0.5 h \lambda_2^{-1} T_1(a_0) - 0.5 h \lambda_2^{-1} T_2(a_0). \end{aligned} \quad (12)$$

Формули для знаходження $T_j(a_0)$ одержимо, використавши вирази для температури циліндра та циліндричної пластини. Як наслідок,

$$T_j(a_0) = f \omega a_0 p_* Q_j, \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left[\frac{\sqrt{\pi}}{4\lambda_2} \delta^{2(\beta-1)} \Gamma(\beta) \Gamma^{-1}(\beta + \frac{1}{2}) \Phi_2(a_0) \frac{h}{2\pi\delta\lambda_1} F_1\{\overline{\Phi}_1(a_0, \xi)\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi\delta\lambda_1}} (2\delta)^{(\beta-\frac{1}{2})} F_2\{\overline{\Phi}_1(a_0, \xi)\} \left(1 + \frac{h}{2\lambda_2} \Phi_2(a_0) \right) \right] Q^{-1}, \\ Q_2 &= \left[\frac{\sqrt{\pi}}{4\lambda_2} \delta^{2(\beta-1)} \Gamma(\beta) \Gamma^{-1}(\beta + \frac{1}{2}) \Phi_2(a_0) \left(1 - \frac{1}{\pi\delta} \left(\gamma_0 - \frac{h}{2\lambda_1} \right) F_1\{\overline{\Phi}_1(a_0, \xi)\} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi\delta\lambda_1}} (2\delta)^{(\beta-\frac{1}{2})} F_2\{\overline{\Phi}_1(a_0, \xi)\} \frac{h}{2\lambda_2} \Phi_2(a_0) \right] Q^{-1}, \end{aligned}$$

$$Q = \left(1 + \frac{h}{2\lambda_2} \Phi_2(a_0)\right) \left(1 - \frac{\gamma_0}{\pi\delta} F_1\{\bar{\Phi}_1(a_0, \xi)\}\right) + \frac{h}{2\pi\delta\lambda_1} F_1\{\bar{\Phi}_1(a_0, \xi)\},$$

$$F_1\{f(\xi)\} = \int_0^\infty f(\xi) \frac{1 - \cos(2\xi\delta)}{\xi^2} d\xi; \quad F_2\{f(\xi)\} = \int_0^\infty f(\xi) \frac{J_{\beta-\frac{1}{2}}(\xi\delta)}{\xi^{\beta-\frac{1}{2}}} \frac{\sin(\xi\delta)}{\xi} d\xi,$$

$$\bar{\Phi}_1(r, \xi) = \{I_0(\xi r)[\xi K_1(\xi a_1) + \gamma_1 K_0(\xi a_1)] + K_0(\xi r)[\xi I_1(\xi a_1) - \gamma_1 I_0(\xi a_1)]\}$$

$$\times \{[\xi I_1(\xi a_0) + \gamma_0 I_0(\xi a_0)][\xi K_1(\xi a_1) + \gamma_1 K_0(\xi a_1)]$$

$$- [\xi K_1(\xi a_0) - \gamma_0 K_0(\xi a_0)][\xi I_1(\xi a_1) - \gamma_1 I_0(\xi a_1)]\},$$

$$\Phi_2(r) = -\frac{1}{\kappa} \frac{I_0(\kappa r)[\kappa K_1(\kappa a_2) - \gamma_2 K_0(\kappa a_2)] + K_0(\kappa r)[\kappa I_1(\kappa a_2) + \gamma_2 I_0(\kappa a_2)]}{I_1(\kappa a_0)[\kappa K_1(\kappa a_2) - \gamma_2 K_0(\kappa a_2)] - K_1(\kappa a_0)[\kappa I_1(\kappa a_2) + \gamma_2 I_0(\kappa a_2)]},$$

ξ – параметр інтегрального перетворення Фур'є; $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ – модифіковані функції Бесселя першого і другого роду, порядку ν ; $J_\nu(z)$ – функція Бесселя першого роду, порядку ν ; $\Gamma(\beta)$ – гамма-функція.

Задовольнивши останню граничну умову – кінематичну умову контакту з (8), запишемо формулу для p_* :

$$p_* = \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \frac{2a_1}{\pi\delta} \int_0^\infty \bar{q}_1(\xi) \bar{\Delta}_2(a_2, \xi) \frac{\sin(\xi\delta)}{\xi} d\xi - \frac{q_2}{E_2} \frac{2a_0 a_2^2}{a_2^2 - a_0^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega^2 a_0}{4(1 - \nu_2^2) \bar{c}^2} (a_2^2(3 + \nu_2) + a_0^2(1 - \nu_2)) \right] \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \frac{2a_0}{\sqrt{\pi}\delta} (2\delta)^{\beta-\frac{1}{2}} \times \right.$$

$$\times \Gamma(\beta) F_2\{\bar{\Delta}_1(a_1, \xi)\} - \frac{\sqrt{\pi} a_0}{2E_2} \delta^{2(\beta-1)} \Gamma(\beta) \Gamma^{-1}(\beta + \frac{1}{2}) \left(\frac{a_2^2 + a_0^2}{a_2^2 - a_0^2} + \nu_2 \right) + f\omega a_0 \times$$

$$\times \left\langle \alpha_1 \left[\frac{\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi}\delta\lambda_1} (2\delta)^{\beta-\frac{1}{2}} F_2\{\bar{H}_1(\xi)\} + Q_1 \frac{\gamma_0}{\pi\delta} F_1\{\bar{H}_1(\xi)\} + (Q_2 - Q_1) \frac{h}{2\pi\delta\lambda_1} F_1\{\bar{H}_1(\xi)\} \right] - \right.$$

$$\left. - \alpha_2 \left[\frac{a_0 \sqrt{\pi} \delta^{2(\beta-1)}}{2\lambda_2(a_2^2 - a_0^2)} \Gamma(\beta) \Gamma^{-1}(\beta + \frac{1}{2}) H_2(a_0) + \frac{a_0 h}{\lambda_2(a_2^2 - a_0^2)} (Q_2 - Q_1) H_2(a_0) \right] \right\rangle^{-1}, \quad (14)$$

коли $\bar{q}_1(\xi)$ – косинус-перетворення Фур'є функції обтискующего навантаження $q_1(z)$,

$$\bar{H}_1(\xi) = (1 - \nu_1^2) \xi^{-2} [\Delta_2(a_1, \xi) \Delta^{-1}(a_1, \xi) \partial_r \bar{\Phi}_1(a_1, \xi) -$$

$$- (\Delta_1(a_1, \xi) \Delta^{-1}(a_1, \xi) - (1 - \nu_1)^{-1}) \partial_r \bar{\Phi}_1(a_0, \xi)],$$

$$H_2(a_0) = \frac{a_0}{\kappa^2} - \frac{a_2}{\kappa^2} \frac{I_1(\kappa a_2)[\kappa K_1(\kappa a_2) - \gamma_2 K_0(\kappa a_2)] - K_1(\kappa a_2)[\kappa I_1(\kappa a_2) + \gamma_2 I_0(\kappa a_2)]}{I_1(\kappa a_0)[\kappa K_1(\kappa a_2) - \gamma_2 K_0(\kappa a_2)] - K_1(\kappa a_0)[\kappa I_1(\kappa a_2) + \gamma_2 I_0(\kappa a_2)]},$$

а вирази для $\Delta_1(a_1, \xi)$, $\Delta_2(a_1, \xi)$ і $\Delta(a_1, \xi)$ наведені в [2].

За наведеними вище формулами обчислюємо контактний тиск і температуру тіл на ділянці контакту і, як наслідок, знаходимо розподіл температури, теплових потоків, напружень і переміщень у складових трибосистеми.

Аналіз результатів. Для ілюстрації обрано графік залежності p_* від величини кутової швидкості обертання ω (зміна якої визначає інтенсивність теплоутворення), для різних значень відношення коефіцієнтів лінійного теплового розширення тіл. Показано існування такого співвідношення між α_1 і α_2 , за якого p_* змінює знак (криві 1, 2 на рис. 2), що свідчить про відрив пластини від циліндра. Тому основним результатом праці є виконане аналітичній формі дослідження явища відшарування пружних тіл за фрикційного теплоутворення.

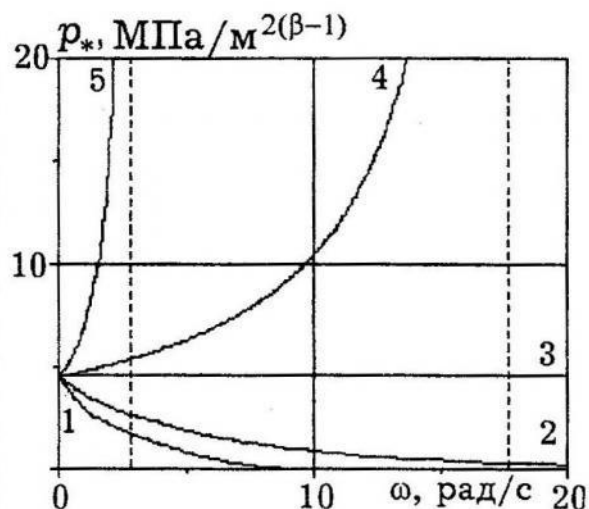


Рис. 2.

1. Арутюнян Н. Х. О контактном взаимодействии упругого кольца с упругим цилиндром // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – № 2. – С. 204–206.
2. Грилицкий Д. В., Краснюк П. П. Термоупругий контакт двух цилиндров с нестационарным фрикционным теплообразованием // Прикладная механика и техническая физика. – 1997. – 38, № 3. – С. 112–121.

Peter Krasnyuk

THERMOELASTIC CONTACT INTERACTION BETWEEN THE RING AND THE CYLINDER UNDER THE FRICTIONAL HEAT GENERATION

In the present paper the static thermoelastic contact problem of embracing of the hollow cylinder by a round ring slice of finite length which is put on it without stretch, when their interaction is accompanied by stationary frictional heat generation, is investigated.

Стаття надійшла до редколегії 25.06.99

Роман Кульчицький-Жигайло

Львівський національний університет ім. І. Франка

**КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛОУТВОРЕННЯ
ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ**

1. Постановка задачі. Розглядається контактна задача термопружності про взаємодію жорсткої теплопровідної основи (півпростору) з пружним тілом, поверхня якого має форму еліптичного параболоїда. Тіло притискається до півпростору силою P і рухається вздовж його поверхні зі швидкістю V . Властивості матеріалу тіла описують такими співвідношеннями

$$\sigma_{11} = A_1 w_{1,1} + A_2 w_{2,2} + A_3 w_{3,3} - \beta_1 T, \quad (1)$$

$$\sigma_{22} = A_2 w_{1,1} + A_1 w_{2,2} + A_3 w_{3,3} - \beta_1 T, \quad (2)$$

$$\sigma_{33} = A_3 w_{1,1} + A_3 w_{2,2} + A_4 w_{3,3} - \beta_3 T, \quad (3)$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}(A_1 - A_2)(w_{1,2} + w_{2,1}), \quad (4)$$

$$\sigma_{13} = A_5(w_{1,3} + w_{3,1}), \quad \sigma_{23} = A_5(w_{2,3} + w_{3,2}), \quad (5)$$

де w_i – компоненти вектора пружного переміщення; σ_{ij} – складові тензора напруження; A_i , β_i – фізико-механічні властивості матеріалу.

Під час ковзання внаслідок дії сил тертя утворюється тепло, яке витрачається на нагрівання рухомого тіла та виникнення в ньому термічних напружень і деформацій. Поза ділянкою контакту поверхня тіла вільна від навантаження і теплоізолювана. Вважаємо, що інтенсивність теплоутворення дорівнює потужності сил тепла:

$$q = fVp, \quad (6)$$

де q – тепловий потік через поверхню тіла; p – контактний тиск; f – коефіцієнт тертя.

За цих припущень розподіли температури, переміщень і напружень одержимо, розв'язавши задачу математичної фізики:

рівняння рівноваги:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0, \quad (8)$$

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} = 0; \quad (9)$$

рівняння теплопровідності:

$$T_{,11} + T_{,22} + K^2 T_{,33} = 0; \quad (10)$$

рівняння стану (1)–(5);

крайові умови на поверхні півпростору $z = 0$:

$$w_3 = h - x^2/2R_1 - y^2/2R_2, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (11)$$

$$\sigma_{33} = -p(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad \sigma_{33} = 0, \quad (x, y) \notin \Omega, \quad (12)$$

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad (13)$$

$$q = -K_3 T_{,3} = fVp(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad q = 0, \quad (x, y) \notin \Omega; \quad (14)$$

умова рівноваги тіла:

$$\iint_{\Omega} p(x, y) dx dy = P, \quad (15)$$

де R_1, R_2 – головні радіуси кривини у вершині тіла; h – невідоме вертикальне переміщення тіла.

2. Метод розв'язування. Розв'язок задачі теплопровідності, одержаний за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є, в області трансформант має вигляд

$$\bar{T}(\xi, \eta, z) = T_0(\xi, \eta) \exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} z/K\right), \quad (16)$$

де

$$T_0(\xi, \eta) = \frac{fVK}{K_3} \frac{\bar{p}(\xi, \eta)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \bar{p}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) e^{-ix\xi - iy\eta} dx dy. \quad (17)$$

Розв'язок задачі термопружності подаємо у вигляді суперпозиції двох розв'язків:

$$w_i = w_i^e + w_i^{th}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^{th}, \quad (18)$$

де w_i^e, σ_{ij}^e – розв'язок відповідної ізотермічної задачі з відомим розподілом контактного тиску $p(x, y)$; $w_i^{th}, \sigma_{ij}^{th}$ – розв'язок задачі термопружності про нагрівання вільної від навантаження поверхні тіла тепловим потоком $q(x, y)$ (6).

Пружну складову вектора переміщень w^e шукаємо у вигляді

$$w_1^e = \Phi_{1,1} + \Phi_{2,1}, \quad w_2^e = \Phi_{1,2} + \Phi_{2,2}, \quad w_3^e = \lambda_1 \Phi_{1,3} + \lambda_2 \Phi_{2,3}, \quad (19)$$

де $\lambda_i = \frac{\gamma_i^2 A_1 - A_5}{A_1 + A_5}$, γ_i є коренями характеристичного рівняння

$$A_1 A_5 \gamma^4 + (A_3^2 + 2A_3 A_5 - A_1 A_4) \gamma^2 + A_4 A_5 = 0, \quad (20)$$

а функції Φ_i є розв'язками диференціальних рівнянь

$$\Phi_{i,11} + \Phi_{i,22} + \gamma_i^2 \Phi_{i,33} = 0. \quad (21)$$

Знайшовши за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є невідомі функції Φ_i , для пружної складової вертикального переміщення поверхні тіла одержимо співвідношення

$$\bar{w}_3^e(\xi, \eta, 0) = W_p \frac{\bar{p}(\xi, \eta)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad W_p = \frac{A_1(\gamma_1 + \gamma_2)}{A_1 A_4 - A_3^2}. \quad (22)$$

Зазначимо, що під час знаходження виразів (22), було закладено припущення $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Однак відповідні вирази для випадку $\gamma_1 = \gamma_2$ можна отримати з (22), підставляючи $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_0$.

Частинний розв'язок рівнянь термопружності (1)–(5), (7)–(9) шукаємо у вигляді

$$w_1^{\text{th}} = \Psi_{,1}, \quad w_2^{\text{th}} = \Psi_{,2}, \quad w_3^{\text{th}} = \mu \Psi_{,3}. \quad (23)$$

Несуперечливі рівняння одержуємо у випадку

$$\mu = \frac{\beta_1 K^2 (A_3 + A_5) + \beta_3 (A_5 - A_1 K^2)}{\beta_1 (A_4 - K^2 A_5) - \beta_3 (A_3 + A_5)}.$$

Термопружну складову вектора переміщень $\mathbf{w}^{\text{th}}$ отримуємо внаслідок додавання до переміщень (23) загального розв'язку однорідних рівнянь (1)–(5), (7)–(9) і задоволення умов ненавантаженості поверхні тіла.

В результаті термопружну складову вертикального переміщення поверхні тіла знаходимо у вигляді

$$\bar{w}_3^{\text{th}} = W_t \frac{\bar{p}(\xi, \eta)}{\xi^2 + \eta^2}, \quad W_t = \frac{K^2 (U_2 - U_1 U) fV}{[A_1 A_5 K^4 + (A_3^2 + 2A_3 A_5 - A_1 A_4) K^2 + A_4 A_5] K_3}, \quad (24)$$

де

$$U_1 = \beta_1 (A_4 + A_3 K^2) - \beta_3 (A_1 K^2 + A_3),$$

$$U_2 = \beta_1 K^2 (A_3 + A_5) + \beta_3 (A_5 - A_1 K^2),$$

$$U = \frac{A_5 (A_1 K (\gamma_1 + \gamma_2) + A_3 - \sqrt{A_1 A_4})}{A_1 A_4 - A_3^2}.$$

Зазначимо, що формулами (24) можна безпосередньо користуватись, якщо K не є коренем характеристичного рівняння (20). Інакше у цих формулах треба спочатку зробити граничний перехід при $K \rightarrow \gamma_1$ чи $K \rightarrow \gamma_2$.

Порівнюючи залежності (22), (24) з відповідними залежностями для ізотропного тіла, доходимо висновку, що вони відрізняються між собою лише коефіцієнтами. Це означає, що розв'язок контактної задачі для тіл з розглянутих вище матеріалів зберігає всі характерні властивості розв'язку, побудованого для випадку однорідного ізотропного тіла, зокрема, існує гранична ділянка контакту у формі круга з радіусом [4]:

$$a_{kr} = 2/g, \quad g = W_t/W_p, \quad (25)$$

що досягається в разі необмеженого збільшення притискної сили.

Працю виконано в рамках проекту № 7 T07C 006 12, що фінансується Комітетом Наукових Досліджень Польщі.

1. Barber J. R. Thermoelastic contact of a rotating sphere and a half-space // Wear. – 1975. – 35, No. 2. – P. 283–289.
2. Barber J. R. Some thermoelastic contact problems involving frictional heating // Q. J. Mech. Appl. – 1976. – 29. – P. 1–13.
3. Yevtushenko A. A., Kulchytsky-Zhyhailo R. D. Two axi-symmetrical contact problems with the steady-state frictional heating // J. Theoret. Appl. Mech. – 1996. – 34. – P. 767–779.
4. Yevtushenko A. A., Kulchytsky-Zhyhailo R. D. Approximate solution of the thermoelastic contact problem with frictional heating in the general case of the profile shape // J. Mech. Phys. Solids. – 1996. – 44, No. 2. – P. 243–250.

Roman Kulchytsky-Zhyhailo

CONTACT PROBLEMS WITH HEAT GENERATION FOR NONHOMOGENEOUS BODIES

The purpose of the paper is to present some potential function method for solving three-dimensional thermoelastic contact problems for the bodies of nonhomogeneous materials with heat generation. The problem is reduced to three equations of Laplace's type.

Стаття надійшла до редколегії 14.09.99

Ryszard Kaczyński, Jerzy Trzcinski*Institute of Hydrogeology and Engineering Geology,
University of Warsaw***MICROSTRUCTURAL NONHOMOGENEITY OF GLACIAL TILLS**

1. Introduction. In engineering geology, geotechnics or when dealing with practical problems, theoretical physical or mathematical models are applied. Physical parameters used in these models which characterize soil and its reaction to loading are statistical variables [2, 4]. Hence the parameters of soils should be described by statistical methods – as determined values taking into consideration:

- the measure of general tendency (i.e. arithmetical mean $\bar{x}$),
- the measure of variability (i.e. coefficient of variation v),
- standard deviation σ ,
- areas of changeability $R = X_{\max} - X_{\min}$.

The variability of properties changes and depends on the definition of the considered parameter, accuracy of its determination, as well as is conditioned by method of research (the analysis of errors is omitted).

The properties of soil, and therefore of the soil basement depend on the microstructural parameters of pore space. Their microstructural nonhomogeneity on the example of tills is for the first time presented below.

2. Geological setting and lithogenetic features of glacial tills. Glacial tills are a typical result of glacial sedimentation. They include lodgement, melt-out and flow tills. They are composed of heterogeneous material and their composition depends on rocks transported by the glacier from distant and nearby areas as well as rocks taken from the glacial base. Glacial tills represent generally unsorted sediments with various contents of particular granulometric fractions (gravel, sand, silt and clay). Tills contain quartz grains of different size as well as grains of various rocks: gneiss, granite, quartzite, limestone. The sediment matrix comprises a mixture of fine grains of calcite and particles of clay minerals (illite or montmorillonite).

In macroscopic sense tills represent nonhomogenous soils [3, 8, 9]. Microstructural tests were carried out on till samples taken from 83 places located in the area of Poland (fig. 1). The till samples represent different glaciations, the depth of sampling usually reached 1.5 – 5.0m below surface. The investigated tills contain:

- 5 – 45% of clay fraction ($< 2\mu\text{m}$),
- 5 – 70% of silt fraction ($2 - 500 \mu\text{m}$),
- 35 – 80% of sand fraction ($500 - 2000 \mu\text{m}$).

3. Microstructures of glacial tills. According to the carried out analyses (fig. 2), the investigated tills possess usually three types of known microstructures [7, 8]: skeletal, matrix, and matrix-turbulent by classification [1]. The

matrix microstructure is the most common. On the basis of structural element packing the following three sub-types have been distinguished [8]:

- A - till with loosely packed matrix microstructure,
- B - till with medium packed matrix microstructure,
- C - till with tightly packed matrix microstructure.

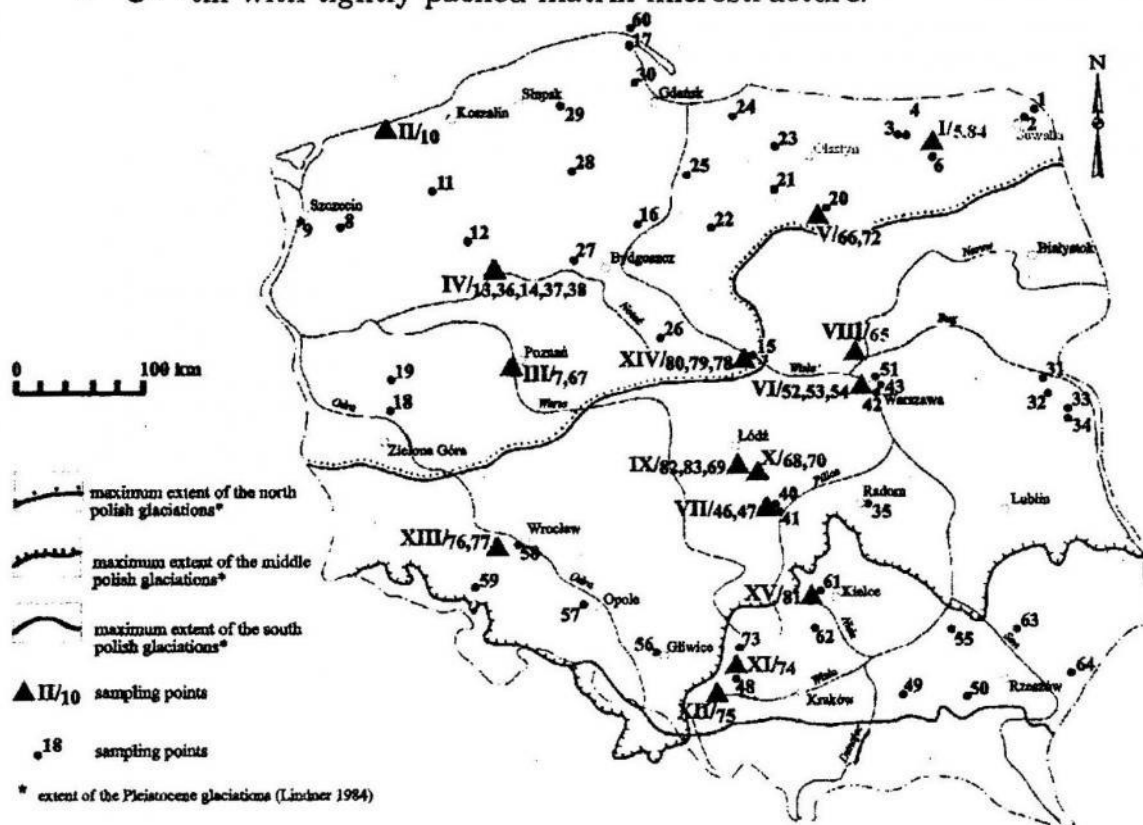


Fig. 1. Location of sampling points.

