ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.12–19

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.12–19

УДК 519.21

Анатолій Боротюк

ЗБУРЕНІ ПРИБУТОК ТА РИЗИК У СЕРЕДОВИЩІ, ЩО ОПИСУЄТЬСЯ НАПІВМАРКІВСЬКИМ ПРОЦЕСОМ

У цій праці ми дослідимо швидкості збіжності збуреного прибутку та збуреного ризику в середовищі, що описується напівмарківським процесом. В праці Шарпа [1] йдеться, зокрема, про обчислення середньоочікуваних прибутків та ризиків як окремих цінних паперів, так і цілих їх портфелів. У [2]-[4] окремі розділи присвячені теорії відновлення, ланцюгам Маркова, марківським процесам. Крім того, у праці [3] детально розглянуто напівмарківські процеси. Дослідження асимптотики за шкалою нескінченно малих для перонового кореня проведено у статті [5]. У статті [6] досліджено швидкість збіжності збурених прибутку та ризику для випадкового середовища Ω, що розбивається на N несумісних подій. Кожна i-ва подія полягає в одержанні прибутку r_i, $i = 1 \div N$. У праці [7], на відміну від [6], середовище описується ланцюгом Маркова.

Прибутковість акцій, облігацій та інших цінних паперів є залежною від того економічного стану, в якому опинилась компанія чи фірма, які випустили цей цінний папір. Стани, в яких може перебувати фірма чи компанія, позначатимемо $E = \{1, \ldots, N\}$. Зміна стану, в якому є фірма, описується напівмарківським процесом $\xi(t)$ з напівмарківською матрицею $Q(x)$ і початковим розподілом $p = \{p_i, i \in E\}$ [3].

Нехай $F_{ij}(t)$ – ймовірність переходу зі стану i в стан j за час t.

$$F_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j/\xi(0) = i\}.$$

Тоді середньоочікуваний прибуток $\overline{r}_i(t)$ у момент часу t за умови, що в початковий момент часу ми перебували в стані i, обчислюється за формулою

$$\overline{r}_i(t) = \sum_{j \in E} r_j F_{ij}(t),$$

де r_j – прибуток, який отримає фірма, перебуваючи в стані j [1].

Перехідні ймовірності $F_{ij}(t)$, згідно з [3], є розв'язками таких рівнянь марківського відновлення:

$$F_{ij}(t) = \delta_{ij}(1 - P_i(t)) + \sum_{k \in E} \int_0^t Q_{ik}(dx) F_{kj}(t - x),$$

де

$$P_i(t) = \sum_{j \in E} Q_{ij}(t) \tag{1}$$

– функція розподілу часу перебування процесу $\xi(t)$ в стані i.

Отже, середньоочікуваний прибуток $\overline{r}_i(t)$ є розв'язком наступного рівняння марківського відновлення

$$\overline{r}_i(t) = r_i(1 - P_i(t)) + \sum_{k\in E} \int\limits_0^t Q_{ik}(dx)\overline{r}_k(t-x), \tag{2}$$

де $Q_{ik}(dx) = P\{\xi(\tau_n) = k, (\tau_n - \tau_{n-1}) \in dx/\xi(\tau_{n-1}) = i\}$, τ_i – моменти марківського відновлення. Тоді розв'язок рівняння (2) шукаємо за формулою

$$\overline{r}_i(t) = \sum_{k\in E} \int\limits_0^t R_{ik}(dx) r_k(1 - P_k(t-x)),$$

де $R(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Q^{(n)}(t)$ – матриця марківського відновлення, $Q^{(n)}(t)$ – n-кратна згортка напівмарківської матриці $Q(t)$.

Вважаємо, що середовище залежить від деякого параметра ε. Тобто воно описується збуреним напівмарківським процесом $\xi^\varepsilon(t)$ із збуреною напівмарківською матрицею $Q(\varepsilon, t)$, причому $Q(\varepsilon,t) \to Q(t)$, при $\varepsilon \to 0$. Аналогічно r_j^ε –збурений прибуток, $r_j^\varepsilon \to r_j$, при $\varepsilon \to 0$.