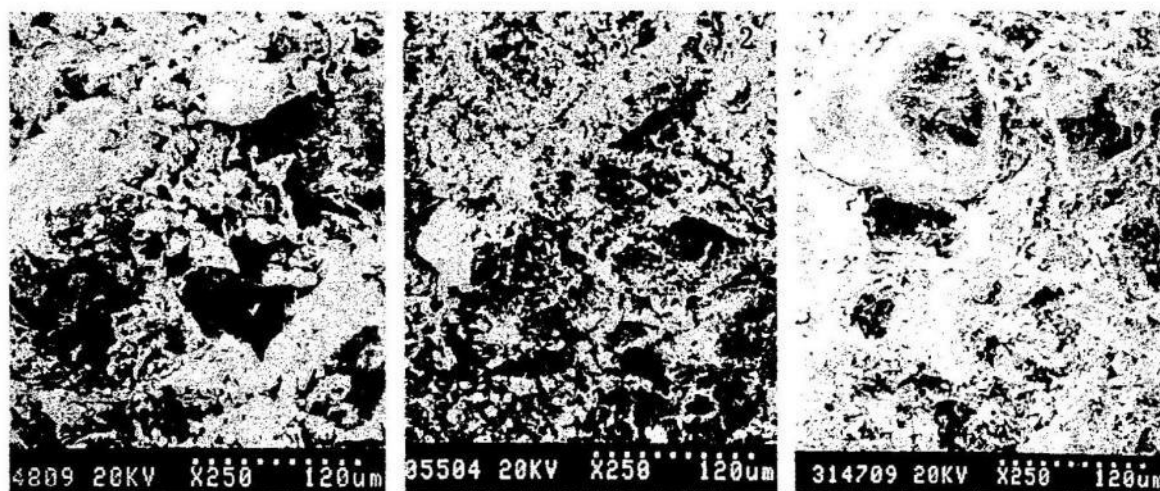


Fig. 2. Examples of: skeletal microstructure (1), matrix microstructure (2) and matrix-turbulent microstructure (3) in glacial tills.

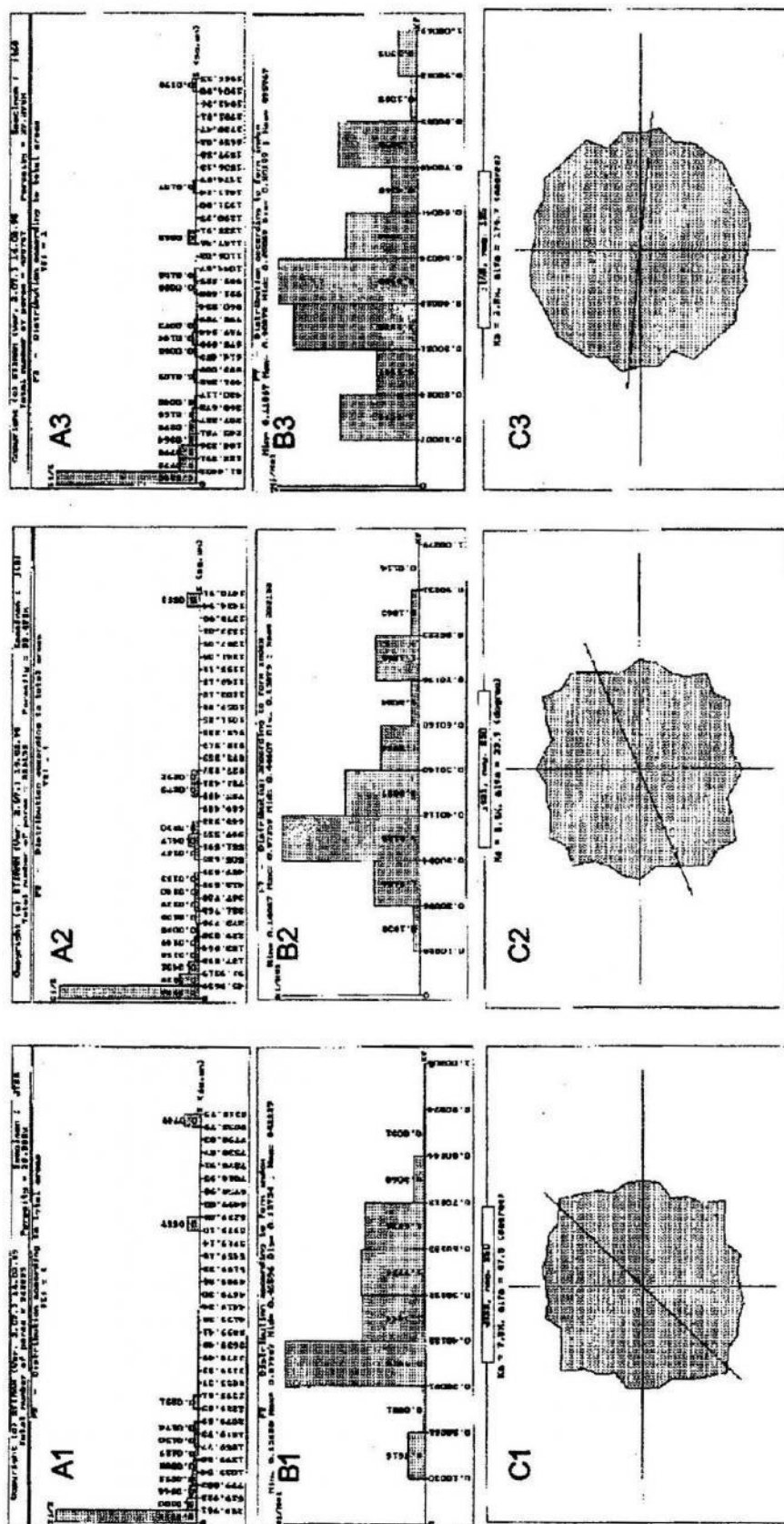


Fig. 3 Examples of: distribution according to total area (A), distribution according to form index (B), rose diagram (C).

1 - skeletal microstructure, 2 - matrix microstructure, 3 - matrix-turbulent microstructure.

4. Microstructural parameters of pore space. Quantitative and qualitative microstructural investigations of glacial tills were carried out with the use of Stiman software (v. 2.07) connected to a SEM. The software based on Fourier and Walsh analysis was developed by [6] from the Moscow State University. Results of the analysis enabled to determine microstructural parameters of pore space in the tested soils (tab., fig. 3): porosity, number of pores, total area of pores, total perimeter of pores, average area of pores, average perimeter of pores, average diameter of pores. Evaluation of the degree of image intensity enabled to determine the degree of structural elements orientation – the quantitative parameter: anisotropy index of microstructure.

The microstructural parameters of glacial tills

Type/sub-type of microstructure	Skeletal		Matrix		Matrix						Matrix-turbulent		Micro-structures (All types)	
					sub-type A		sub-type B		sub-type C					
Parameters of microstructure	$\bar{X}$	v	$\bar{X}$	v	$\bar{X}$	v	$\bar{X}$	v	$\bar{X}$	v	$\bar{X}$	v	$\bar{X}$	v
Porosity $n \%$	38.0	9	33.9	19	38.5	10	34.1	16	27.6	19	29.6	8	34.3	19
Number of pores $N \times 10^3$	354	102	177	99	192	82	211	97	195	47	501	93	214	110
Average diameter of pores $D_{av} \mu m$	2.43	128	1.02	126	0.91	138	1.12	105	0.88	131	1.05	99	1.19	134
Total area of pores $S_t \times 10^3 \mu m^2$	882	90	619	186	316	236	1115	127	391	205	395	83	640	173
Average area of pores $S_{av} \mu m^2$	34.4	153	7.6	251	7.8	221	7.0	193	5.6	254	3.5	114	10.7	241
Total perimeter of pores $P_t \times 10^3 \mu m$	1263	63	923	168	584	152	1494	119	903	164	1211	27	978	151
Average perimeter of pores $P_{av} \mu m$	17.1	127	7.5	123	6.9	142	7.8	103	6.6	123	7.8	100	8.6	133
Average form index of pores $K_{fav} \times 10^{-1}$	4.73	11	4.86	12	5.12	10	4.97	12	4.47	11	4.81	8	4.82	12
Anisotropy index of microstructure $K_a \%$	10.6	52	10.3	59	10.0	37	9.1	51	10.5	74	10.6	67	10.4	58
Dominant orientation direction of pores α°	98	37	75	53	80	46	80	53	71	49	90	63	78	51

$\bar{X}$ – arithmetic average, v – coefficient of variation, number of samples – 83.

The quantitative analysis of microstructural parameters reveals that (table):

- tills with C sub-type matrix microstructure have the smallest porosity. The smallest mean diameter of pores, mean area of pores and mean perimeter of pores for these tills also reach the lowest values. For tills with B and A sub-type matrix microstructure the values of these parameters increase, reaching the highest values for tills with skeletal microstructure,
- the form index of pores reaches highest values for A sub-type matrix tills, and the lowest for sub-type C. The values of this index in tills with the

- matrix-turbulent microstructure increases in comparison to these values for tills the C sub-type matrix microstructure,
- the anisotropy index of microstructure does not vary in the analysed tills.

5. Microstructural nonhomogeneity. Tab. 1 presents the results of investigations for glacial tills, occurring within the depths of 1.5-5.0m, taken from 83 places in the area covered by sediments of the North Polish, Middle Polish and South Polish glaciations.

Parameters describing the pore space of tills, regardless of type and sub-type of microstructure, reveal a large heterogeneity. The coefficient of variation usually exceed 100%, sometimes even 200%. Microstructure treated as a whole is characterised by the largest nonhomogeneity. Division into types and sub-types decreases values of the coefficients of variation. However, for some types or sub-types the parameters have a larger heterogeneity than tills treated as a whole. In comparison to tills with skeletal and matrix-turbulent microstructures, tills with matrix microstructure have the largest nonhomogeneity. Within the matrix microstructure, sub-types A, B and C generally have a smaller nonhomogeneity, but sometimes (< 50% cases) sub-types A and C have a higher value of variability than the matrix microstructure treated as a whole.

6. Conclusions. The carried out microstructural investigations and their analysis reveal that:

1. microstructural nonhomogeneity of tills is generally large, the coefficient of variation usually exceeds 100%, sometimes even 200%,
2. the coefficient of variation of pore space parameters for the distinguished types and sub-types of microstructures is smaller than the variability for the microstructure treated as a whole,
3. occasionally in some types (matrix) and sub-types (A, C) of till microstructures, some parameters (< 50%) reveal a larger variability than that for all types and subtypes.

-
1. Grabowska-Olszewska B., Osipov V., Sokolov V. Atlas of the microstructure of clay soils. -Warszawa: PWN, 1984.
 2. Frankowski Z., Kaczyński R., Bogucki A., Voloshyn P. Nonhomogeneity of the physical-mechanical properties of soil medium composed of Tertiary clays and Quaternary loesses // J. of Theoretical and Applied Mechanics. - 1998. - 3, No. 36. - P. 581-595.
 3. Kaczyński R., Trzcinski J. The physical-mechanical and structural properties of boulder clays of the Vistula Glaciation in the area of Poland // Geological Quarterly. - 1992. - 36, No. 4. - P. 481-508.
 4. Kaczyński R. Geological nonhomogeneity of the subgrade // Matematyczne Metody i Fizykomechaniczne Polya. - 1996. - No. 36. - P. 1-8.
 5. Lindner L. An outline of Pleistocene chronostratigraphy in Poland // Acta Geologica Polonica. - 1984. - 34, No. 1-2. - P. 27-49.

6. Osipov V. I., Sokolov V. N., Rumjanceva N. A. Mikrostruktura glinistych porod. – M.: Nedra, 1989.
7. Sokolov V. N. Engineering-geological classification of clay microstructures // Proc. 6th Inter. IAEG Congress. – 1990. – No. 1. – P. 753–760.
8. Trzciński J. Qualitative and quantitative analysis of microstructures in Polish glacial tills with respect to their age // Geological Quarterly. – 1995. – 39, No. 3. – P. 403–422.
9. Trzciński J. The microstructures and geological-engineering properties of glacial tills. Ph. D. thesis. Faculty of Geology, Warsaw University, 1999. – Vol 1, 2. – P. 371. (In Polish).

Ричард Качинський, Єжи Трцінський

**МІКРОСТРУКТУРАЛЬНА НЕОДНОРІДНІСТЬ ЛЬОДОВИКОВИХ ҐРУНТІВ
(ВАЛУНОВИХ ГЛИН)**

Досліджено мікроструктуральну неоднорідність льодовикових глин. Аналіз неоднорідності обмежувався дослідженням значення коефіцієнта змінності. Аналіз виконано для декількох параметрів поруваного простору, а саме: поруваності, кількості та діаметра пор. Проаналізовано значення цих параметрів для всіх типів мікроструктур загалом і для певних типів (скелетний, матрицевий, матрицево-турбулентний), а також у межах матрицевої мікроструктури для її підтипів А, В і С. Мікроструктуральна неоднорідність досліджуваних глин значна. Часто коефіцієнт змінності перевищує 100%, а інколи навіть 200%. Переважно значення коефіцієнта змінності зменшується в межах виділених типів чи підтипів. Іноді спостерігаємо, що в типах (матричні) і підтипах (А, С) деякі параметри (< 50%) характеризуються більшою змінністю, ніж мікроструктуральна змінність, описувана загалом.

Стаття надійшла до редколегії 14.09.99

Jerzy Trzciński, Ryszard Kaczyński*Institute of Hydrogeology and Engineering Geology,
University of Warsaw***NONHOMOGENEITY OF THE PHYSICAL PROPERTIES
OF GLACIAL TILLS**

1. Introduction. Soils usually represent nonhomogenic material due to variable environment of their origin and later post-sedimentation changes. Particularly high variability of sedimentation environments occurs during the origin of glacial tills. Therefore parameters of these soils are characterised by a high variability of values. Analysis of parameters variability has a crucial meaning in engineering geology and geotechnics, because tills commonly cover the surface of Poland. They are also frequently the soil basis for engineering objects.

Analysis of variability is presented for chosen physical parameters of tills within types and sub-types of microstructures. The variability of these parameters is characterised by a statistical parameter – the coefficient of variation. Values of arithmetic means of the parameters are also presented.

2. Lithogenesis and microstructures of tills. Geological conditions of the origin and occurrence of tills, as well as their microstructures are presented by [2].

3. Physical characteristics of tills. The physical characteristics of tills from 83 sampling sites have been subject to investigations [1, 3]. The location of these sampling sites is presented on fig. 1 in [2]. Several physical parameters have been determined: water content, bulk density, porosity, free swell and soaking. These parameters largely depend on the soil microstructure [3]. The analysis of the parameter values were carried out 1) for each microstructure type occurring in tills (skeletal, matrix and matrix-turbulent), 2) for three sub-types (A, B, and C) of the matrix microstructure, and 3) for the microstructure types treated as a whole.

The analysis of physical properties of tills reveals that (tab.):

1. the water content reaches similar values for tills with different types of microstructures. This parameter decreases in tills with the matrix microstructure from sub-type A to sub-type C,
2. the bulk density reaches the smallest values in tills with the skeletal microstructure. The values of this parameter increase for tills with the matrix microstructure, and are the highest in tills with matrix-turbulent microstructure. In tills with the matrix microstructure the bulk density increases from sub-type A to sub-type C,
3. porosity is the highest in tills with the skeletal microstructure, decreases in tills with the matrix microstructure, and is the lowest in tills with the

- matrix-turbulent microstructure. In tills with the matrix microstructure the value of this parameter decreases from sub-type A to sub-type C,
- tills with the skeletal microstructure soak to the largest degree and in the shortest period of time. Tills with matrix microstructure sub-type A soak more intensely and faster than tills with the matrix microstructure sub-type C. For tills with air dry humidity the obtained relations are similar, and soaking processes take place in shorter periods of time and to a larger degree.

The physical properties of glacial tills

Type/sub-type of microstructure	Skeletal		Matrix		Matrix						Matrix-turbulent		Micro-structures (All types)	
					sub-type A		sub-type B		sub-type C					
Properties of glacial tills	$\bar{X}$	v	$\bar{X}$	v	$\bar{X}$	v	$\bar{X}$	v	$\bar{X}$	v	$\bar{X}$	v	$\bar{X}$	v
Water content w %	13.5	39	13.3	27	14.6	27	13.6	23	10.9	20	13.4	10	13.3	27
Bulk density ρ Mg/m ³	1.90	5	2.01	6	19.4	6	2.00	5	2.15	4	2.14	1	2.01	6
Dry density ρ_d Mg/m ³	1.68	6	1.78	8	1.70	8	1.75	6	1.94	6	1.88	1	1.77	8
Porosity n %	38.0	14	33.6	17	36.4	16	34.5	14	27.8	15	29.3	10	33.9	17
Void ratio e	0.62	16	0.52	27	0.58	24	0.53	23	0.41	29	0.42	12	0.53	26
Free swell FS %	0.6	83	1.6	144	2.2	127	1.2	117	1.5	193	0.2	100	1.4	150
Final water content of free swell w_f %	24.3	22	21.6	24	24.2	22	21.5	22	18.9	23	17.6	13	21.8	24
Soaking (with water content) SO_w %	81	27	73	45	77	36	76	42	61	62	36	125	72	46
Time of soaking (with water content) h	12.2	101	15.5	69	16.8	61	13.5	81	18.3	54	21	29	15.2	71
Soaking (air dry soil) SO_d %	98	6	91	22	97	8	93	16	78	41	56	71	91	23
Time of soaking (air dry soil) h	2.6	288	5.9	164	4.1	214	4.8	185	10.8	104	18.2	63	6.0	163

$\bar{X}$ - arithmetic average, v - coefficient of variation, number of samples - 83.

4. Variability of physical properties of tills. Physical parameters of tills present a high nonhomogeneity (tab. 1). The coefficient of variation exceeds sometimes 100%, sporadically even 200%. Nevertheless, for over half (50%) of the investigated parameters, this coefficient does not exceed 25%, and is the lowest for the bulk density.

Typically, nonhomogeneity of physical parameters is the highest for all the microstructures treated as a whole, and decreases for the particular types. A similar relation can be observed for the matrix microstructure treated as a whole. For this microstructure treated as a whole the variability is higher than the variability within the particular sub-types A, B and C.

5. Conclusions. The carried out analysis of physical parameters variability reveals that:

1. the nonhomogeneity of physical properties of tills is often considerably high and may reach 100%; in some cases exceeds 200%,
2. for over half (50%) of the investigated parameters the nonhomogeneity does not exceed 25%,
3. the values of the coefficient of variation for particular types of microstructures are smaller from values of this coefficient for the microstructure treated as a whole. A similar relation exists in the matrix microstructure treated as a whole and its sub-types,
4. the nonhomogeneity of microstructure parameters of tills is usually higher from nonhomogeneity of physical parameters of these soils (see [2]).

1. Kaczyński R., Trzciński J. The physical-mechanical and structural properties of boulder clays of the Vistula Glaciation in the area of Poland // Geological Quarterly. – 1992. – 36, No. 4. – P. 481–508.
2. Kaczyński R., Trzciński J. Microstructural nonhomogeneity of glacial tills // Visnyk Lviv Univ. Ser. mech.-math. – 1999. – No. 55. – P. 152–157.
3. Trzciński J. The microstructures and geological-engineering properties of glacial tills // Ph. D. thesis. Faculty of Geology. – Warsaw University, 1999. – Vol. 1, 2, No. 2. – P. 371. (In Polish).

Єжи Трцінський, Ричард Качинський

НЕОДНОРІДНІСТЬ ФІЗИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЛЬОДОВИКОВИХ ҐРУНТІВ (ВАЛУНОВИХ ГЛИН)

Обрані фізичні параметри льодовикових глин у межах типів/підтипів мікроструктур проаналізовано щодо змінності. Змінність параметрів характеризується коефіцієнтом змінності. Дослідженнями фізичних властивостей охоплено льодовикові глини з 83 місць. Вивчали такі фізичні параметри: вологість, об'ємна густина, поруватість, розмокання. Зазначені параметри суттєво залежать від мікроструктури глини. Для глин з матрицевою мікроструктурою підтипів від А до С вологість і поруватість зменшуються, а об'ємна густина збільшується. Глини з матрицевою мікроструктурою підтипу А розмокають більше і за короткий час порівняно з відповідними глинами підтипу С. З проведеного аналізу змінності фізичних властивостей випливає, що 1) величина неоднорідності фізичних властивостей льодовикових глин може бути значною і часом сягати 100%; 2) для понад половини (50%) досліджуваних параметрів величина неоднорідності не перевищує 25%; 3) значення коефіцієнта змінності фізичних властивостей для окремих типів мікроструктур є меншим від значення цього коефіцієнта для всіх досліджуваних типів мікроструктур, узятих разом.

Стаття надійшла до редколегії 14.09.99

Григорій Кіт, Богдан Монастирський

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Львівський національний університет ім. І. Франка

**ПРО ТЕРМОПРУЖНИЙ КОНТАКТ ДВОХ ПІВПРОСТОРІВ
З ОДНАКОВИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА НАЯВНОСТІ
ПОВЕРХНЕВОГО ДЕФЕКТУ**

Розв'язуючи термопружні контактні задачі для тіл з поверхневими дефектами порівняно з задачами про суто механічну взаємодію, треба зважати на те, що породжені поверхневими недосконалостями міжконтактні зазори, крім збурення механічних полів, спричиняють ще й збурення температури, яке зумовлює появу додаткових термічних напружень і переміщень. З огляду на це задача термопружності є складнішою, ніж задача пружності.

Однак можливі такі часткові випадки, коли розв'язок контактної термопружної задачі еквівалентний розв'язку пружної задачі в тому сенсі, що контактні параметри взаємодії тіл однакові. У цій праці розглянемо такий приклад.

Розглянемо два пружних півпростори з однаковими термопружними характеристиками. Нехай один із них має осесиметричну пологу заглибину малої висоти, форма якої описується функцією $f(r)$. Нехай тіла контактують під дією рівномірно розподіленого тиску p , прикладеного до них на нескінченності. Крім того, на нескінченності заданий тепловий потік q , перпендикулярний до площини контакту.

Використовуватимемо циліндричну систему координат. Введемо її так, щоб вісь Oz лежала в площині контакту, а вісь Oz збігалася з віссю симетрії початкової заглибини.

Внаслідок наявності поверхневої заглибини між тілами на круговій ділянці деякого радіуса a буде міжконтактний зазор. Вважаємо, що береги зазору вільні від напружень і термоізолювані, а поза зазором виконуються умови ідеального теплового і безфрикційного механічного контакту.

Розв'язок задачі подамо у вигляді суми двох доданків: перший відповідає основному термонапруженому стану, що виникає в тілах з плоскими поверхнями при заданих умовах на нескінченності, другий відповідає збуренням, що зумовлені рельєфом поверхні та наявністю зазору.

Оминаючи тривіальні викладки для знаходження першого доданку, відразу випишемо граничні умови для збурень:

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial T^{(i)}}{\partial z} &= 0, \quad 0 < r < a, \\ -k \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} &= -k \frac{\partial T^{(2)}}{\partial z}, \quad T^{(1)} = T^{(2)}, \quad a < r < \infty, \end{aligned} \quad (1,a)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zr}^{(i)} &= 0, & 0 < r < \infty, \\
\sigma_{zz}^{(i)} &= 0, & 0 < r < a, \\
\sigma_{zz}^{(1)} &= \sigma_{zz}^{(2)}, \quad u_z^{(1)} + f(r) = u_z^{(2)}, & a < r < \infty.
\end{aligned} \tag{1,6}$$

Розглянемо спочатку задачу теплопровідності. Зауважимо, що постановка цієї задачі є такою самою, як і у випадку безмежного тіла з круговою тріщиною. З огляду на це, використовуючи результат праці [3], можна легко одержати розв'язок нашої задачі. Ми не виписуватимемо його, а лише зауважимо одну його властивість:

$$T^{(1)}(r,0) = -T^{(2)}(r,0), \quad 0 < r < a. \tag{2}$$

Розв'язуючи задачу термопружності, використаємо [1] подання напружень і переміщень у півпросторі, поверхня якого вільна від зсувних зусиль. На поверхні контакту нормальні напруження і переміщення мають вигляд

$$\begin{aligned}
u_z^{(i)}(r,0) &= \frac{1-\nu}{\mu} \int_0^\infty A^{(i)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda, \\
\sigma_{zz}^{(i)}(r,0) &= (-1)^{i+1} \int_0^\infty \lambda A^{(i)}(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda - \frac{\mu(1+\nu)\alpha}{1-\nu} T^{(i)}(r,0),
\end{aligned} \tag{3}$$

де μ , ν , α – відповідно модуль зсуву, коефіцієнт Пуассона, коефіцієнт лінійного теплового розширення; $J_0(r)$ – функція Бесселя першого роду.