Нехай є правильними зображення:

$$Q_{ij}(\varepsilon,t) = Q_{ij}(t) + \alpha_{1ij}(t)\delta_1(\varepsilon) + \dots + \alpha_{pij}(t)\delta_p(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon)), \tag{3}$$

$$r_j^\varepsilon = r_j + \lambda_{1j}\delta_1(\varepsilon) + \dots + \lambda_{pj}\delta_p(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon)), \tag{4}$$

де $\alpha_{kij}(t)$ – коефіцієнти, які залежать лише від часу, λ_{kj} – скалярні коефіцієнти, $i,j = 1 \div N$, $k = 1 \div p$, $\delta_1(\varepsilon), \dots, \delta_p(\varepsilon)$ – шкала нескінченно малих, така, що $\delta_k(\varepsilon) = o(\delta_{k-1}(\varepsilon))$, $k = 2 \div p$, $\delta_1(\varepsilon) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$. Надалі будемо також використовувати такі позначення:

$$\alpha_{0ij}(t) = Q_{ij}(t), \qquad \lambda_{0j} = r_j, \qquad \delta_0(\varepsilon) = 1.$$

Твердження. *1) Для довільного натурального n n-кратна згортка $Q^{(n)}(\varepsilon,t)$ збуреної напівмарківської матриці збігається до n-кратної згортки $Q^{(n)}(t)$ незбуреної напівмарківської матриці $Q^{(n)}(\varepsilon,t) \to Q^{(n)}(t)$, при $\varepsilon \to 0$.*
2) Для функції розподілу часу перебування збуреного напівмарківського процесу $\xi^\varepsilon(t)$ в стані i відбувається зображення

$$P_i(\varepsilon,t) = P_i(t) + \sum_{s=1}^{p}\left(\sum_{j\in E} \alpha_{sij}(t)\right)\delta_s(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon)). \tag{5}$$

3) Збурену матрицю марківського відновлення $R(\varepsilon,t)$ можна зобразити у вигляді суми:

$$R(\varepsilon,t) = R(t) + A(\varepsilon,t), \tag{6}$$

де $A(\varepsilon,t) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$.

Доведення. 1) За індукцією легко показати, що компоненти n-кратної згортки збуреної напівмарківської матриці можна зобразити у вигляді

$$Q_{ij}^{(n)}(\varepsilon,t) = Q_{ij}^{(n)}(t) + \sum_{\substack{s_1,\dots,s_n=0\\ s_1+\dots+s_n\neq 0}}^{p} \sum_{k_1,\dots,k_{n-1}\in E} \int\limits_0^t \int\limits_0^{dx_{n-1}} \cdots \int\limits_0^{dx_2} \alpha_{s_1ik_1}(dx_1)\times$$

$$\times\, \alpha_{s_2k_1k_2}(dx_2 - x_1)\alpha_{s_3k_2k_3}(dx_3 - x_2)\ldots\alpha_{s_nk_{n-1}j}(t - x_{n-1})\delta_{s_1}(\varepsilon)\ldots\delta_{s_n}(\varepsilon) + {} + o(\delta_p(\varepsilon)). \tag{7}$$

При $n = 2$ маємо

$$Q_{ij}^{(2)}(\varepsilon, t) = \sum_{k_1\in E}\int_0^t Q_{ik_1}(\varepsilon, dx)Q_{k_1j}(\varepsilon, t - x). \tag{8}$$

В останній формулі (8) використаємо зображення (3). Тоді отримаємо, що

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{(2)}(\varepsilon, t) &= \sum_{k_1\in E}\int_0^t \left[Q_{ik_1}(dx) + \sum_{s_1=1}^{p}\alpha_{s_1ik_1}(dx)\delta_{s_1}(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon))\right]\times \\ &\times \left[Q_{k_1j}(t - x) + \sum_{s_2=1}^{p}\alpha_{s_2k_1j}(t - x)\delta_{s_2}(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon))\right] = \\ &= Q_{ij}^{(2)}(t) + \sum_{\substack{s_1,s_2=0\\ s_1+s_2\neq 0}}^{p}\sum_{k_1\in E}\int_0^t \alpha_{s_1ik_1}(dx)\alpha_{s_2k_1j}(t - x)\delta_{s_1}(\varepsilon)\delta_{s_2}(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon)). \end{aligned} \tag{9}$$

Для трикратної згортки, враховуючи зображення (3) і формулу (9), правильні такі рівності

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{(3)}(\varepsilon, t) &= \sum_{k_2\in E}\int_0^t Q_{ik_2}^{(2)}(\varepsilon, dx_2)Q_{k_2j}(\varepsilon, t - x_2) = \sum_{k_2\in E}\int_0^t \Bigg[Q_{ik_2}^{(2)}(dx_2) + \\ &+ \sum_{\substack{s_1,s_2=0\\ s_1+s_2\neq 0}}^{p}\sum_{k_1\in E}\int_0^{dx_2}\alpha_{s_1ik_1}(dx_1)\alpha_{s_2k_1k_2}(dx_2 - x_1)\delta_{s_1}(\varepsilon)\delta_{s_2}(\varepsilon) + \\ &+ o(\delta_p(\varepsilon))\Bigg]\left[Q_{k_2j}(t - x_2) + \sum_{s_3=1}^{p}\alpha_{s_3k_2j}(t - x_2)\delta_{s_3}(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon))\right] = Q_{ij}^{(3)}(t) + \\ &+ \sum_{\substack{s_1,s_2,s_3=0\\ s_1+s_2+s_3\neq 0}}^{p}\sum_{k_1,k_2\in E}\int_0^t\int_0^{dx_2}\alpha_{s_1ik_1}(dx_1)\alpha_{s_2k_1k_2}(dx_2 - x_1)\alpha_{s_3k_2j}(t - x_2)\times \\ &\times \delta_{s_1}(\varepsilon)\delta_{s_2}(\varepsilon)\delta_{s_3}(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Припустимо, що зображення (7) відбувається для $(n-1)$-кратної згортки збуреної напівмарківської матриці. Доведемо його правильність і для n-кратної згортки. Маємо

$$Q_{ij}^{(n)}(\varepsilon, t) = \sum_{k_{n-1}\in E}\int_0^t Q_{ik_{n-1}}^{(n-1)}(\varepsilon, dx_{n-1})Q_{k_{n-1}j}(\varepsilon, t - x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{k_{n-1}\in E}\int_0^t\Bigg[Q_{ik_{n-1}}^{(n-1)}(dx_{n-1}) + \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_{n-1}=0\\ s_1+\cdots+s_{n-1}\neq 0}}^{p}\sum_{k_1,\ldots,k_{n-2}\in E}\int_0^{dx_{n-1}}\cdots\int_0^{dx_2}\alpha_{s_1ik_1}(dx_1)\times$$

$$\times\alpha_{s_2k_1k_2}(dx_2-x_1)\alpha_{s_3k_2k_3}(dx_3-x_2)\dots\alpha_{s_{n-1}k_{n-2}k_{n-1}}(t-x_{n-2})\delta_{s_1}(\varepsilon)\dots\delta_{s_{n-1}}(\varepsilon)+$$
$$+o(\delta_p(\varepsilon))\Bigg]\left[Q_{k_{n-1}j}(t-x_{n-1})+\sum_{s_n=1}^{p}\alpha_{s_nk_{n-1}j}(t-x_{n-1})\delta_{s_n}(\varepsilon)+o(\delta_p(\varepsilon))\right]=$$

$$=Q_{ij}^{(n)}(t)+\sum_{\substack{s_1,\dots,s_n=0\\ s_1+\dots+s_n\neq 0}}^{p}\ \sum_{k_1,\dots,k_{n-1}\in E}\int_0^t\int_0^{dx_{n-1}}\cdots\int_0^{dx_2}\alpha_{s_1ik_1}(dx_1)\alpha_{s_2k_1k_2}(dx_2-x_1)\times$$
$$\times\alpha_{s_3k_2k_3}(dx_3-x_2)\dots\alpha_{s_nk_{n-1}j}(t-x_{n-1})\delta_{s_1}(\varepsilon)\dots\delta_{s_n}(\varepsilon)+o(\delta_p(\varepsilon)).$$

Отже, рівність (7) правильна для довільного натурального n.

Далі у формулі (7) перейдемо до границі при $\varepsilon\to 0$. Оскільки в ній всі суми є скінченні, то границя існує і $Q_{ij}^{(n)}(\varepsilon,t)\to Q_{ij}^{(n)}(t)$, при $\varepsilon\to 0$. Пункт 1) доведено.

Пункт 2) безпосередньо отримується з формули (1) та зображення (3).