Введемо до розгляду нові функції за формулами

$$\begin{aligned}
h(r) &= u_z^{(2)}(r,0) - f(r) - u_z^{(1)}(r,0), \\
[T](r) &= T^{(2)}(r,0) - T^{(1)}(r,0).
\end{aligned} \tag{4}$$

Функція $h(r)$ описує висоту зазору, $[T](r)$ – стрибок температури на зазорі.

Виразимо нормальні напруження на поверхні контакту в термінах функцій $h(r)$ і $[T](r)$. Для цього нам треба вилучити функції $A^{(1)}$, $A^{(2)}$. Це неважко зробити, якщо врахувати означення функцій $h(r)$ і $[T](r)$, умову $\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}$, $0 < r < \infty$ (вона впливає з граничних умов (1)) і подання (3).

Після нескладних обчислень одержимо

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{(1)}(r,0) &= \frac{\mu}{1-\nu} \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda^2 \int_0^\infty h(\rho) \rho J_0(\lambda \rho) d\rho J_0(\lambda r) d\lambda + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda^2 \int_0^\infty f(\rho) \rho J_0(\lambda \rho) d\rho J_0(\lambda r) d\lambda + (1+\nu) \alpha \left(\frac{[T](r)}{2} + T^{(1)}(r,0) \right) \right)
\end{aligned} \tag{5}$$

Підставивши вираз (5) у граничні умови (1), матимемо рівняння для визначення висоти зазору $h(r)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda^2 \int_0^\infty h(\rho) \rho J_0(\lambda \rho) d\rho J_0(\lambda r) d\lambda + (1 + \nu) \alpha \left(\frac{[T](r)}{2} + T^{(1)}(r, 0) \right) = \\ = \frac{(1 - \nu)p}{\mu} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \lambda^2 \int_0^\infty f(\rho) \rho J_0(\lambda \rho) d\rho J_0(\lambda r) d\lambda. \end{aligned} \quad (6)$$

Тепер візьмемо до уваги умову (2) та означення функції $[T](r)$. Легко бачити, що температурні члени в співвідношеннях (5), (6) стають нульовими. Це означає, що контактні напруження $\sigma_{zz}(r)$ і висота зазору $h(r)$ не залежать від температурного поля, а визначаються лише прикладеними зусиллями на нескінченності та рельєфом поверхні.

Отже, контактні параметри взаємодії тіл інваріантні стосовно теплового потоку, і їх можна визначити, розв'язавши відповідну контактну задачу теорії пружності ($q = 0$). Методика її розв'язання описана в [2], тому не обговорюватимемо її; нашою метою було лише показати, що у розглядуваному випадку задача термопружності еквівалентна задачі пружності в сенсі рівності контактних параметрів.

1. Бородачев Н. М. О решении задачи теории термоупругости в случае осевой симметрии // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. - 1962. - № 5. - С. 86.
2. Kit Г. С., Монастирський Б. Є. Контактна задача для півпростору та жорсткої основи з осесиметричною виїмкою // Мат. методи і фіз.-мех. поля. - 1998. - 41, № 4. - С. 7-11.
3. Кит Г. С., Побережный О. В. О напряженном состоянии нагреваемого материала, имеющего внутренние дефекты типа трещин // Фізико-хімічна механіка матеріалів. - 1969. - 5, № 3. - С. 345-350.
4. Kit H. S., Monastyrskyy B. Ye. Thermoelastic interaction of two bodies under conditions of local contact absence // Proceedings of the 3rd International Congress on thermal stresses «Thermal Stresses'99», Cracow (Poland). - 1999. - P. 123-126.

Hrygoriy Kit, Bohdan Monastyrskyy

ON THERMOELASTIC INTERACTION OF TWO HALF-SPACES OF THE SAME MATERIALS WITH ALLOWANCE FOR AXISYMMETRIC SURFACE DEFECT

The paper considers the special case of thermoelastic interaction of two semi-infinite bodies, one of which possesses axisymmetric sloping recess. The bodies are subjected to uniform pressure and heat flux at infinity. It is established, that in the case considered the contact parameters – gap height, contact stresses – are indifferent to the temperature distribution and can be found from corresponding elastic problem.

Стаття надійшла до редколегії 17.09.99

Юрій Пир'єв, Роман Мокрик

Львівський національний університет імені І. Франка
Львівський науково-практичний центр (АПН України)

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ТЕРМОПРУЖНОГО КОНТАКТУ ДВОХ ТІЛ

У цій праці прийнята максимально спрощена геометрія контактуючих тіл, щоб уможливити якнайповніше врахування фізики явищ, які відбуваються в контактуючих тілах.

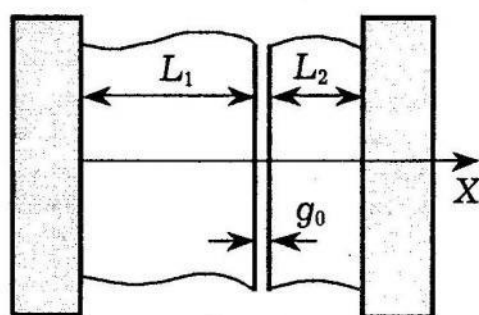


Рис. 1.

Розглядаємо одновимірну модель термопружного контакту двох плоско-паралельних шарів (рис. 1). Два шари ($n = 1, 2$) завтовшки L_n з модулями Юнга E_n , коефіцієнтами Пуассона ν_n , термічного розширення α_n , теплопровідності K_n і температуропровідності k_n розміщені між двома ідеально провідними стінками, температура яких змінюється за законом

$$T_n^w = T_n^o \varphi_n(t) \quad (\varphi_n(t) = 0, t < 0; \varphi_n(\infty) = 1).$$

Перший шар ($n = 1$) закріплений на лівій поверхні, другий ($n = 2$) – на правій. На початку ($t < 0$) має наявний проріз g_0 ($g_0 > 0$) або натяг ($g_0 < 0$).

Вважаємо, що $|g_0/L_n| \ll 1$.

Між контактуючими поверхнями шарів виникає термічний опір R , який можна описати функцією $R_s(g)$ прорізу g чи функцією $R_c(P)$ контактного тиску P [1, 2]. Вважаємо також, що ці функції є монотонно спадними в разі зменшення прорізу та збільшення контактного тиску $R_s(0) = R_c(0)$. Функції термічного опору детально розглянуті у праці [2].

Запропонована конструкція, яка перебуває при $t \in (0, \infty)$ у термічному контакті, може бути при $t \in t_s$ в умовах наявності прорізу $g(t) > 0$ або при $t \in t_c$ в умовах пружного контакту $P(t) > 0$, $t_s \cup t_c = (0, \infty)$. Потрібно визначити температури $T_n(X, t)$ шарів, переміщення $U_n(X, t)$, нормальні напруження $\sigma_{xx}(X, t)$ вздовж осі X і величину прорізу $g(t)$. Задача зводиться до розв'язку крайової задачі теплопровідності:

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} T_n(X, t) = \frac{1}{k_n} \frac{\partial}{\partial t} T_n(X, t); \quad (1)$$

$$K_1 \frac{\partial T_1(L_1, t)}{\partial X} = K_2 \frac{\partial T_1(L_1, t)}{\partial X}, \quad K_1 \frac{\partial T_1(L_1, t)}{\partial X} = \frac{T_2(L_1, t) - T_1(L_1, t)}{R(q)}; \quad (2)$$

$$T_1(0, t) = T_1^w(t), \quad T_2(L_1 + L_2, t) = T_2^w(t), \quad T_n(X, 0) = 0, \quad n = 1, 2; \quad (3)$$

$$R(q) = R_s(q) H(q) + R_c(-P_0 q) H(-q), \quad (4)$$

де $H(\tau) = 0, \tau < 0; H(\tau) = 1, \tau > 0$, $q(t)$ визначається

$$q(t) = g_0 - \tilde{\alpha}_1 \int_0^{L_1} T_1(\xi, t) d\xi - \tilde{\alpha}_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} T_2(\xi, t) d\xi. \quad (5)$$

При $t \in t_s$ правильне $q(t) > 0$, $q(t) = g(t)$, а при $t \in t_c$, виконується $q(t) < 0$, $q(t) = -P(t)P_0^{-1}$,

$$\text{де } P_0 = \left(\frac{L_1}{\tilde{E}_1} + \frac{L_2}{\tilde{E}_2} \right)^{-1}, \quad \tilde{\alpha}_n = \alpha_n \frac{1 + \nu_n}{1 - \nu_n}, \quad \tilde{E}_n = \frac{E_n(1 - \nu_n)}{(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)}.$$

Досліджено стійкість стаціонарних розв'язків крайової задачі. Для цього нестационарний розв'язок подано у вигляді

$$T_n(X, t) = T_n(X) + T_n^*(X, t), \quad q(t) = \hat{q} + q^*(t); \quad (6)$$

$$T_n(X) = \frac{T_n^0 [R(\hat{q}) \pm R_n (L_1 - X) / L_n + R_{3-n}] \mp T_{3-n}^0 R_n (\delta_{n2} (L_1 + L_2) - X) / L_n}{R(\hat{q}) + S}.$$

Тут $\hat{q}$ є розв'язком нелінійного рівняння

$$\hat{q} = Q_\infty + \beta f(\hat{q}), \quad (7)$$

де

$$Q_\infty = g_0 - (\tilde{\alpha}_1 L_1 T_1^0 - \tilde{\alpha}_2 L_2 T_2^0), \quad \beta = \frac{1}{2} \alpha L (T_1^0 - T_2^0),$$

$$\alpha L = \tilde{\alpha}_1 L_1 R_1^s - \tilde{\alpha}_2 L_2 R_2^s, \quad f(\hat{q}) = \frac{1}{R(\hat{q})/S + 1},$$

$$R_n^s = \frac{R_n}{S}, \quad R_n = \frac{L_n}{K_n}, \quad S = R_1 + R_2.$$

Аналіз рівняння (7) виявив, що воно може мати єдиний або неєдиний розв'язок.

Підставляючи вирази (6) в рівняння (1)–(5) і лінеаризуючи граничну умову, одержуємо задачу з лінійними граничними умовами на збурені поля.

За допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часом t знайдений розв'язок задачі на збурені поля. Поведінка цього розв'язку визначається коренями характеристичного рівняння:

$$\Delta(s) = 2\xi \left(\frac{\tilde{\alpha}_1 L_1 R_1^s}{\alpha L} \frac{\operatorname{ch} q_1 L_1 - 1}{(q_1 L_1)^2} \operatorname{ch} q_2 L_2 - \frac{\tilde{\alpha}_2 L_2 R_2^s}{\alpha L} \frac{\operatorname{ch} q_2 L_2 - 1}{(q_2 L_2)^2} \operatorname{ch} q_1 L_1 \right) - \\ - (1 - f) \operatorname{ch} q_1 L_1 \operatorname{ch} q_2 L_2 - f \left(R_1^s \frac{\operatorname{sh} q_1 L_1}{q_1 L_1} \operatorname{ch} q_2 L_2 + R_2^s \frac{\operatorname{sh} q_2 L_2}{q_2 L_2} \operatorname{ch} q_1 L_1 \right) = 0, \quad (8)$$

де $q_n = \sqrt{s/k_n}$, $\xi = \frac{1}{2} \alpha L (T_1^0 - T_2^0) f'(\hat{q})$.

Аналіз коренів характеристичного рівняння (8) засвідчує, що зазвичай $\operatorname{Re}(s_m) < 0$, для $m = 3, 4, \dots$. При $m = 1, 2$ корені залежно від параметрів за-

дачі розміщені у лівій або правій половині комплексної площини s . Характеристичну функцію $\Delta(s)$ можна подати у вигляді

$$\Delta(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j d_j, \quad (9)$$

де $d_0 = 1 - \xi$; коефіцієнти d_j , $j = 1, 2, \dots$ через їхню громіздкість не наводяться.

Подання (9) дає змогу записати корені s_1, s_2 в околі початку координат в аналітичному вигляді, а це дає змогу аналітично знайти наближені області стійкості задачі.

Числовий аналіз задачі проведений для випадку сталого ($\alpha_1 = 14 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $K_1 = 21 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$, $k_1 = 5.9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu_1 = 0.3$, $E_1 = 19 \cdot 10^{10} \text{ Па}$) та мідного ($\alpha_2 = 22 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $K_2 = 173 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}$, $k_2 = 0.672 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu_2 = 0.32$, $E_2 = 7.2 \cdot 10^{10} \text{ Па}$) шарів. Для конкретності розглянемо поведінку коренів для різних співвідношень товщин шарів $L = L_2/L_1$. Показано, що $0 < r_1 < r_2 < r_3 < \infty$,

$$\text{де } r_1 = \sqrt{\frac{k}{\gamma}}, \quad r_2 = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt[4]{\gamma}}, \quad r_3 = \sqrt{k}, \quad \gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad k = \frac{k_2}{k_1}, \quad \gamma_n = \frac{\tilde{\alpha}_n k_n}{K_n}.$$

Для нашого випадку $r_1 = 2.29$, $r_2 = 2.78$, $r_3 = 3.37$. Залежно від того, якому з цих проміжків належить параметр L , маємо різні випадки.

При $L \in (0, r_1)$ (наприклад, $L = 2$) результати досліджень зображені на рис. 2. На рис. 2,а зображені області зміни параметрів f, ξ за яких розв'язки є стійкими.

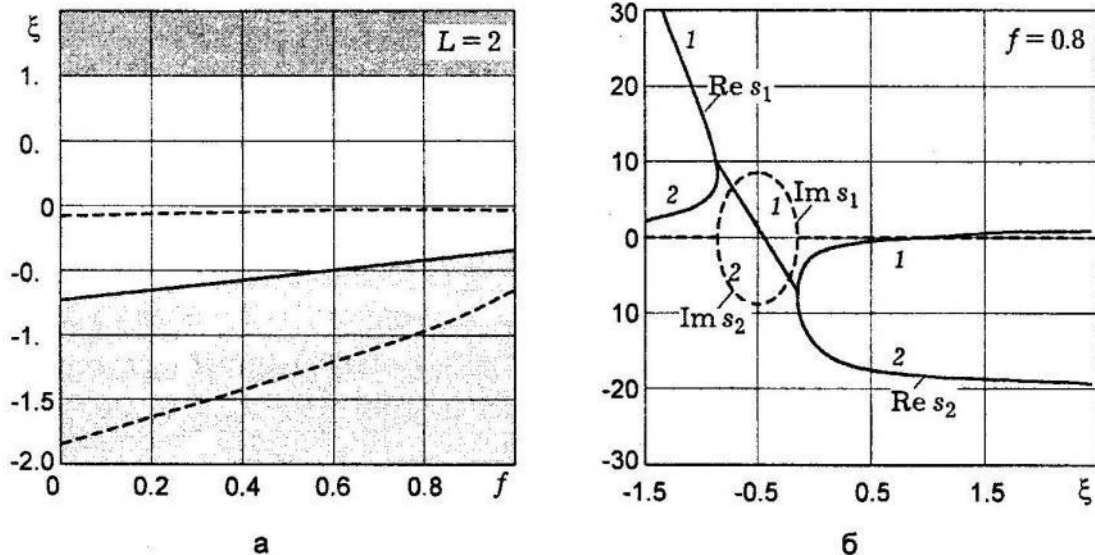


Рис. 2.

Область  на рис. 2,а відповідає єдиному нестійкому розв'язку. Область  на рис. 2,а відповідає випадку неєдиного і нестійкого роз-

в'язку. Не заштрихована область  на рис. 3,а відповідає єдиному і стійкому розв'язку. Область значень параметрів між двома штриховими кривими відповідає коливному характеру поведінки нестационарного розв'язку в околі стаціонарного розв'язку. На рис. 2,б відображена поведінка дійсної (суцільні криві) та уявної (штрихові криві) частин коренів характеристичного рівняння s_1 (криві 1), s_2 (криві 2) залежно від параметра ξ для випадку $f = 0.8$.

При $L \in (r_1, r_2)$ (наприклад $L = 2.5$) результати досліджень зображені на рис. 3:

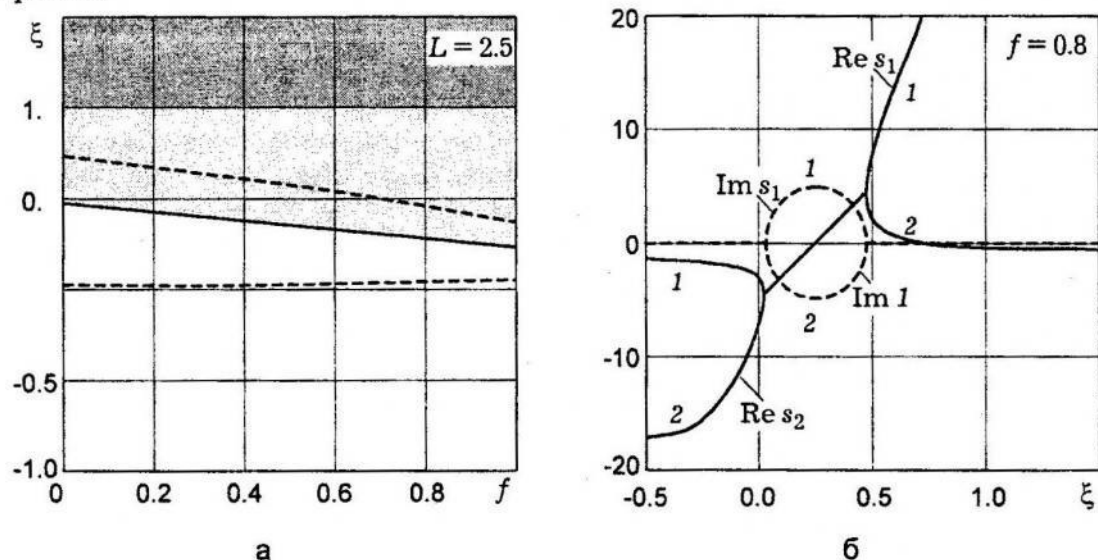


Рис. 3.

При $L \in (r_2, r_3)$ (наприклад $L = 2.9$) результати досліджень зображені на рис. 4:

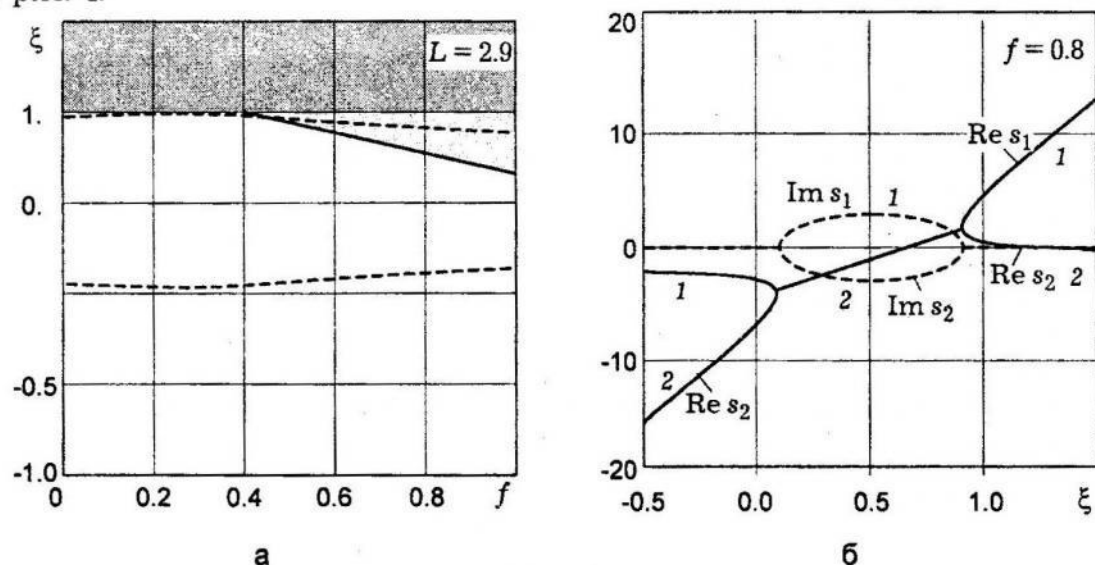


Рис. 4.

При $L \in (\eta_2, \infty)$ (наприклад $L = 4$) результати досліджень зображені на рис. 5.

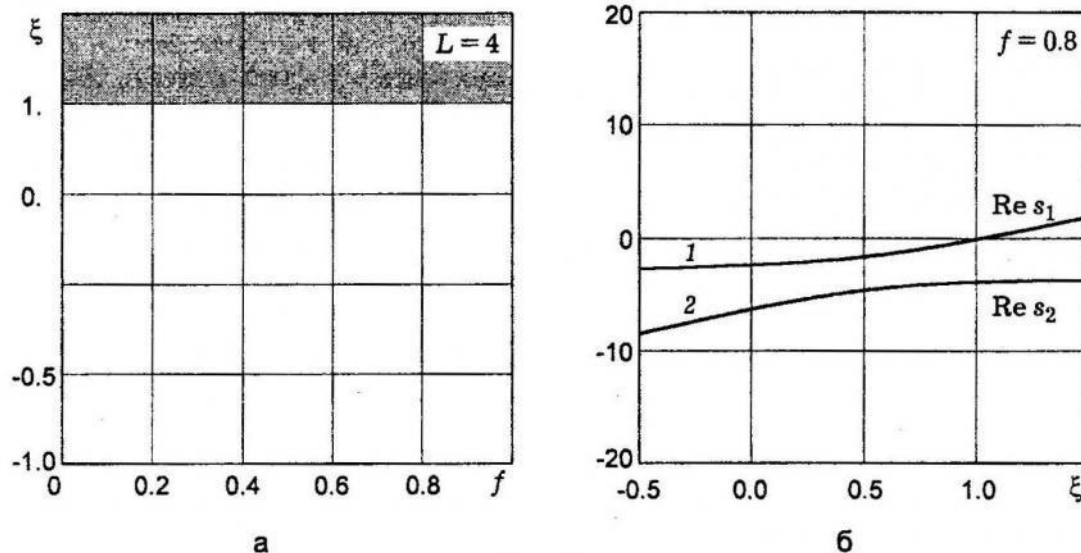


Рис. 5.

Отже, для розглядуваної моделі виявлені області стійкості стаціонарного розв'язку. У працях [1, 2] виконано числовий аналіз нестационарного розв'язку розглядуваної задачі. Показана поведінка нестационарного розв'язку в разі виходу на стаціонарний розв'язок у випадку не єдиного розв'язку, єдиного і стійкого розв'язку, єдиного і нестійкого розв'язку.

1. Olesiak Z. and Pyryev Y. Transient response in a One-dimensional Model of Thermoelastic Contact // Trans. of ASME. J. Appl. Mech. – 1996. – 63. – P. 575–581.
2. Olesiak Z. and Pyryev Y. On nonuniqueness and stability in Barbre's model of thermoelastic contact / Transient response in a One-dimensional Model of Thermoelastic Contact // Trans. of ASME. J. Appl. Mech. – 1996. – 63. – P. 582–586.

Yuriy Pyryev, Roman Mokryk

INVESTIGATION OF STABILITY OF THERMOELASTIC CONTACT FOR TWO BODIES

At the present work one-dimensional model of thermoelastic contact of two bodies is investigated. Between the contacting bodies there is assumed the thermal contact resistance, which depends of contact pressure or gap. The linearisation technique in the vicinity of the steady-state solution was applied to the considered non-linear problem. The behavior of characteristic equation roots of linearized problem is investigated. It is shown that steady-state solution can be stable or non-stable. The partial cases of unique and stable, unique and nonstable, non-unique solution are considered.

Стаття надійшла до редколегії 21.07.99

Ростислав Мартиняк, Андрій Криштафович, Ігор Мачишин

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

ОДНОСТОРОННІЙ КОНТАКТ ТІЛ З УЗГОДЖЕНИМИ ПОВЕРХНЯМИ ЗА ДІЇ ДЖЕРЕЛ І СТОКІВ ТЕПЛА

Вступ. Під час взаємодії тіл з узгодженими поверхнями, які в недеформованому стані збігаються або дуже мало різняться між собою, область контакту сумірна з розмірами тіл або їхніх границь. Теорія Герца не може бути застосована до цього класу задач, оскільки описує локальний контакт тіл, який, зокрема, відбувається в разі неузгодженості їхньої форми. Натомість при взаємодії тіл з узгодженою формою можлива локальна відсутність прямого контакту в околі ділянок з малими збуреннями границь і зон прикладення навантаження. Вивчення такого типу контакту тіл передбачає розвиток теоретичних методів, які дають змогу врахувати наявність міжконтактних зазорів та їхню трансформацію у процесі навантаження.

Ефективним для плоских задач про локальну відсутність прямого механічного контакту півплощин з узгодженими границями виявився метод функцій міжконтактних зазорів [5]. Він використаний для дослідження взаємодії тіл з поверхневими заглибинами [1, 7] та вивчення порушень контакту, зумовлених підповерхневими зосередженими силами [2, 6]. У цій праці метод функцій міжконтактних зазорів розвивається стосовно задач одностороннього контакту тіл з врахуванням локальних розшарувань внаслідок дії зосереджених джерел і стоків тепла.

Повний контакт тіл. Дослідимо спочатку повний контакт тіл і визначимо умови, за яких зосереджені теплові чинники зумовлюють його порушення. Розглянемо взаємодію двох пружних ізотропних півпросторів, матеріали яких однакові. Вважаємо, що тіла перебувають в умовах плоскої деформації, тому розглянемо контакт двох півплощин D_1 і D_2 , які є перерізами тіл площиною, паралельною площині деформації. Тіла контактують під дією рівномірно розподілених на нескінченності зусиль p вздовж усієї границі L , з якою сумістимо вісь абсцис Ox декартової системи координат xOy . Вважаємо, що у кожній півплощині D_k у довільному числі S_k внутрішніх точок (x_{ks}, y_{ks}) , $s = \overline{1, S_k}$, діють стаціонарні джерела і стоки тепла інтенсивністю q_{ks} ($q_{ks} > 0$ – джерело, $q_{ks} < 0$ – стік), сумарна інтенсивність яких дорівнює нулю $\left(\sum_{k=1}^2 \sum_{s=1}^{S_k} q_{ks} = 0 \right)$. Дослідимо термонапружений стан тіл за умови, що на лінії розмежування півплощин реалізується безфрикційний механічний і досконалий тепловий контакт.

Граничні умови такої задачі теплопровідності й термопружності мають вигляд:

на лінії контакту L ($y = 0, -\infty < x < +\infty$)

$$T_0^- = T_0^+, q_{y0}^- = q_{y0}^+, \quad (1)$$

$$\sigma_y^- = \sigma_y^+ \leq 0, \quad (2)$$

на нескінченності ($\sqrt{x^2 + y^2} = \infty$)

$$T_0 = 0, \sigma_{y0} = -p, \sigma_{x0} = \tau_{xy0} = 0, \quad (3)$$

де T – температура; q_y, v – компоненти відповідно вектора теплового потоку і вектора переміщення в напрямі осі Oy ; $q_y = -\lambda \partial T / \partial y$; σ_x – компоненти тензора напружень; індекс «0» біля функції означає, що вона відповідає повному контактowi тіл, індекси «-» і «+» позначають граничні значення функції на лінії L відповідно у півплощинах D_1 і D_2 .

Перша умова в (2) є необхідною і достатньою умовою взаємодії півплощин уздовж всієї межі L за одностороннього контакту. Невиконання цієї умови на деякій ділянці означає, що контакт тіл в околі цієї ділянки порушений.

Поля температури, напружень і переміщень, що задовольняють умови (1)–(3), подамо у півплощинах D_k через комплексні потенціали $F_0(z)$, $\Phi_{0k}(z)$ ($k = 1, 2$) [3, 4] у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{y0} - i\tau_{xy0} &= \Phi_{0k}(z) - \Phi_{0k}(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_{0k}(z)} - \\ &- \delta \sum_{s=1}^{S_k} m_{ks} \left\{ 2 \ln \left(\frac{z - z_{ks}}{z - \bar{z}_{ks}} \left(\frac{\bar{z} - z_{ks}}{\bar{z} - \bar{z}_{ks}} - \frac{\bar{z} - \bar{z}_{ks}}{\bar{z} - z_{ks}} \right) + (z - \bar{z}) \left[\frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_{ks}} - \frac{1}{\bar{z} - z_{ks}} \right] \right\} - p, \\ 2G(u'_0 + iv'_0) &= \kappa \Phi_{0k}(z) + \Phi_{0k}(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_{0k}(z)} + \\ &+ \delta \sum_{s=1}^{S_k} m_{ks} \left\{ \ln \frac{\bar{z} - \bar{z}_{ks}}{\bar{z} - z_{ks}} - \kappa \ln \frac{z - z_{ks}}{z - \bar{z}_{ks}} + \frac{\bar{z} - z_{ks}}{\bar{z} - \bar{z}_{ks}} - \frac{\bar{z} - \bar{z}_{ks}}{\bar{z} - z_{ks}} + \right. \\ &\left. + (z - \bar{z}) \left[\frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_{ks}} - \frac{1}{\bar{z} - z_{ks}} \right] \right\} + \beta F_0(z) + \frac{3 - \kappa}{4} p, \\ \Phi_k(z) &= -\frac{\delta}{2} \left\{ \sum_{s=1}^{S_k} m_{ks} \left[2 \ln(z - \bar{z}_{ks}) - \frac{z - z_{ks}}{z - \bar{z}_{ks}} \right] + \sum_{s=1}^{S_l} m_{ls} \left[2 \ln(z - z_{ls}) - \frac{z - \bar{z}_{ls}}{z - z_{ls}} \right] \right\}, \\ \Phi_l(z) &= \frac{\delta}{2} \left\{ \sum_{s=1}^{S_k} m_{ks} \left[2 \ln(z - \bar{z}_{ks}) + \frac{z - z_{ks}}{z - \bar{z}_{ks}} \right] + \sum_{s=1}^{S_l} m_{ls} \left[2 \ln(z - z_{ls}) + 3 \frac{z - \bar{z}_{ls}}{z - z_{ls}} \right] \right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

де $z \in D_k$; $k = 1, 2$; $l = 3 - k$; $\delta = \frac{\beta}{1 + \kappa}$, $m_{ks} = -\frac{q_{ks}}{2\pi\lambda}$, $z = x + iy$ – комплексна змінна; $z_{ks} = x_{ks} + iy_{ks}$; ν, λ, α – відповідно коефіцієнти Пуассона, теплопровідності та лінійного теплового розширення; G – модуль зсуву.

Аналіз контактного тиску $P(x) = \sigma_y^\pm(x, 0)$ між тілами, визначеного з використанням формул (4), засвідчує, що за певних значень інтенсивності теплових чинників і їх розташування цей тиск стає від'ємним, тобто перша з умов (2) порушується. Проілюструємо це на прикладі дії джерела і стоку інтенсивністю q_0 , розташованих на осі Oy : джерело – в точці $z_1 = iy_1$ нижньої півплощини ($y_1 < 0$), стік – у точці $z_2 = iy_2$ верхньої півплощини ($y_2 > 0$). У цьому разі контактний тиск має вигляд

$$P(x) = p + \delta m \left[2 \ln \left(\frac{x - iy_1}{x - iy_2} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{x - iy_1}{x + iy_1} - \frac{x + iy_2}{x - iy_2} \right) \right], \quad m = -\frac{q_0}{2\pi\lambda}. \quad (5)$$

Бачимо, що від'ємний тиск з'являється в околі початку координат, якщо стік розміщений ближче до границі, ніж джерело, за виконання умови

$$2\delta m \ln(y_2/y_1) < -p. \quad (6)$$

Якщо стік перебуває на більшій відстані, ніж джерело, то від'ємний тиск може з'явитися на певній відстані від початку координат.

Отже, термічне навантаження зосередженими тепловими чинниками зістикованих тіл за одностороннього контакту може зумовлювати появу розшарувань. Вивчення такого порушення контакту потребує врахування у постановці задачі утворення міжконтактних зазорів.

Розшарування півплощин. Нехай джерела і стоки зумовлюють порушення прямого контакту півплощин уздовж N відрізків $L_n = [a_n, b_n]$ ($n = \overline{1, N}$), які творять лінію $L' = \bigcup_n L_n$. Границі тіл уздовж утворених зазо-

рів незавантажені й теплоізовані. На ділянках контакту $L'' = L \setminus L'$ реалізуються умови безфрикційного механічного і досконалого теплового контакту.

Гранично-контактні умови в цьому разі мають вигляд: уздовж зазорів (на L')

$$q_y^- = q_y^+ = 0, \quad \sigma_y^- = \sigma_y^+ = 0, \quad (7)$$

уздовж ділянок контакту (на L'')

$$T^- = T^+. \quad (8)$$

Подаючи [2, 5] розв'язок цієї задачі термопружності у комплексному вигляді через функції міжконтактних зазорів – стрибок температури границь тіл уздовж розшарувань $\gamma(x) = T^- - T^+$ і висоту зазорів $h(x)$, отримуємо

$$T = T_0 + \operatorname{Re} F(z), \quad F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{\gamma'(t)}{t - z} dt,$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \sigma_{y0} - i\tau_{xy0} + \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)},$$

$$2G(u' + iv') = 2G(u'_0 + iv'_0) + \kappa \Phi_k(z) + \Phi_k(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} + \beta F(z),$$

$$\Phi_2(z) = -\Phi_1(z) = (-1)^k \frac{K}{\pi} \int_{L'} \frac{h'(t)}{t-z} dt, \quad z \in D_k, \quad K = \frac{1+\kappa}{G}.$$

Функції міжконтактних зазорів визначаються зі системи сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{\gamma'(t) dt}{t-x} = -\frac{1}{2\lambda} q_{y0}(x, 0), \quad x \in L', \quad \gamma(a_n) = \gamma(b_n) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{h'(t) dt}{t-x} = \frac{1}{2} KP(x), \quad x \in L', \quad h(a_n) = h(b_n) = 0. \quad (10)$$

Враховуючи те, що границі тіл змикаються плавно на кінцях зазорів, треба шукати обмежений розв'язок рівняння (10). Саме N умов існування

такого обмеженого розв'язку [3] і N умов $\int_{L_n} \gamma'(x) dx = 0$ ($n = \overline{1, N}$) слу-

жать для визначення $2N$ невідомих координат кінців зазорів a_n, b_n .

Як приклад розглянемо утворення одного розшарування вздовж відрізка $[-a, a]$ (рис. 1) під дією джерела і стоку тепла інтенсивності q_0 , прикладених відповідно у точках $z_1 = iy_1$ і $z_2 = iy_2$, яке відбувається за виконання умови (6). Висота і довжина зазору в цьому разі визначаються зі співвідношень

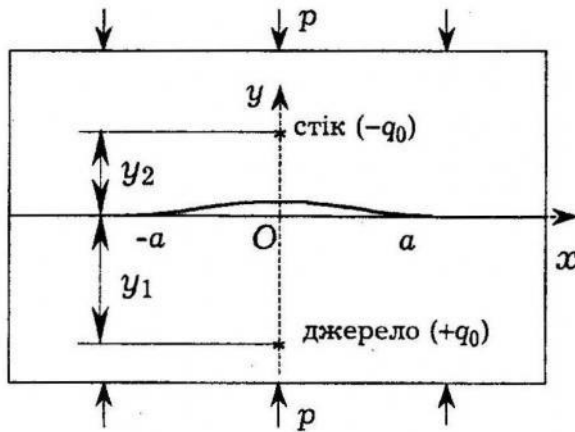


Рис. 1.

$$h'(x) = -\frac{\alpha(1+\nu)}{\lambda} K\delta m \sum_{k=1}^2 \left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}y_k}{\sqrt{y_k^2+a^2}(x^2+y_k^2)} - \arctg \frac{y_k\sqrt{a^2-x^2}}{x\sqrt{y_k^2+a^2}} \right],$$

$$p + 2\delta m \sum_{k=1}^2 \left[y_k / \sqrt{y_k^2+a^2} - \ln \left| \left(y_k + \sqrt{y_k^2+a^2} \right) / a \right| \right] = 0. \quad (11)$$

Залежність довжини зазору від відстані стоку до межі для різних значень параметра термомеханічного навантаження $p_q = \frac{p}{q_0} (\alpha/E\lambda)$, який ха-

рактеризує співвідношення між зовнішнім тиском і потужністю стоку (E - модуль Юнга), проілюстрована на рис. 2. Зростання параметра p_q , що при фіксованому зовнішньому тиску відповідає зменшенню потужності теплових чинників, зумовлює зменшення довжини розшарування. На рис. 3 зображено форму зазорів для різних відстаней стоку сталої потужності до межі. Наближення стоку до межі зумовлює збільшення довжини зазору та його максимальної висоти, яка досягається посередині зазору.

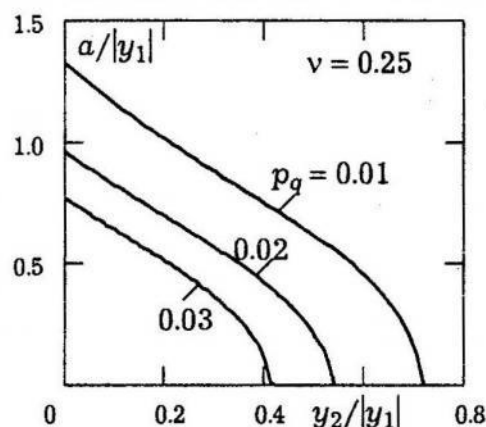


Рис. 2.

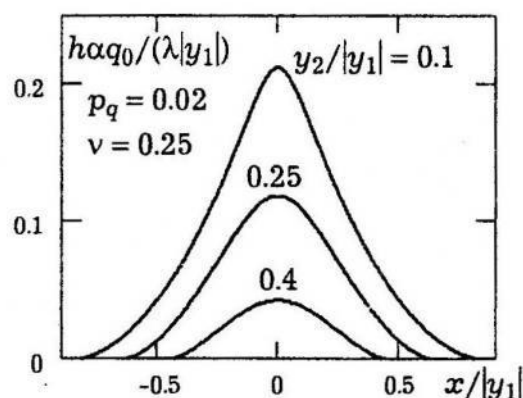


Рис. 3.

1. Мартиняк Р.М. Контактна взаємодія двох півпросторів при наявності поверхневої виїмки, частково заповненої нестисливою рідиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1990. – 26, № 2. – С. 91–94.
2. Мартиняк Р.М. Взаимодействие упругих полуплоскостей при неполном механическом контакте // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – № 22. – С. 81–92.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
4. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во БГУ, 1979. – 200 с.
5. Швець Р. М., Мартиняк Р. М. Інтегральні рівняння контактної задачі термо-пружності для шорстких тіл // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 11. – С. 37–40.
6. Швець Р. М., Мартиняк Р. М., Криштафович А. А. Неповний механічний контакт двох пружних півплощин із ортотропних матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1990. – 26, № 3. – С. 65–69.
7. Shvets R. M., Martynyak R. M. and Kryshchakovich A. A. Discontinuous contact of an anisotropic half-plane and a rigid base with disturbed surface // Int. J. Engng. Sci. – 1996. – 34, No. 2. – P. 183–200.

Rostyslav Martynyak, Andrew Kryshchakovich, Igor Machyshyn

UNILATERAL CONTACT OF BODIES WITH CONFORMING SURFACES UNDER AN ACTION OF HEAT SOURCES AND SINKS

Thermoelastic interaction of half-planes possessing conforming boundaries is investigated under the conditions of unilateral contact. It is established that concentrated heat matters can induce direct contact fault of such bodies. To solve the problem on separation of half-planes due to an action of heat sources and sinks, the method of intercontact gap functions is used. Numerical results are exposed for the case of one intercontact gap arisen.

Стаття надійшла до редколегії 02.07.99

Олександр Гачкевич, Віра Михайлишин

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ СКЛАДЕНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянемо систему тіл, які мають спільні контактуючі поверхні. Тіла перебувають в умовах теплових і (або) механічних навантажень, які можуть спричиняти пластичні напруження і деформації. Беремо до уваги температурні залежності характеристик матеріалу та анізотропне зміцнення. Для опису складної історії навантаження виходимо з теорії течіння.

Нехай деформівні контактуючі тіла, які займають області $\Omega_1, \Omega_2, \dots$, Ω_n ($\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \Omega$, $\bigcap_{i=1}^n \Omega_i = \emptyset$), обмежені границями $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ ($\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$), віднесені до ортогональної декартової системи координат (x_1, x_2, x_3) . На частині $\Gamma_i^u \subset \Gamma_i$ задані переміщення $\{u_i^*\}$, на частині $\Gamma_i^\sigma \subset \Gamma_i$ – зовнішнє силове навантаження $\{R_i\}$ ($\bigcup_{i=1}^n \Gamma_i^u = \Gamma^u$, $\bigcup_{i=1}^n \Gamma_i^\sigma = \Gamma^\sigma$). На частинах поверхонь Γ_{ij} , що є поверхнями контакту ($\Gamma_{ij} \subset \Gamma_i, \Gamma_{ij} \subset \Gamma_j$, $\bigcup_{j=1}^n \Gamma_{ij} \neq \emptyset$ для кожного i), задані контактні граничні умови, які визначають тип контактної взаємодії. Тут $\Gamma_i^u \bigcup \bigcup_{j=1}^n \Gamma_{ij} = \Gamma_i$, $\Gamma_i^u \cap \Gamma_i^\sigma = \emptyset$, $\Gamma_i^u \cap \Gamma_{ij} = \emptyset$, $\Gamma_i^\sigma \cap \Gamma_{ij} = \emptyset$. Припускається, що деформації малі, а механічна взаємодія не веде до зміни контактуючих зон Γ_{ij} . Силами тертя нехтуємо.

Процес деформування вважаємо квазістатичним, що дає змогу незалежно знайти температурне поле і параметри напружено-деформованого стану при неізотермічних процесах.

Задача про визначення температурного поля передбачає розв'язання нестационарного рівняння теплопровідності [2] з відповідними початковою і граничними умовами [2], що пов'язані з характером теплообміну в системі. Тепловий контакт між складовими системи вважається ідеальним.

Формулюючи задачу про визначення параметрів напруженого стану і величини контактної сили за пружно-пластичного деформування, будемо опиратись на теорію пластичного неізотермічного течіння з урахуванням ізотропно-кінематичного зміцнення [7]. Як критерій початку виникнення

пластичних деформацій приймемо умову Мізеса, модифіковану на випадок ізотропно-кінематичного зміцнення [7].

Тоді замкнена система рівнянь моделі для визначення переміщень $\{u\}$, деформацій $\{\epsilon\}$ і напружень $\{\sigma\}$ в області Ω охоплює: рівняння рівноваги (масовими силами нехтуємо) [6], геометричні співвідношення Коші [6], а також рівняння стану [7] розгляданого варіанту теорії течіння. Ці рівняння разом зі статичними, кінематичними [6] і контактними граничними умовами формують квазістатичну термопружно-пластичну задачу. На поверхнях Γ_{ij} розглядаємо три типи контактної взаємодії: зчеплення, зазор без проковзування, зазор з проковзуванням [3].

Отримання точного розв'язку задачі, що складається з рівняння рівноваги, геометричних співвідношень Коші, рівняння стану, статичних, кінематичних та контактних граничних умов, є проблематичним.

Побудуємо наближений розв'язок задачі на основі її варіаційного формулювання з використанням покрокової апроксимації нелінійного процесу деформування [6], ітераційних схем, які лінеаризують вихідну термопружно-пластичну задачу [5], та методу скінченних елементів [4] (розв'язувальні рівняння якого впливають з варіаційного рівняння [1]).

Розв'язок $\{u\}$ задачі задовольняє на множині кінематично допустимих переміщень принцип віртуальної роботи [1], математичний вираз якого для дискретного часового кроку Δt_N ($N = 0, 1, 2, \dots, N^* - 1$) має вигляд

$$\iiint_{\Omega} \{\delta \Delta \epsilon\}'_N \{\Delta \sigma\}_N d\Omega - \iint_{\Gamma^{\sigma}} \{\delta \Delta u\}'_N \{\Delta R\}_N d\Gamma + \{\phi\}_{N+1} = 0. \quad (1)$$

Залежність (1) виникає як результат апроксимації нескінченно малих приростів величин їхніми скінченними аналогами. Доданок $\{\phi\}_{N+1}$ – нев'язка варіаційного рівняння, нагромаджена до кінця кроку навантаження. Варіаційне рівняння (1) з використанням співвідношень Коші і виразу $\{\Delta \sigma\}_N$, одержаного на основі рівняння стану, записуємо

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \{\delta \Delta u\}'_N [B]' [D^{ep}]_{N+1} [B] \{\Delta u\}_N d\Omega = & \iint_{\Gamma^{\sigma}} \{\delta \Delta u\}'_N \{\Delta R\}_N d\Gamma + \\ & + \iiint_{\Omega} \{\delta \Delta u\}'_N [B]' [D^{ep}]_{N+1} \{\Delta \epsilon^T\}_N d\Omega - \\ & - \iiint_{\Omega} \{\delta \Delta u\}'_N [B]' [\Delta D^{ep}]_N (\{\epsilon\}_N - \{\epsilon^p\}_N - \{\epsilon^T\}_N) d\Omega - \\ & - \iiint_{\Omega} \{\delta \Delta u\}'_N [B]' \{Q\}_{N+1} \Delta T_N d\Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

де $[B]$ – матриця диференціальних операторів [4]; $\{\epsilon^p\}_N$, $\{\epsilon^T\}_N$ – відповідно вектори пластичної та температурної деформацій; $[D^{ep}]_{N+1}$ – пружно-пластична матриця стану; тензор $[\Delta D^{ep}]$ і вектор $\{Q\}_{N+1}$, пов'язані зі змі-

ною пружності та міцності залежно від температури [7]; символ «'» означає операцію транспонування.

Як приклад розглянемо з'єднання сталевих труб за допомогою латунної муфти, яка в нагрітому стані, що характеризується однорідним розподілом температури $T_M = 220^\circ\text{C}$, вільно насаджується без натягу на труби і рівномірно охолоджується до температури середовища $T_C = 20^\circ\text{C}$. Припускається, що температура труб не змінюється і дорівнює температурі середовища T_C . Напруження досліджені у віднесеній до циліндричної системи координат двовимірній області, зайнятій чвертю діаметрального перерізу, за граничних умов $u_z^{(1)}|_{z=0} = 0$, $u_z^{(2)}|_{z=0} = 0$ (відсутність зазору між трубами і симетрія задачі). У зоні контакту Γ_{12} зовнішньої поверхні труби і внутрішньої поверхні муфти припускається, що $u_r^{(1)}|_{\Gamma_{12}} = u_r^{(2)}|_{\Gamma_{12}}$, $u_z^{(1)}|_{\Gamma_{12}} = u_z^{(2)}|_{\Gamma_{12}}$. Індокси «(1)» і «(2)» відносяться відповідно до переміщень у трубі та муфті. При заданих обмеженнях на геометричні розміри неконтактуючої кусково-лінійної поверхні муфти знайдений оптимальний профіль, який забезпечує мінімальний перепад контактного тиску p_k .

Числові обчислення виконані для труб із внутрішнім радіусом $R = 17\text{ мм}$ і товщиною стінки $h_2 = 3\text{ мм}$ при довжині $d = 35\text{ мм}$ досліджуваної ділянки труби (рис. 2). Характеристики для сталі прийняті такими: модуль Юнга $E = 196\text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.28$, межа плинності $\sigma_T = 422\text{ МПа}$, лінійний коефіцієнт термічного розширення $\alpha_T = 11 \cdot 10^{-6}\text{ град}^{-1}$; для латуні: $E = 98\text{ ГПа}$, $\nu = 0.25$, $\sigma_T = 255\text{ МПа}$, $\alpha_T = 16 \cdot 10^{-6}\text{ град}^{-1}$.

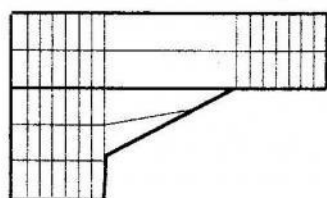
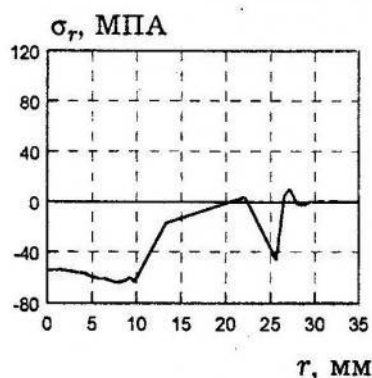


Рис. 1.

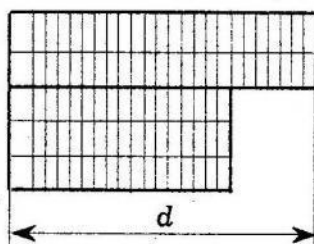
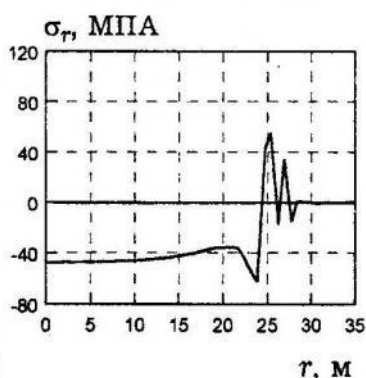


Рис. 2.