Тепер доведемо пункт 3). Збурена і незбурена матриці марківського відновлення є скінченними, тобто $R(\varepsilon,t)<\infty$ і $R(t)<\infty$. Отже, їхня різниця $R(\varepsilon,t)-R(t)<\infty$ також буде скінченною. Покажемо від супротивного, що $R(\varepsilon,t)-R(t)\to 0$, при $\varepsilon\to 0$. Нехай $R(\varepsilon,t)-R(t)\to S(t)\neq 0$, при $\varepsilon\to 0$. Збурена і незбурена матриці марківського відновлення задовольняють таким рівнянням марківського відновлення:

$$R(t)=I+\int_0^t Q(dx)R(t-x),\quad R(\varepsilon,t)=I+\int_0^t Q(\varepsilon,dx)R(\varepsilon,t-x),$$

де I – одинична матриця. Тоді різниця $R(\varepsilon,t)-R(t)$ має задовольняти таке рівняння

$$R(\varepsilon,t)-R(t)=\int_0^t[Q(\varepsilon,dx)R(\varepsilon,t-x)-Q(dx)R(t-x)].$$

А, отже,

$$R(\varepsilon,t)-R(t)=\int_0^t\Big\{[Q(\varepsilon,dx)-Q(dx)]R(\varepsilon,t-x)+Q(dx)[R(\varepsilon,t-x)-R(t-x)]\Big\}.$$

Перейдемо до границі в останній рівності, якщо $\varepsilon\to 0$. Одержимо, що $S(t)$ є розв'язком наступного рівняння марківського відновлення

$$S(t)=\int_0^t Q(dx)S(t-x).\tag{10}$$

Розв'язок рівняння (10) існує і єдиний. Це тривіальний розв'язок $S(t)=0$. Прийшли до суперечності. Твердження доведено.

Збурений середньоочікуваний прибуток в момент часу t, за умови, що початковим є стан i, є розв'язком збуреного рівняння марківського відновлення

$$\overline{r}_i(\varepsilon,t)=r_i^{\varepsilon}(1-P_i(\varepsilon,t))+\sum_{k\in E}\int_0^t Q_{ik}(\varepsilon,dx)\overline{r}_k(\varepsilon,t-x).\tag{11}$$

Розв'язок рівняння (11) шукаємо за формулою

$$\overline{r}_i(\varepsilon,t)=\sum_{k\in E}\int_0^t R_{ik}(\varepsilon,dx)r_k^{\varepsilon}(1-P_k(\varepsilon,t-x)).\tag{12}$$

Враховуючи у формулі (12) зображення (4), (5), (6), отримаємо, що збурений середньоочікуваний прибуток в момент часу t, за умови, що початковим є стан i, зображається

$$\overline{r}_i(\varepsilon,t)=\overline{r}_i(t)+B_i(\varepsilon,t),\tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}B_i(\varepsilon,t)=\sum_{k\in E}\int_0^t\Bigg\{&R_{ik}(dx)\Bigg[(1-P_k(t-x))\sum_{l=1}^{p}\lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon)-\\&-r_k\sum_{s=1}^{p}\Bigg(\sum_{j\in E}\alpha_{skj}(t-x)\Bigg)\delta_s(\varepsilon)-\sum_{l=1}^{p}\sum_{s=1}^{p}\Bigg(\sum_{j\in E}\alpha_{skj}(t-x)\Bigg)\lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon)\delta_s(\varepsilon)\Bigg]+\\&+A_{ik}(\varepsilon,dx)\Bigg[\sum_{l=0}^{p}\lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon)\Bigg]\times\\&\times\Bigg[1-P_k(t-x)-\sum_{s=1}^{p}\Bigg(\sum_{j\in E}\alpha_{skj}(t-x)\Bigg)\delta_s(\varepsilon)\Bigg]\Bigg\}+o(\delta_p(\varepsilon)).\end{aligned}\tag{14}$$

Визначимо коефіцієнти $\forall i$, $i=1\div N$

$$b_{i1}(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{B_i(\varepsilon,t)}{\delta_1(\varepsilon)},\quad b_{ij}(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\frac{B_i(\varepsilon,t)-\sum\limits_{k=1}^{j-1}b_{ik}\delta_k(\varepsilon)}{\delta_j(\varepsilon)}\right],\quad j=2\div p,\tag{15}$$

якщо зазначені границі існують. Якщо ж згадані границі не існують, то приймемо, що $b_{ij}(t)=\infty$.