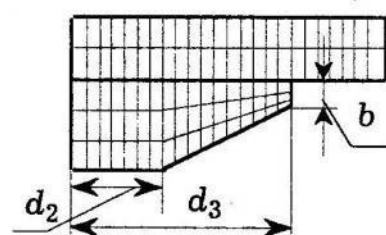
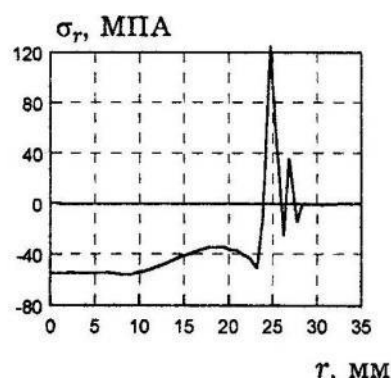


Рис. 3.

Матеріали вважаються ідеально пружно-пластичними.

У разі пошуку оптимальної форми профілю фіксованими є товщина муфти $h_1 = 5$ мм при $z = 0$ і максимальна довжина в напрямі осі Oz – $d_1 = 25$ мм; варійованими – d_2 , d_3 , b ($0 \leq b \leq 2h_1$ – рис. 3). Оптимальний профіль муфтового з'єднання ($d_2 = 10$ мм, $d_3 = 10.9$ мм, $b = 2.5$ мм) зображений на рис. 1. Для цього варіанту максимальний перепад нормальних напружень на поверхні труби, близькій і коаксіальній до контактної, становить 74.26 МПа. Для муфти постійної товщини (рис. 2, $d_3 = 25$ мм, $b = 5$ мм) збурення контактної тиску в 1.58 раза більше порівняно з оптимальною. Максимальне збурення контактної тиску p_k досягається при $d_2 = 10$ мм, $d_3 = 22$ мм, $b = 1.6$ мм (рис. 3) і є в 2.44 раза більше, ніж в оптимальному варіанті (рис. 1).

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. Пер с англ. – М: Мир, 1987. – 542 с.
2. Коваленко А. Д. Термоупругость. – К.: Вища шк., 1975. – 216 с.
3. Кузьменко В. И. О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел // Прикл. матем. и механика. – 1979. – 43, № 5. – С 893 – 901.
4. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. Сахарова А. и Альтенбаха И. – К.: Вища шк., 1982. – 480 с.
5. Михайлишин В. С. Ітераційні процедури в задачах неізотермічної пружнопластичності з ізотропно-кінематичним зміцненням // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1999. – 35, № 4. – С. 102–112.
6. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справ. пособие. – К.: Наук. думка, 1981. – 496 с.
7. Allen D. H., Haisler W. E. A theory for analysis of thermoplastic materials // Comput. & Struct. – 1981. – 13, No. 1. – P. 129–135.

Alexander Gachkevych, Vira Myhaylyshyn

NUMERICAL INVESTIGATION FOR ELASTIC-PLASTIC BEHAVIOR OF COMPOUND MECHANICAL SYSTEMS

A methodology has been proposed for description of elastic-plastic behavior of deformable bodies under complex thermal force loading. The methodology is based on the finite element method, «steps» one and linearizing method of elastic solutions. As an example, an optimal form as to contact pressure has been found for a coupling furnished as a result of its thermal shrinkage.

Стаття надійшла до редколегії 06.09.99

Георгій Сулим¹, Михайло Фльорко¹, Василь Чекурін²

¹Львівський національний університет ім. І. Франка

²Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

ЗАЛИШКОВІ НАПРУЖЕННЯ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

З огляду на відпрацювання методів неруйнівного контролю залишкових напружень, що виникають в околі з'єднань різнорідних циліндричних елементів, актуальною є проблема побудови адекватних математичних моделей для опису напружено-деформованого стану таких об'єктів, формулювання та розв'язування відповідних обернених задач. Кількісні дослідження напружень у таких об'єктах потрібні для з'ясування класів функцій, у яких доцільно шукати розв'язки обернених задач, та оцінки множини можливих вхідних даних цих задач.

Математична модель залишкових напружень. Розглянемо ізотропне кусково-однорідне тверде тіло B , яке має форму порожнистого циліндра і складається з різнорідних частин B_1 та B_2 , з'єднаних по площині кільця S нормального перерізу. Тіло перебуває у стані пружної рівноваги за відсутності зовнішніх навантажень. Залишкові напруження формуються внаслідок різниці механічних і теплофізичних властивостей матеріалу складових та його непружного поведіння під час переходу тіла до актуального стану.

Для кожної складової B_λ , $\lambda = 1, 2$ виконуються рівняння рівноваги, які за умов осової симетрії у циліндричній системі координат (r, φ, z) мають вигляд [2]

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^\lambda}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^\lambda}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr}^\lambda - \sigma_{\varphi\varphi}^\lambda) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}^\lambda}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^\lambda}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}^\lambda}{r} = 0. \quad (1)$$

Компоненти деформації ε_{ij}^λ задовольняють в об'ємі V_λ складові рівняння сумісності:

$$\frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}}{r} = 0, \quad r \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

і пов'язані з компонентами тензора напружень співвідношеннями закону Гука:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} + \delta_{ij} \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma, \quad \sigma \equiv \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}, \quad i, j \in \{r, \varphi, z\}. \quad (3)$$

На циліндричних $r = R_1$, $r = R_2$ і торцевих $z = -L_1$, $z = L_2$ поверхнях виконуються умови незавантаженості:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^\lambda|_{r=R_1} &= \sigma_{rz}^\lambda|_{r=R_1} = \sigma_{rr}^\lambda|_{r=R_2} = \sigma_{rz}^\lambda|_{r=R_2} = 0, \\ \sigma_{zz}^\lambda|_{z=-L_1} &= \sigma_{rz}^\lambda|_{z=-L_1} = \sigma_{zz}^\lambda|_{z=L_2} = \sigma_{rz}^\lambda|_{z=L_2} = 0.\end{aligned}\quad (4)$$

На поверхні контакту S справджуються умови зрівноваженості складових:

$$\sigma_{zz}^2|_{z=0} - \sigma_{zz}^1|_{z=0} = \sigma_{rz}^2|_{z=0} - \sigma_{rz}^1|_{z=0} = 0, \quad (5)$$

а також умови

$$u_r^2 - u_r^1 = v(r), \quad u_z^2 - u_z^1 = w(r), \quad (6)$$

які визначають стрибки тангенційної та нормальної складових вектора переміщень на поверхні S . Тут $v(r)$ та $w(r)$ – функції, що враховують непружну поведінку матеріалу в околі контакту складових та відмінність їхніх фізичних властивостей.

Співвідношення (1)–(6) формують математичну модель залишкових напружень у кусково-однорідному циліндричному тілі, які зумовлені несумісністю деформації на поверхні поділу різнорідних складових. Треба наголосити, що математична модель (1)–(6) незамкнена, оскільки функції $v(r)$, $w(r)$ невідомі.

Обернена задача неруйнівного контролю залишкових напружень. Зондуючи тіло зовнішніми полями – поляризованим світлом, ультразвуком чи магнітним полем, можна експериментально визначати деякі параметри її напруженого стану. Вимірювані параметри J_k залежать від розподілу напружень σ_{ij}^d у певній області d проникнення зондувального поля у тіло. Отже, J_k можна розглядати як функціонал поля напружень у цій області:

$$J_k = F_k^d(\sigma_{ij}). \quad (7)$$

Скануючи тіло полем, визначаємо параметри J_k у деякій множині $D = \{d\}$ і одержуємо експериментальні залежності

$$J_k = J_k(d), \quad d \in D. \quad (8)$$

Результати вимірювань (8) разом із функціоналом (7), який є моделлю взаємодії випромінювання з полем напружень, використовують для неруйнівного контролю поля напружень. Однак внаслідок того, що не всі зони тіла доступні для зондування зовнішнім полем (наприклад, зона шва) і методи неруйнівного контролю мають обмеження за їхньою роздільною здатністю, чутливістю тощо, експериментальних даних (8) може бути недостатньо для безпосереднього відновлення напружено-деформованого стану уповні. Проте за допомогою результатів вимірювань (8) та моделі взаємодії зондувального поля з полем напружень (7) разом зі співвідношеннями (1)–(6) можна знизити рівень недоозначеності математичної моделі до рівня, достатнього для формулювання умовно коректної оберненої задачі. Враховуючи це, обернену задачу визначення напружено-деформованого стану циліндра можна сформулювати так [4]: знайти поля напружень σ_{ij}^λ та де-

формацій ε_{ij}^λ , які в об'ємі складових V_λ задовольняють рівняння (1)–(3), на вільній поверхні – умови (4), а на границі поділу складових S – умови (5) й узгоджуються у певному сенсі з результатами неруйнівного контролю (8) та моделлю взаємодії зондувального випромінювання з шуканим полем напружень (7). Варіаційний підхід до розв'язання такої задачі розглядається в праці [3], а приклади його застосування – у публікаціях [4, 5].

Функціонали поля напружень. У випадку поляризаційно-оптичного методу неруйнівного контролю [1] областими проникнення d є відрізки прямих від точок входження променів світла в тіло до точок їх виходу. Поляризація світлового променя, що розглядається у наближенні плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі, задається комплексним вектором $\mathbf{E} = [E_1, E_2]^T$, де E_1, E_2 – компоненти вектора напруженості електричного поля в площині фронту хвилі. Зміна поляризації світлового променя під час його проходження через тіло в напрямках, нормальних до осі циліндра, описується системою рівнянь [6]:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} + \frac{2\omega P \sigma_{pz}}{c\sqrt{\varepsilon} \sqrt{1+t^2/l^2}} \operatorname{ch} \eta \sin \delta &= 0, \\ \frac{d\delta}{dt} - \frac{2\omega P \sigma_{pz}}{c\sqrt{\varepsilon} \sqrt{1+t^2/l^2}} \operatorname{sh} \eta \cos \delta &= \frac{\omega P}{c\sqrt{\varepsilon}} \left(\sigma_{zz} - \frac{\sigma_{pp} + t^2/l^2 \sigma_{\varphi\varphi}}{1+t^2/l^2} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

де η та δ – дійсна та уявна частини логарифма відношення компонент вектора $\mathbf{E}$; l – відстань від осі циліндра до променя; t – скалярний параметр, що визначає радіус-вектор точки на промені d ; P – стала фотопружності матеріалу; ε – діелектрична проникність матеріалу в недеформованому стані; ω – циклічна частота світлової хвилі; c – швидкість світла.

Якщо $l = 0$, то маємо радіальне просвічування. Система (9) спрощується

$$\frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{\omega P}{c\sqrt{\varepsilon}} (\sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi}). \quad (10)$$

Із другого рівняння (10) одержуємо функціонал вигляду (7), який пов'язує радіальний розподіл напружень у тілі з приростом різниці фаз δ_R , набутої поляризованим світлом під час проходження променя крізь стінку циліндра:

$$\delta_R = \frac{\omega P}{c\sqrt{\varepsilon}} \int_{R_2}^{R_1} (\sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi}) dr. \quad (11)$$

Якщо $l \in [R_2, R_1]$, то реалізується тангенційне просвічування. З другого рівняння (9) випливає, що оптичний параметр $\delta_t \equiv \lim_{l \rightarrow R_1} (\delta/2 \sqrt{R_1^2 - l^2})$ пов'язаний із функціоналом поля напружень [6]:

$$\delta_\tau = -\frac{\omega P}{c\sqrt{x}} \sigma_{zz}|_{p=R_1}. \quad (12)$$

Оптичні параметри δ_R та δ_τ можна визначити методами оптичної поляризації [1]. Вимірюючи їхнє значення для двох складових тіла на різних відстанях від поверхні S з'єднання, одержуємо експериментальні залежності:

$$\delta_R = \delta_R^\lambda(z), \quad \delta_\tau = \delta_\tau^\lambda(z), \quad z \in D_\lambda, \quad (13)$$

де $D_1 \subseteq [-L_1, 0]$ та $D_2 \subseteq [0, L_2]$ – множини напрямів просвічування.

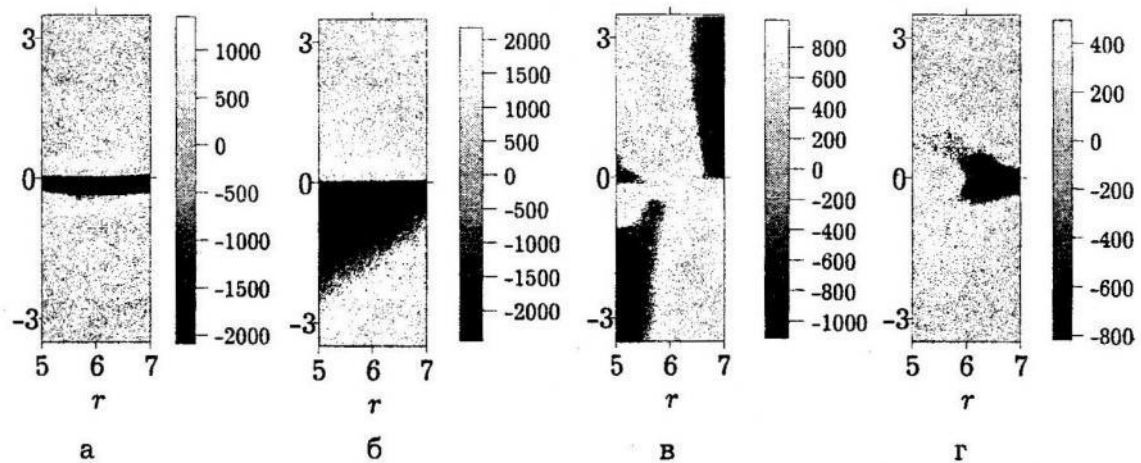
Залежності (13) разом із формулами (11), (12) утворюють означену на множині напрямів $D = D_1 \cup D_2$ множину функціоналів поля напружень.

Дослідження поля напружень у рамках прямої задачі. Якщо функції $v(r)$ та $w(r)$ відомі, то, розв'язуючи крайову задачу (1)–(6), знаходимо залишкові напруження, зумовлені несумісністю деформацій на поверхні контакту його складових.

На рис. зображено розподіл залишкових напружень у тілі B , знайдений внаслідок розв'язання прямої задачі (1)–(6) методом скінченних елементів. Розглядався випадок складових з однаковими модулями пружності і коефіцієнтами Пуассона. Функції $w(r)$ та $v(r)$, які відповідно до формул (6) визначають стрибки компонент вектора переміщення на поверхні S , взяті у вигляді

$$w(r) = 0, \quad v(r) = Ar,$$

де A – стала. Якщо вважати, що $A = -(\alpha_2 - \alpha_1)(T - T_0)$, то прийдемо до випадку напружень, які виникають у складеному циліндрі внаслідок різниці коефіцієнтів температурного розширення α_1 та α_2 його складових під час переходу від температури T_0 до T .



Розподіл напружень у перерізі $\varphi = \text{const}$: а – σ_{rr} , б – $\sigma_{\varphi\varphi}$, в – σ_{zz} , г – $\sigma_{\tau z}$

Результати числових досліджень свідчать про суттєво тривимірний характер напруженого стану в зоні контакту різнорідних складових частин B_1 та B_2 .

1. Александров А. Я., Ахметзянов М. Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого твердого тела. – М: Наука, 1973. – 576 с.
2. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – М.: Высш. шк., 1975. – 528 с.
3. Чекурін В. Ф. Варіаційний метод розв'язування задач томографії напруженого стану твердих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – № 5. – С. 23–32.
4. Чекурин В. Ф. Вариационный метод решения прямых и обратных задач теории упругости для полубесконечной полосы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 2. – С. 58–70.
5. Чекурин В. Ф. Обратная задача неразрушающего контроля уровня закалики листового стекла // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 86–97.
6. Чекурін В. Ф. Обернена задача неруйнівного оптичного контролю залишкових напружень в циліндричних оболонках // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 2. – С. 151–156.

Heorhiy Sulym, Mychaylo Fl'orko, Vasyl Chekurin

RESIDUAL STRESSES IN PIECE-WISE HOMOGENEOUS HOLE CYLINDER

A mathematical model for residual stresses in piece-wise homogeneous solid cylinder, consisting of two parts with different mechanical properties, is considered. Functionals, coupling measured optical parameters and stress distribution in the body, are established. In the frame of the model, using the finite element method, the residual stresses in the hole cylinder, consisting of two parts with different heat expansion coefficients, were studied.

Стаття надійшла до редколегії 29.06.99

Олександра Фльорко, Василь Чекурін

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

НЕЛОКАЛЬНА МОДЕЛЬ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ НАПІВПРОВІДНИКІВ

Напівпровідники великою мірою прозорі для електромагнітного поля в інфрачервоній (ІЧ) області спектра. Внаслідок цього ІЧ-промені, які падають на поверхню тіла, можуть проникати в його товщу, поглинаючись та розсіюючись на своєму шляху. Натомість теплове електромагнітне поле, що випромінюється внутрішніми точками тіла, може поширюватись на великі відстані і, досягнувши поверхні тіла, виходити за його межі. Потік енергії теплового випромінювання пропорційний до четвертого степеня абсолютної температури тіла, отже цей механізм перенесення тепла за високих температур може суттєво впливати на розподіл теплових потоків у тілі, а відтак – на температурні напруження. Тому розвиток методів його макроскопічного опису має важливе значення для термомеханіки таких тіл. Ми розглядаємо нелінійну математичну модель термопружності напівпровідникових тіл, які враховують обмін енергією в об'ємі і на поверхні через теплове електромагнітне випромінювання.

Рівняння балансу імпульсу та енергії. Розглядаємо напівпровідник, легований донорною домішкою, за досить високих температур, так що домішкові атоми цілком іонізовані. Для опису напруженого стану напівпровідника маємо з рівняння балансу імпульсу ґратки [1]

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{t}, \quad (1)$$

де $\mathbf{u}$ – вектор переміщення; $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напружень ґратки; $\mathbf{t}$ – складова, яка враховує пондеромоторну дію електромагнітного поля на заряджену ґратку і передавання імпульсу від електронної підсистеми. Складова $\mathbf{t}$ виражається через параметри електромагнітного поля та густину струму в тілі [1].

Обмежуючись випадком локальної термодинамічної рівноваги для тіла, запишемо рівняння балансу внутрішньої енергії для напівпровідника у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} + W_J + W_r, \quad (2)$$

де u – густина внутрішньої енергії; $\mathbf{J}$ – потік тепла; W_J – доданок, що враховує джоулеве тепловиділення, виражається через напруженість електричного поля та густину струму в тілі [1]; W_r – швидкість виникнення теплової енергії в одиниці об'єму напівпровідника внаслідок його взаємодії з ІЧ-випромінюванням.

Рівняння перенесення випромінювання. Для опису теплового випромінювання в тілі використовуємо рівняння перенесення [2]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} I_v + \mathbf{s} \cdot \nabla I_v = J_v^e - (K_v^a + S_v) I_v + \frac{1}{4\pi} S_v \int_{\Omega} p_v(\mathbf{s}, \mathbf{s}') I_v(\mathbf{s}') d\Omega(\mathbf{s}'). \quad (3)$$

Тут $I_v = I_v(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t)$ – спектральна інтенсивність випромінювання; $\mathbf{r}$ – радіус-вектор довільної точки з області V , зайнятої тілом; $\mathbf{s}, \mathbf{s}'$ – одиничний вектор із початком у точці $\mathbf{r} \in V$, що визначає довільний напрям поширення випромінювання і змінюється в межах повного тілесного кута Ω ; J_v^e – спектральна інтенсивність теплового випромінювання напівпровідника; $K_v^a = K_v^a(\mathbf{s})$ та $S_v = S_v(\mathbf{s})$ – спектральні коефіцієнти поглинання та розсіювання випромінювання; $p_v(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ – індикатриса розсіювання, яка визначає густину ймовірності того, що випромінювання, яке поширюється з напрямку $\mathbf{s}' \in \Omega$, розсіється в точці $\mathbf{r}$ у напрямі $\mathbf{s} \in \Omega$; c – швидкість світла.

Складова $J_v^e = J_v^e(\mathbf{s})$ враховує вплив енергії електромагнітного поля ІЧ-діапазону, зумовлений випромінюванням зарядженими частинками з тіла внаслідок їхнього теплового руху. У наближенні локальної квазірівноваги цю складову можна подати у вигляді [2]

$$J_v^e = K_v^e(\mathbf{s}) I_{vb}(T), \quad I_{vb}(T) \equiv 2\pi v^3 c^{-2} [\exp(hv/k_B T) - 1]^{-1}, \quad (4)$$

де K_v^e – спектральний коефіцієнт випромінювання середовищем.

Локальна швидкість випромінювання напівпровідником енергії ІЧ-електромагнітного поля виражається через параметр J_v^e : $W_r^e = \int_0^\infty \int_{\Omega} J_v^e ds dv$, а швидкість поглинання – через інтенсивність випромінювання I_v : $W_r^a = \int_0^\infty \int_{\Omega} K_v^a I_v ds dv$. Отже, складова W_r у рівнянні (4), що враховує обмін енергією між напівпровідником та ІЧ-електромагнітним полем, визначається як

$$W_r = W_r^a - W_r^e = \int_0^\infty \int_{\Omega} (K_v^a I_v - K_v^e I_{vb}(T)) d\Omega(\mathbf{s}) dv. \quad (5)$$

Рівняння (1)–(3), (5) разом із рівняннями макроскопічної електродинаміки напівпровідників, фізичними співвідношеннями, рівняннями сумісності деформацій утворюють замкнену систему інтегро-диференціальних рівнянь термодинаміки.

Умови на поверхні тіла. Визначаючи граничні умови на параметри кондуктивного та променевого теплообміну, враховуватимемо поглинання, випромінювання та розсіювання поверхнею ∂V ІЧ-електромагнітного поля. У результаті прийдемо до таких співвідношень:

$$-\alpha \nabla T \cdot \mathbf{n} = h(T_c - T) + \tilde{W}_r, \quad (6)$$

$$\Gamma_v^-(\mathbf{s}_2) = K_v^e(\mathbf{s}_2) I_{vb}(T) + \int_{\Omega_1} p_v(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1) \Gamma_v^-(\mathbf{s}_1) d\Omega(\mathbf{s}_1) + \int_{\Omega_2} (1 - K_v^a(\mathbf{s}_2')) p_v(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2') \Gamma_v^+(\mathbf{s}_2') d\Omega(\mathbf{s}_2'),$$

$$\Gamma_v^+(\mathbf{s}_1) = K_v^e(\mathbf{s}_1) I_{vb}(T) + \int_{\Omega_1} (1 - K_v^a(\mathbf{s}_1')) p_v(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1') \Gamma_v^-(\mathbf{s}_1') d\Omega(\mathbf{s}_1') + \int_{\Omega_2} p_v(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \Gamma_v^+(\mathbf{s}_2) d\Omega(\mathbf{s}_2), \quad (7)$$

де α – питома теплопровідність напівпровідника; $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до ∂V ; h – коефіцієнт конвективного теплообміну; T_c – температура зовнішнього середовища; $\tilde{W}_r$ – поверхневий приплив тепла до тіла, зумовлений взаємодією поверхні з тепловим електромагнітним полем:

$$\tilde{W}_r = \int_{\partial V} \int_{\Omega_2} (K_v^a(s_2) I_v^-(s_2) - K_v^e(s_2) I_{vb}(T)) d\Omega(s_2) dv + \int_{\partial V} \int_{\Omega_1} (K_v^a(s_1) I_v^+(s_1) - K_v^e(s_1) I_{vb}(T)) d\Omega(s_1) dv.$$

Знаками «+» та «-» у формулах (7) позначені інтенсивності ІЧ-випромінювання з зовнішньої та внутрішньої сторін поверхні ∂V ; одиничні вектори $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}'_1 \in \Omega_1$ напрямлені назовні від поверхні ∂V , натомість $\mathbf{s}_2, \mathbf{s}'_2 \in \Omega_2$ – в її середину.

Перші доданки в правих частинах рівнянь (7) враховують власне теплове випромінювання матеріальних точок поверхні тіла. Другий доданок у правій частині першого рівняння (7) враховує внутрішнє теплове випромінювання, що розсіюється поверхнею ∂V в область V тіла, а третій – зовнішнє теплове випромінювання, яке проникає через поверхню в тіло. Другий доданок у правій частині другого рівняння (7) враховує внутрішнє випромінювання, що виходить через ∂V за межі області V , а третій – враховує зовнішнє випромінювання, яке відбивається поверхнею ∂V .

Наближення температури випромінювання. Інтегруючи рівняння перенесення випромінювання за змінною $\mathbf{s}$ у межах повного тілесного кута Ω та за змінною $\mathbf{v}$, одержуємо рівняння балансу енергії для ІЧ-випромінювання:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J}_r - W_r. \quad (8)$$

Тут u_r – густина енергії теплового випромінювання; $\mathbf{J}_r$ – його потік:

$$u_r = u_r(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{c} \int_{\partial V} \int_{\Omega} I_v(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) d\Omega(\mathbf{s}) dv, \quad \mathbf{J}_r = \mathbf{J}_r(\mathbf{r}, t) \equiv \int_{\partial V} \int_{\Omega} \mathbf{s} I_v(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) d\Omega(\mathbf{s}) dv. \quad (9)$$

Обмежуючись досить малими відхиленнями від локальної теплової рівноваги між випромінюванням і тілом та розглядаючи середовище стосовно його радіаційних властивостей як сіре, тобто приймаючи, що коефіцієнти K_v^e , K_v^a та S_v не залежать від частоти ν : $K_v^e = K^e$, $K_v^a = K^a$, $S_v = S$, подаємо інтенсивність випромінювання $I_v = I_v(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t)$ у вигляді лінійної функції змінної $\mathbf{s}$:

$$I_v(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) = I_{vb}(T_r(\mathbf{r}, t)) - \frac{1}{\beta} \frac{\partial I_{vb}(T_r(\mathbf{r}, t))}{\partial T_r} \nabla T_r \cdot \mathbf{s}, \quad (10)$$

де $T_r(\mathbf{r}, t)$ – локальна температура випромінювання; $\beta = K^a + S$. З урахуванням цього, з формул (9), (10) отримуємо

$$u_r = \frac{4\pi}{c} I_b(T_r), \quad \mathbf{J}_r = -\frac{4\pi}{3\beta} \frac{\partial I_b(T_r)}{\partial T_r} \nabla T_r, \quad W_r = K^a I_b(T_r) - K^e I_b(T), \quad (11)$$

де $I_b(T_r) \equiv n^2 \sigma_B T_r^4 / \pi$, $I_b(T) \equiv n^2 \sigma_B T^4 / \pi$, σ_B – стала Стефана – Больцмана; n – коефіцієнт заломлення ІЧ-випромінювання.

У результаті приходимо до такого рівняння на температуру випромінювання T_r :

$$c(T_r) \frac{\partial T_r}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha_r(T_r) \nabla T_r) - \frac{n^2 \sigma_B}{\pi} (K^a T_r^4 - K^e T^4). \quad (12)$$

Тут використано позначення $c_r(T_r) = 16n^2 \sigma_B c^{-1} T_r^3$, $\alpha_r(T_r) = 16n^2 \sigma_B (3\beta)^{-1} T_r^3$.

Отже, в такому наближенні перенесення енергії тепловим випромінюванням описується параметром T_r , означеним у просторі змінних $(\mathbf{r}, t)$, який задовольняє рівняння дифузійного типу (12).

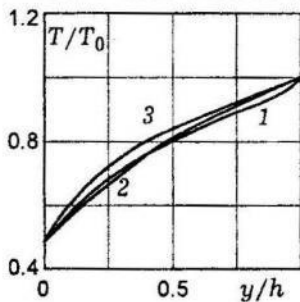
Розглядаючи внутрішню енергію u напівпровідника як функцію температури T та деформації ϵ , з рівняння (2) одержуємо

$$c_\epsilon(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha(T) \nabla T) + \frac{n^2 \sigma_B}{\pi} (K^a T_r^4 - K^e T^4) + W_J - \beta_T : \frac{\partial \epsilon}{\partial t}, \quad (13)$$

де $c_\epsilon(T) = (\partial u / \partial T)_\epsilon$, $\beta_T = (\partial u / \partial \epsilon)_T$.

Рівняння (12) та (13) утворюють математичну модель теплообміну в об'ємі напівпровідника у наближенні температури випромінювання.

Теплообмін у шарі, частково прозорому для ІЧ-випромінювання. Розглянемо шар $y \in [0, d]$, що частково прозорий для випромінювання в інфрачервоній області спектра і не розсіює інфрачервоне випромінювання. Шар нагрівається від абсолютно чорної поверхні $y = \text{const} > d$, що має задану температуру T_1 . Проміжок між поверхнею та шаром розглядаємо в наближенні вакууму. Поверхня і шар обмінюються теплом лише за рахунок променевого механізму. Поверхня шару $y = 0$ абсолютно чорна, а її температура фіксована $T = T_0$. Розглядаємо стаціонарний процес теплообміну і стан механічної рівноваги тіла. Обмежимося випадком малих відхилень температури в шарі від її значення T_0 , за якого характеристики матеріалу можна вважати незалежними від температури.



На рис. зображено розподіл температури в шарі, визначений за різними моделями: 1 – розв'язок рівнянь перенесення енергії та теплопровідності у точній постановці; 2 – у наближенні температури випромінювання і 3 – з використанням дифузійного наближення для рівняння перенесення випромінювання [2]. Як видно з цих результатів, модель температури випромінювання дає точніші результати, ніж дифузійне наближення.

1. Бурак Я. И., Чекурин В. Ф. Физико-механические поля в полупроводниках. Математические основы теории. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с.
2. Оцисик М. Н. Сложный теплообмен / Пер. с англ. под ред. Н.А. Анфимова. – М.: Мир, 1975. – 616 с.

Alexandra Fl'orko, Vasyl Chekurin

A NONLOCAL MODEL FOR HIGH-TEMPERATURE THERMOELASTOCITY

A nonlinear mathematical model of thermo-elasticity of semiconductors, that takes into account both heat conducting and ray heat energy exchange in the body volume and its surface, is considered. In the frame of the model the temperature field in the strip in nonlocal nonlinear formulation are studied.

Стаття надійшла до редколегії 28.06.99

Igor Ulitko

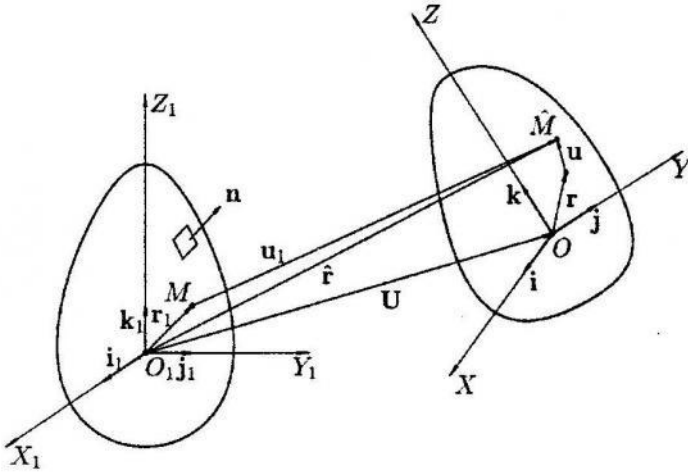
Taras Shevchenko Kyiv University

STEADY ROTATION OF ELASTIC SOLIDS: THE FIRST INTEGRAL OF EULER EQUATIONS AND ITS APPLICATION IN THE THEORY OF WAVE GYROSCOPES

Introduction. Dynamics of spatial motion of elastic solids. A thesis that elastic waves and vibrations in the solids suffer some qualitative and quantitative changes, if they move in the space, is a background of the theory of wave gyroscopes and its applications in technique. Generally, mathematical consideration in this field is restricted to the case of steady or uniformly accelerated rotation of the resonator about some fixed axis, and so, questions to be replied to are what effect this rotation brings in concrete eigenfrequency spectrum and how the picture of normal modes change. When these parameters of wave micro-motion are found for some operating regime it is suggested the problem is solved well. But, sometimes it may appear that the axis of rotation can also displace in the space with respect to initial unloaded state of a gyroscope. In absence of kinematical connections this displacement results in the precession of rotation axis, and if the resonator is clamped, some pendulum-like vibrations of a whole system may appear. Both effects are essentially the change of spatial macro-motion of a gyroscope due to wave micro-motion of a resonator. Such deduction follows from general theory of spatial motion of elastic solids [2]. Mathematical consideration of that theory is built on the principle of decomposition of complicated spatial motion of elastic solid in translational motion and relative motion (Galileo transform). Application of this transform to relations of time-depended elastic deformation results in mathematically closed boundary-valued problem, which realization requires consequent solution of coupled vector equations. These are generalized Lamé equation, which determine relative elastic displacements and Euler equation, which determine instant rotation of a relative coordinate system. Such equations have the same sense as their prototypes in classic elastodynamics and kinematics of rigid solids, but both are nonlinear due to the coupling of elastic displacements and components of a vector of angular velocity.

Lamé equation. Consider general statement. Suppose that in a moment $t > 0$ unbalanced external loads with the resultant of volume forces $\mathbf{P}$ and the resultant of surface forces $\mathbf{F}_n$ are applied to elastic solid. They will set a solid into complex spatial motion with the non-uniform, time-dependent bulk deformation. From the viewpoint of classic elasticity a boundary-valued problem, if formulated in absolute coordinate system, becomes non-linear and very complicated due to the large displacements of material points of a solid [3, 4].

The use of Galileo transform provides partial linearization of such problem. Let V_0 is a volume of elastic solid closed by the surface S_0 , both are in



the initial unloaded state, and let ρ_0 denotes its volume density. Choose the origin O_1 of the absolute coordinate system $O_1X_1Y_1Z_1$ in the center of inertia in the unloaded state, and introduce the relative coordinate system $OXYZ$, which corresponds to spatial motion of some absolutely rigid solid, having the same volume and density and subjected to the action of the same loads $\mathbf{P}$

and $\mathbf{F}_n$ (See Figure). The radius-vector $\hat{\mathbf{r}}$ of some point $\hat{M}$ in deformable state can be represented in two ways

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1 \quad \text{or} \quad \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{U} + \mathbf{r} + \mathbf{u}, \quad (1)$$

what gives

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{U} + \mathbf{r} + \mathbf{u} - \mathbf{r}_1. \quad (2)$$

In these formulae $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{u}_1$ determine initial position and absolute displacement of a point M in absolute coordinate system, $\mathbf{r}$ is the radius-vector of that point in relative system, and $\mathbf{u}$ are the relative displacements, describing small deviation of $\hat{M}$ from its initial position M . Displacement of the mass center $\mathbf{U}$ is determined from the equation

$$\rho_0 V_0 \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} = \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \oint_{S_0} \mathbf{F}_n ds + \iiint_{V_0} \mathbf{P} dv, \quad (3)$$

where $\mathbf{R}$ is resultant of external volume and surface forces. To perform decomposition of relations of elastic deformation with finite displacements [3, 4] according to vector equalities (1)–(3), we take into account the following relations between the unit vectors of relative and absolute coordinate systems

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{i}_1 \cos \alpha_1 + \mathbf{j}_1 \cos \beta_1 + \mathbf{k}_1 \cos \gamma_1, \\ \mathbf{j} &= \mathbf{i}_1 \cos \alpha_2 + \mathbf{j}_1 \cos \beta_2 + \mathbf{k}_1 \cos \gamma_2, \\ \mathbf{k} &= \mathbf{i}_1 \cos \alpha_3 + \mathbf{j}_1 \cos \beta_3 + \mathbf{k}_1 \cos \gamma_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Change of cosine functions of $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$, $\gamma_1(t)$... determines the instant rotation of a relative coordinate system with the vector of angular velocity $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{i}\Omega_x + \mathbf{j}\Omega_y + \mathbf{k}\Omega_z$. Then, generalized Lamé equation formulated in the relative coordinates takes the form

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} - \frac{1}{G} \left[\mathbf{P} - \frac{1}{V_0} \mathbf{R} \right] =$$

$$= \frac{\rho_0}{G} [\ddot{\mathbf{u}} + (\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + (\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{u}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) + 2(\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{u}})], \quad (5)$$

where ν is Poisson ratio and G is shear modulus. The use of this equation is to describe dynamic phenomena concerned with wave propagation in movable solids. It can be extended to steady and unsteady vibrations of thin-walled elements of wave gyroscopes.

Euler equations. At the first sight, Lamé equation (5) cannot be solved for relative displacements $\mathbf{u}$ until components of angular velocity $\boldsymbol{\Omega}$ are found. The most convenient method to establish an instant rotation of the relative coordinate system about a mass center O consist of application of the theorem of a change of angular momentum. So, taking into account (1) and assuming that $\mathbf{U}$ is already found from (3) we can write

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_0} \rho_0 \left[(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \frac{d'\mathbf{u}}{dt} \right) \right] dv = \mathbf{M}, \quad (6)$$

where

$$\mathbf{M} = \oint_{S_0} [(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \mathbf{F}_n] ds + \iiint_{V_0} [(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \mathbf{P}] dv \quad (7)$$

is a principal couple of external loads. After some transformations of (6) Euler equations can be represented in coordinate form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\Omega_x A - \Omega_y F - \Omega_z E] - \Omega_y \dot{f} + \Omega_z \dot{e} - \dot{d} + \Omega_y \Omega_z (C - B) - \Omega_x \Omega_y E + \\ + \Omega_x \Omega_z F - (\Omega_y^2 - \Omega_z^2) D = M_x, \\ \frac{d}{dt} [\Omega_y B - \Omega_z D - \Omega_x F] + \Omega_x \dot{f} - \Omega_z \dot{d} - \dot{e} + \Omega_x \Omega_z (A - C) + \\ + \Omega_x \Omega_y D - \Omega_x \Omega_z F - (\Omega_z^2 - \Omega_x^2) E = M_y, \\ \frac{d}{dt} [\Omega_z C - \Omega_x E - \Omega_y D] - \Omega_x \dot{e} + \Omega_y \dot{d} - \dot{f} + \Omega_x \Omega_y (B - A) + \\ + \Omega_x \Omega_z F - \Omega_y \Omega_z D - (\Omega_x^2 - \Omega_y^2) F = M_z, \end{aligned}$$

where

$$A(t) = \iiint_{V_0} \rho_0 [(y + u_y)^2 + (z + u_z)^2] dv, \quad B(t) = \dots, \quad C(t) = \dots, \quad (8)$$

are the principal moments of inertia about coordinate axes, and

$$D(t) = \iiint_{V_0} \rho_0 (y + u_y)(z + u_z) dv, \quad E(t) = \dots, \quad F(t) = \dots, \quad (9)$$

are the centrifugal moments of inertia. Quantities of the same dimension

$$d(t) = \iiint_{V_0} \rho_0 [(z + u_z)\dot{u}_y - (y + u_y)\dot{u}_z] dv, \quad e(t) = \dots, \quad f(t) = \dots, \quad (10)$$

set into Euler equations due to elastic deformation of a solid. To the best of

author's knowledge they have no conventional definition in the literature. Mathematical difficulties in the course of solution of classic Euler equations are well known. Moreover, in our case we collide with a necessity to determine components of relative displacements $\mathbf{u} = iu_x + ju_y + ku_z$ from the solution of Lamé equation (5). Therefore, both equations are coupled with quantities $\mathbf{u}$ and Ω .

First integral of Euler equations. Steady or uniformly accelerated rotation about fixed axis are two exceptions of such coupling. Usually, trivial solution of Euler equations are known beforehand and boundary-valued problems are formulated a priori for Lamé equation. Numerous works on the theory of wave gyroscopes (see for example [1]) are restricted essentially to this case. In other words, mutual influence and interaction between vibrations of a resonator (micro-motion) and rotational macro-motion of it are excluded in the statement of a problem. In particular, questions: how can wave processes or vibrations act towards a rotation of a solid and how significant this influence can be, remains unsolved in the literature. Further we consider one example of possible reply to these questions

Consider steady rotation of elastic solid about fixed axis. To realize such situation we must suggest that the solid once have been loaded by the self-balanced loads $\mathbf{P}$ and $\mathbf{F}_n$, in which case $\mathbf{M} = 0$. It clear up a way to simple integration of (6) in time

$$\iiint_{V_0} \rho_0 \left[(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \frac{d'\mathbf{u}}{dt} \right) \right] dv = \mathbf{K}, \quad (11)$$

where the kinetic momentum $\mathbf{K}$ is a constant vector. Simple transformations of (11) yield the first integral of Euler equations

$$\begin{aligned} \Omega_x A - \Omega_y F - \Omega_z E - d &= K_x, \\ -\Omega_x F + \Omega_y B - \Omega_z D - e &= K_y, \\ -\Omega_x E - \Omega_y D - \Omega_z C - f &= K_z, \end{aligned} \quad (12)$$

from which we can deduce: (i) under the specified distribution of external forces $\mathbf{P}$ and $\mathbf{F}_n$, which do not change the kinetic momentum $\mathbf{K}$, and (ii) under the specified values of relative elastic displacements, which arise in a solid due to the action of these forces, components of the angular velocity are determined from the first integral of Euler equations by simple algebraic operations.

Consider, for example, changes of angular velocity of a solid of revolution arising due to such loading. Choose the axes of coordinate system in the unloaded state in directions of principal axes of inertia and nominate OZ to be the axis of rotation. In this case centrifugal moments of inertia equal to zero, what simplifies a problem. The components of angular velocity in the state of free rotation are $\Omega_x = 0$, $\Omega_y = 0$, $\Omega_z = \Omega_0$, $\Omega_0 = \text{const}$. The components of displacements due to centrifugal force (static deformation) can be easily defined as this force is known. Let $u_x^{(0)}$, $u_y^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ are such displacements. Obvi-

ously $\dot{u}_x^{(0)} = \dot{u}_y^{(0)} = \dot{u}_z^{(0)} = 0$, as they are independent of time. Under such conditions $A^{(0)} = B^{(0)}$ and it follows from (8)–(10) that $K_x = 0$, $K_y = 0$, and $K_z = C^{(0)}\Omega_0$, where $C^{(0)}$ is the momentum of inertia about rotational axis. If we apply instantaneously some forces $\mathbf{F}_n$ this will give rise to disturbance of angular velocity Ω

$$\Omega = \mathbf{k}\Omega_0 + \tilde{\Omega} = \mathbf{i}\tilde{p} + \mathbf{j}\tilde{q} + \mathbf{k}(\Omega_0 + \tilde{r}) \quad (13)$$

and change relative elastic displacements, so that

$$u_x = u_x^{(0)} + \tilde{u}_x, \quad u_y = u_y^{(0)} + \tilde{u}_y, \quad u_z = u_z^{(0)} + \tilde{u}_z. \quad (14)$$

Now $\dot{u}_x = \dot{\tilde{u}}_x$, $\dot{u}_y = \dot{\tilde{u}}_y$, $\dot{u}_z = \dot{\tilde{u}}_z$. Substituting (15) in (9), and then in (12) we can write

$$\begin{aligned} \tilde{p}(t) &= \frac{\Omega_0}{A^{(0)}} \iiint_{V_0} \rho_0 (x \tilde{u}_z + z \tilde{u}_x) dv + \frac{1}{A^{(0)}} \iiint_{V_0} \rho_0 (z \dot{\tilde{u}}_y - y \dot{\tilde{u}}_z) dv, \\ \tilde{q}(t) &= \frac{\Omega_0}{B^{(0)}} \iiint_{V_0} \rho_0 (z \tilde{u}_y + y \tilde{u}_z) dv + \frac{1}{B^{(0)}} \iiint_{V_0} \rho_0 (x \dot{\tilde{u}}_z - z \dot{\tilde{u}}_x) dv, \\ \tilde{r}(t) &= -\frac{2\Omega_0}{C^{(0)}} \iiint_{V_0} \rho_0 (x \tilde{u}_x + y \tilde{u}_y) dv + \frac{1}{C^{(0)}} \iiint_{V_0} \rho_0 (y \dot{\tilde{u}}_x - x \dot{\tilde{u}}_y) dv, \end{aligned} \quad (15)$$

These formulae describe approximate magnitudes of small disturbances of angular velocity (13) and can be used in the design of solid-state sensors of angular velocity of different types.

1. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Волновой твердотельный гироскоп. – М.: Наука, 1985. – 126 с.
2. Улитко А. Ф. Пространственное движение упругих тел // Известия АН СССР. Механика тверд. тела. – 1990. – № 6. – С. 55–66.
3. Kappus R. Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen I // ZAMM. – 1939. – 19, № 5. – S. 271–285.
4. Kappus R. Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen II // ZAMM. – 1939. – 19, № 6. – S. 344–361.

Ігор Улітко

РІВНОМІРНИЙ ОБЕРТОВИЙ РУХ ПРУЖНОГО ТІЛА: ПЕРШИЙ ІНТЕГРАЛ РІВНЯНЬ РУХУ ЕЙЛЕРА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В ТЕОРІЇ ХВИЛЬОВИХ ГІРОСКОПІВ

Для випадку рівномірного обертального руху одержано прості формули, за допомогою яких оцінюють малі відхилення кутової швидкості обертання пружного твердого тіла, які виникають завдяки коливанням або поширенню пружних хвиль. Базовою моделлю для вивчення цього ефекту служить загальна теорія просторового руху пружних тіл.

Стаття надійшла до редколегії 26.08.99

Василь Шваб'юк, Володимир Максимович

Луцький державний технічний університет

**ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ НЕКЛАСИЧНИХ ТЕОРІЙ
ЗГИНУ ПЛАСТИН ЗА ЛОКАЛІЗОВАНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

1. Віднесемо пластину завтовшки $2h$ до декартової системи координат (x, y, γ) , в якій площина $\gamma = 0$ пристайна до її серединної поверхні. Розглянемо випадок, коли на торцевих поверхнях пластини виконуються такі граничні умови:

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma &= q^+ = q && \text{при } \gamma = +h; \\ \sigma_\gamma &= 0 && \text{при } \gamma = -h; \\ \tau_{\gamma x} &= \tau_{\gamma y} = 0 && \text{при } \gamma = \pm h.\end{aligned}\quad (1.1)$$

На основі співвідношень уточненої теорії пластин [4] нормальні переміщення навантаженої поверхні пластини можна визначити з рівності

$$W(x, y, h) = w(x, y) + \frac{1}{2} \frac{vh^2}{1-\nu} \Delta w + \frac{h}{E} A_0 q + \frac{h^3}{E} A'_0 \Delta q, \quad (1.2)$$

$$\text{де } A_0 = \frac{1+\nu}{16(1-\nu)} (13-16\nu+\nu^2), \quad A'_0 = \frac{\nu(2-\nu)}{64(1-\nu)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; $w(x, y)$ – переміщення серединної поверхні пластини. Переміщення $w(x, y)$ є розв'язком бігармонічного рівняння:

$$D\Delta^2 w = q - \varepsilon_1 \Delta q - \varepsilon_2 \Delta^2 q, \quad (1.3)$$

$$\text{де } \varepsilon_1 = \frac{8-3\nu}{10(1-\nu)} h^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{2-\nu}{40(1-\nu^2)} h^4, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}.$$

Треба зауважити, що в більшості прикладних теорій типу Тимошенка, які не враховують поперечного обтиснення, параметр ε_1 набуває дещо інших значень, параметр $\varepsilon_2 = 0$, а в рівності (1.2) всі члени, за винятком першого, також відсутні. Якщо обидва параметри (ε_1 і ε_2) дорівнюють нулю, то отримуємо випадок класичної теорії тонких пластин Кірхгофа.

Діючи на рівність (1.2) оператором Δ та беручи до уваги (1.3), одержуємо розрахункове рівняння для навантаженої поверхні пластини:

$$D\Delta^2 W = (1 - 0.8h^2\Delta)q + \delta_1 \Delta^2 q - \delta_2 \Delta^3 q, \quad (1.4)$$

$$\text{де } \delta_1 = \frac{0.49h^4}{(1-\nu^2)} (1 + 0.09\nu - 1.75\nu^2 (1 + 0.8\nu)), \quad \delta_2 = \frac{(2-\nu)\nu}{80(1-\nu^2)(1-\nu)} h^6.$$

Виконавши в рівнянні (1.4) заміну змінних у вигляді

$$W = F + (\delta_1 - \delta_2 \Delta) \frac{q}{D}, \quad (1.5)$$

отримаємо розрахункове рівняння

$$D\Delta^2 F = (1 - 0.8h^2\Delta)q. \quad (1.6)$$

Воно тотожне відповідному рівнянню (1.9), що виведе у праці [2] символічним методом, якщо замість функції $F(x, y)$ підставити складову переміщення $w_0(x, y, h)$.