Теорема 1. *1) Збурений середньоочікуваний прибуток $\overline{r}_i(\varepsilon,t)$ має збіжність порядку $\delta_1(\varepsilon)$ до незбуреного $\overline{r}_i(t)$. Щоб збільшити порядок збіжності необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $b_{i1}(t)=0$.*

2) Щоб збурений середньоочікуваний прибуток $\overline{r}_i(\varepsilon,t)$ мав порядок збіжності $\delta_s(\varepsilon)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$\begin{cases}b_{ij}(t)=0,\ \ \forall j=1\div s-1,\\ b_{is}(t)\neq0,\quad b_{is}(t)<\infty.\end{cases}$$

3) Щоб збурений середньоочікуваний прибуток $\overline{r}_i(\varepsilon,t)$ мав порядок збіжності більший за $\delta_s(\varepsilon)$ та менший за $\delta_{s+1}(\varepsilon)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$\begin{cases}b_{ij}(t)=0,\ \ \forall j=1\div s,\\ b_{i,s+1}(t)=\infty.\end{cases}$$

Доведення. Із зображення (14) доданка $B_i(\varepsilon,t)$ та твердження 1 випливає, що $B_i(\varepsilon,t)\to0$, при $\varepsilon\to0$. Формула (13) свідчить про те, що різниця збуреного і незбуреного середньоочікуваних прибутків $\overline{r}_i(\varepsilon,t)-\overline{r}_i(t)$ збігається до нуля зі швидкістю такою ж, як і $B_i(\varepsilon,t)$. Далі використаємо означення (15) коефіцієнтів $b_{ij}(t)$. Оскільки $b_{i1}(t)<\infty$ для довільного стану i, то $B_i(\varepsilon,t)$ має порядок збіжності принаймні $\delta_1(\varepsilon)$. Якщо ж $b_{i1}(t)=0$, то порядок збіжності буде більшим за $\delta_1(\varepsilon)$. Нехай $b_{i1}(t)=0,\ldots,b_{is}(t)=0$ та $b_{is+1}(t)\neq 0$. Якщо $b_{is+1}(t)<\infty$, то функція $B_i(\varepsilon,t)$ збігається до нуля зі швидкістю $\delta_{s+1}(\varepsilon)$. Якщо ж $b_{is+1}(t)=\infty$, то функція $B_i(\varepsilon,t)$ має порядок збіжності більший за $\delta_s(\varepsilon)$ та менший за $\delta_{s+1}(\varepsilon)$. Достатність тверджень теореми 1 доведено.

Необхідність тверджень 1), 2), 3) теореми очевидна. Отже, теорему доведено.

Аналогічно квадрат збуреного ризику є розв'язком наступного збуреного рівняння марківського відновлення

$$\sigma_i^2(\varepsilon,t)=(1-P_i(\varepsilon,t))\left(r_i^\varepsilon-\overline{r}_i(\varepsilon,t)\right)^2+\sum_{k\in E}\int_0^t Q_{ik}(\varepsilon,dx)\sigma_k^2(\varepsilon,t-x).$$

Розв'язок такого рівняння шукаємо за формулою

$$\sigma_i^2(\varepsilon,t)=\sum_{k\in E}\int_0^t R_{ik}(\varepsilon,dx)\left(1-P_k(\varepsilon,t-x)\right)\left(r_k^\varepsilon-\overline{r}_k(\varepsilon,t-x)\right)^2.$$

Врахуємо зображення (4), (5), (6) та (13). Отримаємо, що квадрат збуреного ризику $\sigma_i^2(\varepsilon,t)$ має вигляд

$$\sigma_i^2(\varepsilon,t)=\sigma_i^2(t)+C_i(\varepsilon,t)+o(\delta_p(\varepsilon)), \tag{16}$$

де

$$\begin{aligned}C_i(\varepsilon,t)=\sum_{k\in E}\int_0^t\Bigg\{&R_{ik}(dx)\Bigg[(1-P_k(t-x))\Bigg(2(r_k-\overline{r}_k(t-x))\times\\
&\times\left(\sum_{l=1}^p\lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon)-B_k(\varepsilon,t-x)\right)+\left(\sum_{l=1}^p\lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon)-B_k(\varepsilon,t-x)\right)^2\Bigg)-\\
&-(r_k-\overline{r}_k(t-x))^2\sum_{s=1}^p\left(\sum_{j\in E}\alpha_{skj}(t-x)\right)\delta_s(\varepsilon)-\\
&-\sum_{s=1}^p\left(\sum_{j\in E}\alpha_{skj}(t-x)\right)\delta_s(\varepsilon)\Bigg[2(r_k-\overline{r}_k(t-x))\times\\
&\times\left(\sum_{l=1}^p\lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon)-B_k(\varepsilon,t-x)\right)+\left(\sum_{l=1}^p\lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon)-B_k(\varepsilon,t-x)\right)^2\Bigg]\Bigg]+\\
&+A_{ik}(\varepsilon,dx)\left[1-P_k(t-x)-\sum_{s=1}^p\left(\sum_{j\in E}\alpha_{skj}(t-x)\right)\delta_s(\varepsilon)\right]\times\\
&\times\left[r_k-\overline{r}_k(t-x)+\sum_{l=1}^p\lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon)-B_k(\varepsilon,t-x)\right]^2\Bigg\}+o(\delta_p(\varepsilon)).\end{aligned}\tag{17}$$