2. Вираз для вертикального переміщення пластини $W(x, y, h)$ у тривимірній задачі теорії пружності можна записати символічно за А. І. Лур'є [1]. Якщо до цього виразу застосувати формулу розкладу М. Є. Ващенко-Захарченка [2], то він може спроститись до вигляду

$$W(x, y, h) = F(x, y) + \frac{h}{4G}(1 - \nu)q + \frac{h}{2G}P_2 - \frac{h}{2G}d^2Q_2, \quad (2.1)$$

$$\text{де } P_2 = \sum_i \frac{\varphi_2(\beta_i, 1)}{\sin^2 \beta_i} \cdot P_i, \quad Q_2 = \sum_i \frac{f_2(\alpha_i, 1)}{\cos^2 \alpha_i} q_i,$$

$$p_i(x, y) = -\frac{1}{2\pi h^2} \iint_S p(\xi, \eta) \cdot K_0\left(\beta_i \cdot \frac{r}{h}\right) d\xi d\eta,$$

$$q_i(x, y) = -\frac{1}{2\pi h^2} \iint_S p(\xi, \eta) \cdot K_0\left(\alpha_i \cdot \frac{r}{h}\right) d\xi d\eta, \quad (2.2)$$

$p = q/2$, $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$; $d^2 = h^2\Delta$; φ_2 , f_2 – функції, вирази для яких наведені в [2]; α_i , β_i – корені рівняння $\sin 2d \pm 2d = 0$, причому $\text{Re}(\alpha_i, \beta_i) > 0$; S – область, у якій $q \neq 0$, $K_0(2)$ – функція Макдональда; $F(x, y)$ – функція, що визначається з рівняння (1.6).

Представимо формули (2.2) в інтегральному вигляді

$$P_2(x, y) = \int p(\xi, \eta) F_a(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta,$$

$$Q_2(x, y) = \int p(\xi, \eta) F_s(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (2.3)$$

де

$$F_a = -\frac{1}{2\pi h^2} \sum_i \frac{\varphi_2(\beta_i, 1)}{\sin^2 \beta_i} K_0\left(\beta_i \frac{\rho}{h}\right), \quad F_s = -\frac{1}{2\pi h^2} \sum_i \frac{f_2(\alpha_i, 1)}{\cos^2 \alpha_i} K_0\left(\alpha_i \frac{\rho}{h}\right), \quad \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Відомо [3], що $\text{Re} \alpha_i \approx 2.11$, $\text{Re} \beta_i \approx 3.75$, а в наступних коренях дійсна частина зростає приблизно на величину π .

Враховуючи, що при великих ξ , для функцій $F_a(\rho)$ і $F_s(\rho)$ можна записати: $F_a(\rho) = 0(\exp(-3.75\rho))$, $F_s(\rho) = 0(\exp(-2.11\rho))$ при $\rho \rightarrow \infty$.

Тобто, у формулах (2.3) основна частина значення інтегралів є наслідком інтегрування на крузі з центром у точці (x, y) , радіус якого дорівнює товщині пластини.

З огляду на це, F_a і F_s є дельтоподібними функціями. Тому наближено приймаємо

$$F_j(x, y) \approx A_j \delta(x) \delta(y), \quad (j = a, s), \quad (2.4)$$

де A_j – деякі сталі.

Будемо визначати ці сталі так, щоб інтеграли від лівої та правої частин в (2.4) збігалися.

Такий підхід дає змогу отримати прості формули, які є досить точними, якщо функція $p(x, y)$ є повільно змінною.

Після інтегрування з (2.4) одержуємо

$$A_a = \sum_i \frac{\varphi_2(\beta_i, 1)}{\beta_i^2 \sin^2 \beta_i}, \quad A_s = \sum_i \frac{f_2(\alpha_i, 1)}{\alpha_i^2 \cos^2 \alpha_i}. \quad (2.5)$$

Для інтегрування використали формулу

$$\iint_{S^*} K_0 \left(\lambda \frac{r}{h} \right) ds = 2\pi \frac{h^2}{\lambda^2},$$

де S^* – нескінченна область.

Отже, використовуючи результати праці [2], наближено знаходимо

$$P_2 = A_a p(x, y), \quad Q_2 = A_s p(x, y),$$

де $A_a = \frac{81}{350}(1 - \nu)$, $A_s = 0$.

Як наслідок, формула (2.1) при $p(x, y) = q/2$ набуває вигляду

$$W(x, y, h) = F(x, y) + 1.23 h (1 - \nu) q / (4G). \quad (2.6)$$

Порівнюючи формули (1.5) і (2.6), бачимо, що при $\delta_2 \approx 0$, $\delta_1 (\nu = 1/3) = 1.3 h^4 / 3$ вони між собою дуже близькі і їх можна об'єднати однією формулою:

$$W(x, y, h) = F(x, y) + k_i h (1 - \nu) q / (4G), \quad (i = 1, 2), \quad (2.7)$$

де $k_1 = 1.3$ – відповідає уточненій теорії [4], $k_2 = 1.2, 3$ – асимптотичний формулі (2.6).

3. Для визначення переміщень у пластині від дії локалізованих навантажень скористаємось розв'язками задачі теорії пружності для самозрівноважених (головний вектор і момент дорівнюють нулю) сил P_j , що прикладені в точках (x_j, y_j) пластини. Такий розв'язок має вигляд

$$W(x, y) = \alpha \sum_{j=1}^N P_j \Phi^T(x - x_j, y - y_j), \quad (3.1)$$

де $\alpha = (1 - \nu) / (4\pi h G)$, $\Phi(x, y)$ – записана у явному вигляді функція.

Наприклад, у випадку знаходження розв'язку рівняння (1.6) ця функція дорівнює

$$\Phi^Y = \frac{1}{8\pi} (r^2 - 3.2h^2) \ln\left(\frac{r}{h}\right), \quad (3.2)$$

де $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$.

Для рівняння, яке описує згин тонких пластин Кірхгофа, ця функція набуває вигляду

$$\Phi^K = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln\left(\frac{r}{h}\right). \quad (3.3)$$

Повний розв'язок рівняння (1.6) в разі довільного навантаження $q(x, y)$ можна записати як

$$F = \frac{1}{D} \iint_S q(\xi, \eta) \Phi(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta. \quad (3.4)$$

Числові обчислення для переміщень в пластині виконаємо за її навантаження у трьох кругових областях радіусом R з центром у точках $(\pm l, 0)$, $(0, 0)$. У кожній з областей приймається параболічний розподіл зусиль, тобто

$$\frac{1}{q_0} q(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(1 - r_{1,2}^2/R^2\right) & \text{при } r_{1,2} < R; \\ 1 - r_0^2/R^2 & \text{при } r_0 < R, \end{cases}$$

де $r_{1,2}^2 = (x \pm l)^2 + y^2$; $r_0^2 = x^2 + y^2$.

Для знаходження інтегралів (3.1), (3.4) розроблено числовий алгоритм, який ґрунтується на кубатурних формулах від інтегралів, які мають інтегровані особливості. Результати підрахунку переміщень уздовж осі Ox при $l = R = h$ наведені в табл. 1. Чисельник відповідає відношенню $R/h = 2$, знаменник – $R/h = 1$. Значення у круглих дужках дорівнюють відносним похибкам у відсотках відповідних формул.

Таблиця 1

x/h	Точний розв'язок	Формула (2.7)	Теорія Кірхгофа
0	<u>198.96</u>	<u>198.18</u> (0.11)	<u>171.54</u> (13.78)
	57.415	58.692 (2.22)	44.717 (22.64)
2	<u>167.08</u>	<u>166.78</u> (0.18)	<u>149.64</u> (10.44)
	44.751	45.185 (0.97)	38.551 (13.85)
4	<u>110.45</u>	<u>110.52</u> (0.06)	<u>99.580</u> (9.84)
	30.264	30.690 (1.41)	25.600 (15.4)
6	<u>44.868</u>	<u>44.869</u> (0.00)	<u>40.481</u> (9.78)
	13.673	14.029 (2.60)	10.443 (23.6)
7.5	0	0	0

Як видно з табл. 1 уточнені рівняння (1.4), (2.6) є практично точними при розмірах площинки навантажень, більших за півтовщину пластини. Водночас точність класичної теорії тонких пластин Кірхгофа тут зовсім невелика.

З метою перевірки точності обчислень з використанням кубатурних формул наведемо аналітичний розв'язок рівняння Кірхгофа – Лява для випадку однієї області навантаження:

$$q = C \begin{cases} 1 - r^2/R^2, & r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

де C, R – сталі.

Після перетворень в (1.3), коли $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv 0$, знаходимо

$$w \frac{D}{CR^4} = \begin{cases} -\frac{r^6}{576} + \frac{\rho^2}{64}(\rho^2 + 1) - \frac{17}{576} + \frac{1}{48}(3\rho^2 + 1)\ln \rho, & \rho < 1; \\ \frac{1}{48}(3\rho^2 + 1)\ln \rho, & \rho > 1, \end{cases} \quad \rho = \frac{r}{R}. \quad (3.5)$$

Зазначимо, що вибравши $C = 2/(\pi R^2)$ і, зробивши граничний перехід при $R \rightarrow 0$ одержуємо значення функції $F(x, y)$, яке збігається з фундаментальним розв'язком (3.3) для зосередженої сили.

Результати підрахунку величини $\tilde{w} = Dw/(CR^4)$ за формулою (3.5) та основі формули (3.3) наведені в табл. 2.

Таблица 2

x/h	1	2	3	4
$\tilde{w}$	0.251	1.165	3.079	6.248
ε	1.001	1.001	0.999	0.999

Тут $\varepsilon = w_N/w$; w_N – значення величини (3.2), обчислене з використанням кубатурних формул з кроком $\delta = 0.25h$ і $R = 2h$.

Аналіз табл. 2 свідчить про те, що похибка кубатурної формули не перевищує 1%, і підтверджує достовірність результатів наведених у табл. 1.

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1995. – 492 с.
2. Максимович В. М. Напряженное состояние неравномерно нагретых, нагруженных по граничным поверхностям пластин // Прикл. математика и механика. – 1979. – 3, № 6. – С. 1066–1072.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 368 с.
4. Шваб'юк В. И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально изотропных плит // Прикл. математика. 1980. – 16, № 4. – С. 71–77.

Vasyl Shabyuk, Volodymyr Maksymovych

COMPARATIVE ANALYSIS OF PRECISION NONCLASSICAL THEORIES OF PLATE FOR BENDING UNDER LOCALIZED LOADING

The precision of nonclassical theories of isotropic plates bending which are under the action of localized loading is investigated. The solutions of the problem were obtained either with the help of specified theories of plates bending taking into account the transversal shear and the reduction deformation or in the framework of three-dimensional theory of elasticity. The examples of numerical calculations are presented.

Стаття надійшла до редколегії 29.09.99

Віталій Галазюк, Георгій Сулим

Львівський національний університет ім. І. Франка

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ СТОКСА ПРО ПОВІЛЬНЕ
СТАЦІОНАРНЕ ОБТІКАННЯ ТОНКОГО КРУТОВОГО ДИСКУ
ПОТОКОМ В'ЯЗКОЇ НЕСТИСЛОВОЇ РІДИНИ РОЗПОДІЛОМ
СИЛОВИХ ЧИННИКІВ У ЙОГО ПЛОЩИНІ**

Запропоновано новий підхід до моделювання задачі Стокса стосовно осесиметричного обтікання тонкого круглого диска потоком в'язкої нестислової рідини за малих чисел Рейнольдса. Суть підходу полягає у тому, що поля швидкостей і тиску подають у вигляді суперпозиції однорідного поля, яке визначається розв'язком однорідної системи рівнянь руху, і збуреного – від розподілених у площині диска масових сил і диполів. Причому воно повинно зникати на нескінченності. У праці з'ясовано, що взаємодію потоку в'язкої рідини з нерухомим жорстким диском можна змодельовати відповідним вибором густини розподілу масових сил у площині диска, характер взаємодії (регулярний чи сингулярний розподіл напружень і компонент вектора $\Omega = 0.5 \text{rot} v$) залежить від вихрового чи безвихрового характеру однорідного поля на нескінченності. Вихрова складова руху однозначно визначається розмірами диска, швидкості потоку на нескінченності і не залежить від в'язкості рідини.

1. Розподіл зосереджених чинників у площині простору в'язкої рідини. В основу проведених досліджень покладена лінеаризована система рівнянь руху

$$\text{grad} p + 2\mu \text{rot} \Omega = -\rho_0 F, \quad \Omega = 0.5 \text{rot} v, \quad \text{div} v = 0, \quad (1.1)$$

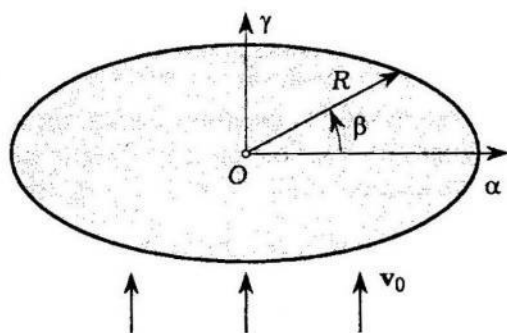


Схема задачі.

яка визначає [3, 4] стаціонарний рух в'язкої нестислової рідини за малих чисел Рейнольдса і наявності масової сили F . В осесиметричному випадку швидкість потоку $v = v(v_0 v_\alpha, 0, v_0 v_\gamma)$ і

$\Omega = \Omega(0, v_0 \omega_\beta / R, 0)$; тому у циліндричній системі координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$ з безрозмірними циліндричними координатами α, β, γ (див. рис.) система рівнянь

(1.1) у координатній формі набуде вигляду

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial v_\gamma}{\partial \alpha} \right) = -\frac{\rho_0 R}{p_0} X_\alpha, \quad \frac{\partial p}{\partial \gamma} - \frac{1}{\kappa^2} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\alpha \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial v_\gamma}{\partial \alpha} \right) \right] = -\frac{\rho_0 R}{p_0} X_\gamma; \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha v_\alpha) + \frac{\partial v_\gamma}{\partial \gamma} = 0, \quad (1.3)$$

де $p(\alpha, \gamma)$ – тиск; v_0, p_0, ρ_0 – характерні швидкість, тиск і густина; $\kappa = \sqrt{Rp_0/(\mu v_0)}$; μ – коефіцієнт в'язкості; R – характерна лінійна величина.

Компоненти вектора масових сил $\mathbf{F}$ та їхніх диполів за допомогою дельта-функції Дірака та її похідної [5] локалізуємо у площині $\gamma = 0$, задавши у вигляді інтегралів Ганкеля

$$X_\alpha(\alpha, \gamma) = \frac{2p_0}{R\rho_0\kappa^2} \delta'(\gamma) \int_0^\infty [\kappa^2 A(\xi) - \xi B(\xi)] J_1(\xi\alpha) d\xi; \quad (1.4)$$

$$X_\gamma(\alpha, \gamma) = \frac{2p_0}{R\rho_0\kappa^2} \delta(\gamma) \int_0^\infty [\kappa^2 A(\xi) + \xi B(\xi)] \xi J_0(\xi\alpha) d\xi \quad (1.5)$$

з наперед невідомою густиною розподілу, яка визначається функціями $A(\xi), B(\xi)$. Тут $\delta'(\gamma)$ – похідна від дельта-функції Дірака $\delta(\gamma)$; $J_0(\xi\alpha), J_1(\xi\alpha)$ – функції Бесселя першого роду нульового і першого порядку. Тоді розв'язок системи диференціальних рівнянь у частинних похідних (1.2) – (1.3) можна подати у вигляді:

$$v_\alpha(\alpha, \gamma) = \operatorname{sgn} \gamma \int_0^\infty [\xi B(\xi) - \kappa^2 A(\xi)] e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha) d\xi + \kappa^2 \gamma \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha) d\xi; \quad (1.6)$$

$$v_\gamma(\alpha, \gamma) = 1 - C\alpha^2 + \int_0^\infty \xi B(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi + \kappa^2 |\gamma| \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi; \quad (1.7)$$

$$p(\alpha, \gamma) = 4\kappa^{-2}C\gamma - 2\operatorname{sgn} \gamma \int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi, \quad (1.8)$$

де $\operatorname{sgn}(\gamma) = 1$ при $\gamma > 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$, $\operatorname{sgn}(\gamma) = -1$ при $\gamma < 0$; C – довільна стала, що визначає вихрову складову $C\alpha$ в однорідному потоці рідини. Зазначимо, що позаінтегральні члени у виразах (1.7), (1.8) є розв'язками однорідної системи (1.2)–(1.3) і визначають однорідні поля швидкостей і тиску у просторі течії в'язкої рідини за відсутності у ньому збурювальних чинників.

За відомими компонентами вектора швидкості і тиском можна обчислити усі інші характеристики течії в'язкої рідини. Зокрема,

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \gamma) = -4\kappa^{-2}p_0C\gamma + 2p_0 \left\{ \operatorname{sgn} \gamma \int_0^\infty [2A(\xi) - \kappa^{-2}\xi B(\xi)] \xi \times \right. \\ \left. \times e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi - \gamma \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi \right\}; \quad (1.9)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \gamma) = 2\mu \left\{ -C\alpha + \delta(\gamma) \int_0^\infty [\xi B(\xi) - \kappa^2 A(\xi)] e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha) d\xi - \right. \\ \left. - \int_0^\infty [\xi B(\xi) - \kappa^2 A(\xi)] \xi e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha) d\xi - \kappa^2 |\gamma| \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha) d\xi \right\}; \quad (1.10)$$

$$2\omega_{\beta}(\alpha, \gamma) = 2C\alpha + 2\delta(\gamma) \left\{ \int_0^{\infty} [\xi B(\xi) - \kappa^2 A(\xi)] e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha) d\xi + \right. \\ \left. + 2\kappa^2 \int_0^{\infty} \xi A(\xi) e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha) d\xi \right\}. \quad (1.11)$$

З виразів (1.6), (1.8)–(1.11) випливає, що розподіл (1.4), (1.5) масових сил спричиняє появу у площині $\gamma = 0$ стрибка швидкостей $v_{\alpha}(\alpha, \pm 0)$, тиску $p(\alpha, \pm 0)$, нормального напруження $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0)$, а також існування неперервних, хоча й сингулярних у площині $\gamma = 0$ значень дотичних напружень $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0)$ і компоненти повороту $\omega_{\beta}(\alpha, \pm 0)$, якщо тільки $\xi B(\xi) - \kappa^2 A(\xi) \neq 0$.

Зазначимо, що за умови

$$\xi B(\xi) = \kappa^2 A(\xi), \quad A(\xi) = \frac{PR\rho_0}{8\pi p_0} \quad (1.12)$$

вирази компонент вектора швидкості й тиску (1.6)–(1.8) дають змогу одержати розв'язок задачі про дію зосередженої масової сили

$$X_{\gamma}(\alpha, \gamma) = \frac{P\delta(\alpha)\delta(\gamma)}{2\pi\alpha} \quad (1.13)$$

в необмеженому просторі в'язкої рідини. При цьому

$$v_{\alpha}(\alpha, \gamma) = \frac{PR\rho_0\kappa^2}{8\pi p_0} \gamma \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi|\gamma|} J_1(\xi\alpha) d\xi = \frac{PR\rho_0\kappa^2}{8\pi p_0} \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)^3}}; \quad (1.14)$$

$$v_{\gamma}(\alpha, \gamma) = \frac{PR\rho_0\kappa^2}{8\pi p_0} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi + |\gamma| \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi \right\} = \\ = \frac{PR\rho_0\kappa^2}{8\pi p_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} + \frac{\gamma^2}{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)^3}} \right\}; \quad (1.15)$$

$$p_{\alpha}(\alpha, \gamma) = -\frac{2PR\rho_0}{8\pi p_0} \operatorname{sgn} \gamma \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi|\gamma|} J_0(\xi\alpha) d\xi = -\frac{2PR\rho_0}{8\pi p_0} \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)^3}}. \quad (1.16)$$

Як і треба було сподіватися, вираз складової вектора швидкості $v_{\gamma}(\alpha, \gamma)$ з точністю до сталого множника [2] збігається з вертикальною складовою вектора пружного переміщення у класичній задачі Кельвіна механіки деформівного твердого тіла за умови, що модуль зсуву матеріалу прямує до нуля.

2. Загальна постановка задачі Стокса. Знайдемо таку густину розподілу $A(\xi)$, $B(\xi)$ зосереджених чинників, щоб в області $0 \leq \alpha \leq 1$ площини $\gamma = 0$ внаслідок присутності нерухомого кругового диска виконувалися умови непроникності і прилипання, тобто

$$v_{\gamma}(\alpha, \pm 0) = 0, \quad v_{\alpha}(\alpha, \pm 0) = 0 \quad (0 \leq \alpha \leq 1, \gamma = 0). \quad (2.1)$$

Крайові умови (2.1) доповнимо фізично обґрунтованою умовою відсутності стрибка тиску у площині $\gamma = 0$ при $\alpha \in [1; \infty)$. Ця умова разом з (2.1) буде виконана, якщо тільки

$$\xi B(\xi) \equiv \kappa^2 A(\xi), \quad (2.2)$$

причому $A(\xi)$ внаслідок виразів (1.7), (1.9) та умови (2.1) є розв'язком парних інтегральних рівнянь

$$\kappa^2 \int_0^\infty A(\xi) J_0(\xi\alpha) d\xi = C\alpha^2 - 1 \quad (0 \leq \alpha \leq 1); \quad (2.3)$$

$$\int_0^\infty \xi A(\xi) J_0(\xi\alpha) d\xi = 0 \quad (1 \leq \alpha < \infty). \quad (2.4)$$

Їхній розв'язок заснуємо на властивостях розривних інтегралів Вебера-Шафхейтліна [1]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{J_\nu(\alpha\xi) J_\mu(\beta\xi)}{\xi^\lambda} d\xi &= \frac{\alpha^\nu \Gamma((\nu + \mu - \lambda + 1)/2)}{2^\lambda \beta^{\nu-\lambda+1} \Gamma((- \nu + \mu + \lambda + 1)/2) \Gamma(\nu + 1)} \times \\ &\times F\left(\frac{\nu + \mu - \lambda + 1}{2}; \frac{\nu - \mu - \lambda + 1}{2}; \nu + 1; \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \\ (0 \leq \alpha < \beta; \operatorname{Re}(\nu + \mu - \lambda + 1) > 0; \operatorname{Re} \lambda > -1); \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{J_\nu(\alpha\xi) J_\mu(\beta\xi)}{\xi^\lambda} d\xi &= \frac{\beta^\mu \Gamma((\nu + \mu - \lambda + 1)/2)}{2^\lambda \alpha^{\mu-\lambda+1} \Gamma((\nu - \mu + \lambda + 1)/2) \Gamma(\mu + 1)} \times \\ &\times F\left(\frac{\nu + \mu - \lambda + 1}{2}; \frac{-\nu + \mu - \lambda + 1}{2}; \mu + 1; \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) \\ (0 \leq \beta < \alpha; \operatorname{Re}(\nu + \mu - \lambda + 1) > 0; \operatorname{Re} \lambda > -1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

У виразах (2.5) і (2.6) $\Gamma(x)$ – гамма-функція, $F(a; b; c; x^2)$ – гіпергеометрична функція Гаусса, задана гіпергеометричним рядом

$$F(a; b; c; x^2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)x^{2k}}{\Gamma(c+k)k!} \quad (2.7)$$

з одиничним радіусом збіжності при $c - a - b > 0$, причому

$$\begin{aligned} F(a; b; c; 1) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (c-a-b > 0), \\ F(a; b; c; x^2) &= (1-x^2)^{c-a-b} F(c-a; c-b; c; x^2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Зауважимо, що при $a = -k$ або $b = -k$ ($k \in \mathbb{N}_0$) ряд (2.7) зводиться до полінома степеня $2k$ [1], який можна виразити через ортогональні поліноми Якобі.

Відзначимо такі властивості інтеграла Вебера-Шафхейтліна:

а) інтеграли (2.5) і (2.6) неперервні у точці $\alpha = \beta$ за умови $\lambda > 0$;

б) інтеграл (2.6) тотожно дорівнює нулю для всіх $\alpha > \beta$, якщо $\nu - \mu + \lambda + 1 = -2k$ ($k \in \mathbb{N}_0$).

Шукану функцію $A(\xi)$ подамо у вигляді ряду Неймана

$$A(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{J_{2n+p+1}(\xi)}{\xi^{p+1}}, \quad r > -1 \quad (2.9)$$

з неозначеними коефіцієнтами a_n . З огляду на властивості (2.6) розривного інтеграла Вебера – Шафхейтліна рівняння (2.4) виконується за довільних $p > -1$, а рівняння (2.3) після обчислення інтеграла (2.5) зведеться до функційного рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+0.5) F(n+0.5; -n-p-0.5; 1; \alpha^2)}{2^{p+1} \Gamma(n+p+3/2)} - \kappa^{-2} C \alpha^2 = -\kappa^{-2} \quad (0 \leq \alpha \leq 1). \quad (2.10)$$

Оскільки при $p = 0.5$ гіпергеометрична функція Гаусса $F(n+0.5; -n-1; 1; \alpha^2)$ вироджується у поліном степеня $2n$ ($k \in \mathbb{N}_0$). Тому при $p = 0.5$ ліва частина функційного рівняння (2.10) за довільної сталої C є рядом за повною системою функцій з невизначеними коефіцієнтами, який за апроксимаційною теоремою Вєрштрасса має єдиний набір коефіцієнтів для кожної неперервної на проміжку $0 \leq \alpha \leq 1$ правої частини. Зокрема, у розглядуваному випадку, прийнявши, що $a_n \equiv 0$ ($k \in \mathbb{N}$), при $n = 0$ одержимо рівняння стосовно коефіцієнта a_0 і сталої C :

$$a_0 \frac{\Gamma(0.5) \kappa^2}{2\sqrt{2}\Gamma(2)} (1 - \alpha^2/2) = C \alpha^2 - 1, \quad (2.11)$$

звідки

$$a_0 = -\frac{2\sqrt{2}}{\kappa^2 \sqrt{\pi}}, \quad C = 0.5. \quad (2.12)$$

Тому відповідно до формул (2.2) і (2.9)

$$\kappa^2 A(\xi) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{J_{3/2}(\xi)}{\xi^{3/2}}, \quad \xi B(\xi) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{J_{3/2}(\xi)}{\xi^{3/2}}, \quad (2.13)$$

де $J_{3/2}(\xi)$ – функцій Бесселя першого роду дробового порядку.

Отже, щоб одержати фізично несуперечливі розв'язки задачі про обтікання тонкого кругового диска потоком в'язкої нестисливої рідини в однорідному потоці, повинна бути присутня вихрова складова $C\alpha$ (див. (1.11)), яка не зникає на нескінченності [3] і однозначно визначається першою крайовою умовою (2.1), тобто тільки розмірами диска, швидкістю потоку v_0 і не залежить від в'язкості рідини.

Зазначимо, що при $p = 0.5$ і будь-якому іншому значенні сталої $C \neq 0.5$ функційне рівняння (2.10), а отже і рівняння (2.11) розв'язку не мають.

За відомими з (2.13) функціями $A(\xi)$, $B(\xi)$ та формулами (1.4) і (1.5) знайдемо закон розподілу масових сил $X_\gamma(\alpha, \gamma)$ і диполів $X_\alpha(\alpha, \gamma)$, які реалізують граничні умови (2.1) обтікання диска потоком в'язкої нестисливої рідини. Зокрема в області $0 \leq \alpha \leq 1$ площини $\gamma = 0$ одержимо

$$X_\alpha(\alpha, \gamma) \equiv 0, \quad X_\gamma(\alpha, \gamma) = -\frac{16p_0}{\pi R \rho_0 \kappa^2} \sqrt{1-\alpha^2} \delta(\gamma) \quad (0 \leq \alpha \leq 1, \gamma = 0); \quad (2.14)$$

$$X_\alpha(\alpha, \gamma) \equiv 0, \quad X_\gamma(\alpha, \gamma) \equiv 0 \quad (1 \leq \alpha < \infty, \gamma = 0). \quad (2.15)$$

Залежності ((2.10) і (2.11) підтверджують, що при $p = 0.5$ компоненти вектора масової сили є неперервними у точці $\alpha = 1$ і, як треба було очікувати, всі характеристики течії в'язкої рідини будуть у цій точці також неперервними.

3. Узагальнений постулат Жуковського-Чаплигіна. Знайдемо розподіл швидкостей, напружень і компоненти ω_β вектора $\Omega = 0.5 \text{rot} v$ у площині $\gamma = 0$ від зосереджених чинників, заданих законом (2.14), (2.15). Для цього у вирази (1.6), (1.7), (1.9)–(1.11) підставимо значення (2.13) функцій $A(\xi)$, $B(\xi)$. Після обчислення розривних інтегралів Вебера – Шафхейтліна за формулами (2.5) і (2.6) одержимо, що в області $0 \leq \alpha \leq 1$ площини $\gamma = 0$ (на поверхні диска)

$$v_\alpha(\alpha, \pm 0) = 0, \quad v_\gamma(\alpha, \pm 0) = 0; \quad (3.1)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = -\mu\alpha, \quad \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{8p_0}{\pi \kappa^2} \sqrt{1-\alpha^2}; \quad (3.2)$$

$$\omega_\beta(\alpha, \pm 0) = -\alpha \quad (3.3)$$

і в області $1 \leq \alpha < \infty$ площини $\gamma = 0$ (поза диском)

$$v_\alpha(\alpha, \pm 0) = 0, \quad v_\gamma(\alpha, \pm 0) = 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{\pi\alpha} \left[(2-\alpha^2)\alpha \arcsin \frac{1}{\alpha} + \alpha\sqrt{\alpha^2-1} \right]; \quad (3.4)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = -\mu\alpha, \quad \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = 0; \quad (3.5)$$

$$\omega_\beta(\alpha, \pm 0) = \alpha - \frac{4}{\pi} \left[\alpha \arcsin \frac{1}{\alpha} - \sqrt{1-\alpha^{-2}} \right]. \quad (3.6)$$

Під час побудови залежностей (3.4), (3.6) використали формулу підсумовування гіпергеометричної функції Гаусса

$$F(0, 5; 0, 5; 2, 5; \alpha^{-2}) = \frac{3}{4} \left[(2-\alpha^2)\alpha \arcsin \frac{1}{\alpha} + \alpha\sqrt{\alpha^2-1} \right]. \quad (3.7)$$

Формули (3.1)–(3.6) підтверджують виконання крайових умов (2.1), а також неперервність за змінною α усіх характеристик руху в'язкої рідини на краю диска $\alpha = 1$, $\gamma = 0$. Зокрема виконання умови

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \omega_\beta(\alpha, \pm 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 1-0} \omega_\beta(\alpha, \pm 0) \quad (3.8)$$

забезпечує несуперечливість запропонованого розв'язку задачі про течію в'язкої рідини на краю диска $\alpha = 1$, $\gamma = 0$ другій теоремі Гельмгольца щодо

збереження інтенсивності вихрових трубок [4]. Нормальне напруження $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0)$ також неперервне, тобто

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 1-0} \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0). \quad (3.9)$$

Зазначимо, що граничну рівність (3.8) можна було би вважати узагальненням на випадок в'язкої рідини класичного постулату Жуковського – Чаплигіна щодо течії ідеальної рідини в області з кутовою точкою [3, 4].

4. Розв'язок з класичною кореневою особливістю. Покажемо, що розв'язок поставленої задачі з класичною кореневою особливістю у виразі для компонент тензора напружень та вектора $\Omega = 0.5 \operatorname{rot} v$ можна одержати з результатів п. 2 як частковий випадок. Для цього вважатимемо, що однорідний потік в'язкої рідини є безвихровим, тобто стала $C \equiv 0$. Тоді функційне рівняння (2.6) стосовно невизначених коефіцієнтів a_n набуде вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+0,5) F(n+0,5; -n-p-0,5; 1; \alpha^2)}{2^{p+1} \Gamma(n+p+1,5)} = -\kappa^{-2} \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (4.1)$$

і його єдиний розв'язок внаслідок апроксимаційної теореми Вейерштрасса існує тільки при $p = -0.5$. Тому, вважаючи $a_n \equiv 0$ ($n \in \mathbb{N}$), одержимо

$$a_0 = -\frac{\sqrt{2}}{\kappa^2 \sqrt{\pi}} \quad (4.2)$$

і внаслідок рівності (2.2) та ряду (2.5)

$$\kappa^2 A(\xi) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{J_{1/2}(\xi)}{\xi^{1/2}}, \quad \xi B(\xi) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{J_{1/2}(\xi)}{\xi^{1/2}}. \quad (4.3)$$

За відомими функціями $A(\xi)$, $B(\xi)$ та формулами (1.4), (1.5) знайдемо закон розподілу масових сил $X_\gamma(\alpha, \gamma)$ і диполів $X_\alpha(\alpha, \gamma)$, які реалізують крайові умови (2.1) у припущенні, що однорідний потік в'язкої рідини у просторі без диску є безвихровим. Зокрема одержимо

$$X_\alpha(\alpha, \gamma) \equiv 0, \quad X_\gamma(\alpha, \gamma) = -\frac{8p_0}{\pi R \rho_0 \kappa^2} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \delta(\gamma) \quad (0 \leq \alpha \leq 1, \gamma = 0); \quad (4.4)$$

$$X_\alpha(\alpha, \gamma) \equiv 0, \quad X_\gamma(\alpha, \gamma) \equiv 0 \quad (1 < \alpha < \infty, \gamma = 0). \quad (4.5)$$

Тепер з'ясуємо розподіл швидкостей, напружень і компоненти ω_β вектора Ω у площині $\gamma = 0$ від зосереджених чинників, заданих законом (4.5) і (4.6). Для цього у вирази (1.6), (1.7), (1.9)–(1.11) підставимо значення (4.3) функцій $A(\xi)$, $B(\xi)$. Після обчислення розривних інтегралів Вебера – Шафхейтліна за формулами (2.5) і (2.6) одержимо, що в області $0 \leq \alpha < 1$ площини $\gamma = 0$

$$v_\alpha(\alpha, \pm 0) = 0, \quad v_\gamma(\alpha, \pm 0) = 0; \quad (4.6)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = 0, \quad \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = \mp \frac{4p_0}{\pi\kappa^2} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}; \quad (4.7)$$

$$\omega_\beta(\alpha, \pm 0) = 0 \quad (4.8)$$

і в області $1 \leq \alpha < \infty$ площини $\gamma = 0$

$$v_\alpha(\alpha, \pm 0) = 0, \quad v_\gamma(\alpha, \pm 0) = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{\alpha}; \quad (4.9)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \pm 0) = 0, \quad \sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0) = 0; \quad (4.10)$$

$$\omega_\beta(\alpha, \pm 0) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}. \quad (4.11)$$

Формули (4.5) і (4.6) свідчать, про те що за виконання крайових умов (2.1) припущення про безвихровий рух однорідного потоку в'язкої спричиняє сингулярний розподіл напружень $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \pm 0)$ на поверхні диска, а також розривний характер вихрового руху у площині $\gamma = 0$, що призводить до порушення граничної рівності (3.8).

Отже, для того щоб під час обтікання тіла з кутовою точкою стаціонарним потоком в'язкої нестисливої рідини за малих чисел Рейнольдса уникнути сингулярності напружень і забезпечити у кутовій точці неперервність компонент вектора Ω необхідно спричинити на нескінченності детерміновану завихреність однорідного потоку рідини.

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 757 с.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
5. Шварц Л. Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965. – 412 с.

Vitaliy Galazyuk, Heorhiy Sulym

MATHEMATICAL MODELLING OF THE STOKES PROBLEM ON SLOW STATIONARY FLOWING AROUND THIN DISC BY A FLOW VISCOUS NONCOMPRESSIBLE LIQUID BY DISTRIBUTION OF FORCE FACTORS IN ITS PLANE

In the Stokes problem on axis-symmetric flowing around thin disc by a flow of viscous fluid with small Reynolds numbers we propose to represent the velocity and pressure fields as a superposition of a homogeneous field determined by a solution of homogeneous system of motion equations and a perturbed one, by distributed in the disc plane mass forces and dipoles. Whether the torsion and rotation distribution is regular or singular depends on curly or curliness character of the homogeneous field at infinity.

Стаття надійшла до редколегії 16.09.99

ЗМІШАНІ ЗАДАЧІ НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУР**Третій українсько-польський науковий симпозіум**

З 7 до 10 вересня 1999 р. у місті Львові працював Третій українсько-польський науковий симпозіум «Змішані задачі неоднорідних структур» з проблем моделювання статичного та динамічного поводження композитних матеріалів, геомеханіки, середовищ з тріщинами і тонкими жорсткими та пружними неоднорідностями, явищ контактної взаємодії, дифузії, тепловідведення внаслідок тертя, теплопередачі, втоми тощо. Симпозіум відбувався у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Співорганізаторами симпозіуму були Львівський та Варшавський університети, головували на ньому відомі фахівці з питань механіки структурно неоднорідних деформівних твердих тіл і рідких середовищ проф. Г. Сулим (голова), чл.-кор. НАН України, проф. Г. Кіт (заступник голови), проф. С. Матисяк (заступник голови), проф. В. Божидарник, проф. Ч. Возняк, д-р техн. наук М. Делявський, проф. З. Олесьяк (члени оргкомітету). У роботі симпозіуму взяли участь 72 наукові працівники та аспіранти навчальних та наукових осередків України та Польщі: Львівського національного університету імені Івана Франка, Державного університету «Львівська політехніка», Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львівської комерційної академії, Луцького державного технічного університету, Львівського обласного науково-методичного інституту освіти, Бережанського агротехнічного коледжу, Варшавського університету, Варшавського технологічного університету, Національного аграрного університету (Варшава), Технічного університету в Лодзі, Сільськогосподарської академії в Бидгощах, Технічного університету в Ченстохові, Сілезійського технічного університету, Варшавського сільськогосподарського університету, Бялостоцького політехнічного інституту, Щецинського технічного університету.

Конференцію відкрив проф. Г. Сулим. Учасників привітали проректор Львівського національного університету доц. В. Височанський та декан механіко-математичного факультету доц. Я. Притула.

Упродовж п'яти днів відбулося 7 робочих сесій, на яких було заслухано 50 доповідей, які зацікавили присутніх.

Учасники симпозіуму мали змогу ознайомитися з матеріальною базою, науковою та навчальною діяльністю кафедри механіки Львівського національного університету, неформально поспілкуватися та відвідати пам'ятні місця Львова та Жовкви, покласти квіти до хреста, встановленого на місці розстрілу фашистами у липні 1941 р. представників львівської інтелігенції та членів їхніх сімей.

Українсько-польські (польсько-українські) симпозіуми «Змішані задачі неоднорідних структур», започатковані 1995 р. у Шацьку – Львові та продовжені у Варшаві (1997), вже традиційно збирають переважно працівників

освітянської науки, до яких долучаються і представники академічних науково-дослідних установ обох країн. Такі зустрічі свідчать не лише про суттєве розширення тематики, а й про те, що спілкування на попередніх форумах виявилось дуже плідним. Серед виголошених доповідей були й такі, що допомогли вирішити порушені тоді проблеми.

На симпозіумі неодноразово висловлювалися побажання і надалі організовувати такі двосторонні зустрічі, оскільки є очевидною користь від наукового та неофіційного спілкування польських та українських педагогів і науковців, сприяє зміцненню людських стосунків. Запропоновано поглибити наукову тематику майбутнього симпозіуму, звернувшись до ускладнення математичних моделей, вирішення практично важливих завдань, зокрема у геофізиці, детальніше з'ясовувати механічні ефекти.

Наступна конференція запланована у вересні 2001 року в м. Лодзі на базі Технічного університету.

професор Г. Сулим
ст. наук. співроб. Ю. Пир'єв

ЗМІСТ

Божидарник Віктор, Максимович Олеся Інтегральні рівняння першої основної задачі для анізотропних пружних пластинок з отворами і тріщинами	3
Сулим Георгій, Опанасович Віктор, Драпака Володимир Граничне значення коефіцієнтів інтенсивності напружень для двох вертикально зсунутих ідентичних тріщин у пластині	7
Качинський Андрій, Матисяк Станіслав Застосування термопружності з мікролокальними параметрами до деяких задач щодо тріщин і жорстких включень у композитах	11
Делявський Михайло, Опанасович Віктор, Подхорецькі Адам Міцність структурно-неоднорідного матеріалу зі стохастично розподіленими неідеально гострими тріщинами	17
Сорокати́й Юрій Оптичний метод визначення початкового шляху поширення тріщини	22
Опанасович Віктор Про комплексні потенціали антиплоскої задачі для ізотропного тіла з періодичною системою прямолінійних тріщин ...	26
Древко Ян Аналіз коливань балок з тріщинами	30
В'єжицький Еварист, Возняк Чеслав Дисперсійні моделі стільникових композитів	35
Томчик Барбара Масштабний ефект за вібрації мезоструктурних циліндричних оболонок	40
Конечний Сильвестр, Євтушенко Олександр Макродинаміка пружних мікро-неперіодичних композитів	51
Цілецька Івона Континуальне моделювання динамічних задач для сіткових пластин	55
Рихлевська Іовіта, Шимчик Іоланта, Возняк Чеслав Дискретна модель поширення хвиль у періодичних композиційних матеріалах ..	64
Єндрисяк Ярослав Про функції мезоформи в структурній динаміці тонких періодичних пластин	71
Барон Євгеній Динаміка пластин з одновісною періодичною структурою	80
Міхалак Богдан Про вибір функцій мікроформи для динамічної поведінки хвилястих пластин	86
Матисяк Станіслав, Мешковський Радослав Дифузійні процеси в періодично шаруватих пружних тілах	92
Делявський Михайло, Нагурко В'єслав, Кравчук Максим Метод розрахунку напружено-деформованого стану шаруватих балок	96
Нагурко В'єслав, Зелінські Ярослав Про моделювання теплопровідності у пластинах, утворених періодично неоднорідними шарами	100
Возняк Маргарита, Паук Володимир Плоскі контактні задачі для шару на комбінованій основі	106
Матисяк Станіслав, Євтушенко Олександр, Зеленьяк Володимир Про нестационарні термопружні задачі періодично шаруватих композитів	110

Голась Єжи Числовий аналіз товстих багатошарових композитних опорних балок з використанням схеми гібридних скінченних елементів у напруженнях	114
Турчин Ольга Перехідні осесиметричні температурні напруження у багатошаровому півпросторі	119
Пир'єв Юрій, Олесья Збігнєв Фрикційне теплоутворення під час руху пружного тіла типу «зчеплення-ковзання»	123
Кушнір Роман Термопружний стан кусково-однорідної структури з нестационарним фрикційним теплоутворенням	127
Євтушенко Олександр, Конєчний Сильвестр, Чаповська Роксолана Визначення температури у рейці під час ковзання колеса	131
Паук Володимир Контактна задача з теплоутворенням для півпростору з прямокутно хвилястою поверхнею	135
Семерак Віктор Температура поверхні тертя під час гальмування	139
Краснюк Петро Термопружна контактна взаємодія кільця та циліндра за фрикційного теплоутворення	143
Кульчицький-Жигайло Роман Контактні задачі з урахуванням теплоутворення для неоднорідних тіл	148
Качинський Ричард, Трицінський Єжи Мікроструктуральна неоднорідність льодовикових ґрунтів (валунових глин)	152
Трицінський Єжи, Качинський Ричард Неоднорідність фізичних властивостей льодовикових ґрунтів (валунових глин)	158
Кіт Григорій, Монастирський Богдан Про термопружний контакт двох півпросторів з однакових матеріалів за наявності поверхневого дефекту	161
Пир'єв Юрій, Мокрик Роман Дослідження стійкості термопружного контакту двох тіл	164
Мартиняк Ростислав, Криштафович Андрій, Мачишин Ігор Односторонній контакт тіл з узгодженими поверхнями за дії джерел і стоків тепла	169
Гачкевич Олександр, Михайлишин Віра Числове дослідження пружно-пластичної поведінки складених механічних систем	174
Сулим Георгій, Фльорко Михайло, Чекурін Василь Залишкові напруження в кусково-однорідному порожнистому циліндрі	178
Фльорко Олександра, Чекурін Василь Нелокальна модель високотемпературної термопружності напівпровідників	183
Улітко Ігор Рівномірний обертовий рух пружного тіла: перший інтеграл рівнянь руху ейлера та його застосування в теорії хвильових гіроскопів	187
Шваб'юк Василь, Максимович Володимир Порівняльний аналіз точності неklasичних теорій згину пластин за локалізованих навантажень	192
Галазюк Віталій, Сулим Георгій Математичне моделювання задачі Стокса про повільне стаціонарне обтікання тонкого кругового диску потоком в'язкої нестислової рідини розподілом силових чинників у його площині	197
Хроніка	205

CONTENTS

Bozhydarnyk Victor, Maksymovych Olesia Integral equations of the first base problem for non-anisotropic elastic plates with holes and cracks . .	3
Sulym Heorhiy, Opanasovych Victor, Drapak Volodymyr The limiting SIF values for two vertically shifted identical cracks in a plate	7
Kaczyński Andrzej, Matysiak Stanisław Applications of the thermoelasticity with microlocal parameters in certain three-dimensional interface crack and rigid inclusion problems in composites	11
Delyavsky Mykhailo, Opanasovych Victor, Podhorecki Adam The strength of structurally-nonhomogeneous material with the stochastically distributed imperfectly sharp cracks	17
Sorokaty Yuriy Optimal methods for prediction of the initial crack extension	22
Opanasovych Victor On complex potentials of antiplane problems for isotropic body with periodic system of rectilinear cracks	26
Drewko Jan Vibration analysis of beams with cracks	30
Wierzbicki Ewaryst, Woźniak Czesław A dispersive model of honeycomb based composites	35
Tomczyk Barbara Length-scale versus asymptotic model in dynamics of thin substructured cylindrical shells	40
Konieczny Sylwester, Yevtushenko Alexander Macro-dynamics of elastic micro-nonperiodic composites	51
Cielecka Iwona Continuum modelling the dynamic problems for lattice-type plates	55
Rychlewska Jowita, Szymczyk Jolanta, Woźniak Czesław A discrete model for wave propagation problems in periodic composite media . .	64
Jędrusiak Jarosław On mesoscale functions in structural dynamics of thin periodic plates	71
Baron Yevheniy The dynamics of plates with uniaxial periodical structure	80
Michalak Bohdan On a choice of micro-shape functions for a dynamic behaviour of wavy plates	86
Matysiak Stanisław, Mieszkowski Radosław Diffusoelasticity of periodically stratified bodies	92
Delyavsky Mykhailo, Nagórko Wiesław, Kravchuk Maksym The method of stress-strain state calculation of the multilayered orthotropic beams	96
Nagurko Wyeslav, Zelins'ki Yaroslav On heat conduction modelling in plates formed by periodically nonhomogeneous layers	100
Woźniak Margaret, Pauk Volodymyr Plane contact problems for a layer resting on the combined foundation	106
Matysiak Stanisław, Yevtushenko Alexander, Zelenjak Volodymyr On nonstationary thermoelastic problems of periodic layered composites .	110
Golaś Jerzy Numerical analysis of thick multilayer laminated beams with hybrid-stress finite elements application	114

Turchyn Olga Axisymmetric transient thermal stress analysis of a multi-layered halfspace	119
Pyryev Yuriy, Olesiak Zbignev Generation of frictional heat in a «stick-slip» relative motion of elastic solids	123
Kushnir Roman Thermoelastic state of piecewise-homogeneous structure involving nonstationary frictional heating	127
Yevtushenko Alexander, Konieczny Sylvester, Chapovska Roksolana Determination of temperature in rail during sliding of wheel	131
Pauk Volodymyr Contact problem with the frictional heating for a half-space and a punch with boundary rectangular-shape waviness	135
Semerak Victor Temperature of the frictional surface during braking	139
Krasnyuk Peter Thermoelastic contact interaction between the ring and the cylinder under the frictional heat generation	143
Kulchytsky-Zhyhailo Roman Contact problems with heat generation for nonhomogeneous bodies	148
Kaczyński Ryszard, Trzeciński Jerzy Microstructural nonhomogeneity of glacial tills	152
Trzeciński Jerzy, Kaczyński Ryszard Nonhomogeneity of the physical properties of glacial tills	158
Kit Hrygoriy, Monastyrskyy Bohdan On thermoelastic interaction of two half-spaces of the same materials with allowance for axisymmetric surface defect	161
Pyryev Yuriy, Mokryk Roman Investigation of stability of thermoelastic contact for two bodies	164
Martynyak Rostyslav, Kryshchak Andrew, Machyshyn Igor Unilateral contact of bodies with conforming surfaces under an action of heat sources and sinks	169
Gachkevych Alexander, Myhaylyshyn Vira Numerical investigation for elastic-plastic behavior of compound mechanical systems	174
Sulym Heorhiy, Fl'orko Mychaylo, Chekurin Vasyl Residual stresses in piece-wise homogeneous hole cylinder	178
Fl'orko Alexandra, Chekurin Vasyl A nonlocal model for high-temperature thermoelastocity	183
Ulitko Igor Steady rotation of elastic solids: the first integral of Euler equations and its application in the theory of wave gyroscopes	187
Shabyuk Vasyl, Maksymovych Volodymyr Comparative analysis of precision nonclassical theories of plate for bending under localized loading	192
Galazyuk Vitaliy, Sulym Heorhiy Mathematical modelling of the Stokes problem on slow stationary flowing around thin disc by a flow viscous noncompressible liquid by distribution of force factors in its plane	197
Chronicle	205

Збірник наукових праць
ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 55

Видається з 1965 року

Підписано до друку. 24.11.1999. Формат 70x100/16. Папір друк.
Обл.-вид. арк. 11.4. Гарнітура Journal. Наклад 200 прим. Зам. № 219.

Видавничий центр Львівського національного університету імені Івана Франка
79000 Львів, вул. Дорошенка, 41