Визначимо коефіцієнти $\forall i,\ i = 1 \div N$

$$c_{i1}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{C_i(\varepsilon, t)}{\delta_1(\varepsilon)}, \quad c_{ij}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{C_i(\varepsilon, t) - \sum\limits_{k=1}^{j-1} c_{ik}\delta_k(\varepsilon)}{\delta_j(\varepsilon)} \right], \ j = 2 \div p, \tag{18}$$

якщо зазначені границі існують. Якщо ж згадані границі не існують, то приймемо, що $c_{ij}(t) = \infty$.

Теорема 2. *1) Якщо $\sigma_i(t) \neq 0$, то збурений ризик $\sigma_i(\varepsilon, t)$ в момент часу t, за умови, що початковим є стан i, збігається до незбуреного $\sigma_i(t)$. Порядок збіжності є $\delta_1(\varepsilon)$. Щоб збільшити порядок збіжності необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$c_{i1}(t) = 0. \tag{19}$$

2) Якщо $\sigma_i(t) \neq 0$, то для того щоб збурений ризик $\sigma_i(\varepsilon, t)$ мав порядок збіжності $\delta_s(\varepsilon)$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$\begin{cases} c_{ij}(t) = 0, \ \forall j = 1 \div s - 1, \\ c_{is}(t) \neq 0, \quad c_{is}(t) < \infty. \end{cases}$$

3) Якщо $\sigma_i(t) \neq 0$, то треба, щоб збурений ризик $\sigma_i(\varepsilon, t)$ мав порядок збіжності більший за $\delta_s(\varepsilon)$ та менший за $\delta_{s+1}(\varepsilon)$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$\begin{cases} c_{ij}(t) = 0, \ \forall j = 1 \div s, \\ c_{i,s+1}(t) = \infty. \end{cases}$$

4) Якщо $\sigma_i(t) = 0$, то збурений ризик $\sigma_i(\varepsilon, t)$ має порядок збіжності $\sqrt{\delta_1(\varepsilon)}$. Щоб збільшити порядок збіжності необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (19).

Доведення. Різницю збуреного ризику $\sigma_i(\varepsilon, t)$ та незбуреного $\sigma_i(t)$ можемо зобразити

$$\sigma_i(\varepsilon, t) - \sigma_i(t) = \frac{\sigma_i^2(\varepsilon, t) - \sigma_i^2(t)}{\sigma_i(\varepsilon, t) + \sigma_i(t)}. \tag{20}$$

Із зображення (17) доданка $C_i(\varepsilon, t)$ випливає, що $C_i(\varepsilon, t) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$. Отже, враховуючи формулу (16), квадрат збуреного ризику $\sigma_i^2(\varepsilon, t)$ збігається до квадрата незбуреного ризику $\sigma_i^2(t)$, при $\varepsilon \to 0$. Якщо $\sigma_i(t) \neq 0$, то знаменник у формулі (20) $\sigma_i(\varepsilon, t) + \sigma_i(t) \to 2\sigma_i(t) \neq 0$, при $\varepsilon \to 0$. А тому швидкість збіжності збуреного ризику $\sigma_i(\varepsilon, t)$ до незбуреного буде такою ж, як швидкість збіжності функції $C_i(\varepsilon, t)$ до нуля, при $\varepsilon \to 0$. Далі доведення пунктів 1 , 2 , 3 є аналогічним доведенню теореми 1.

Якщо ж $\sigma_i(t) = 0$, то збурений ризик за формулою (16) можна зобразити

$$\sigma_i(\varepsilon, t) = \sqrt{C_i(\varepsilon, t) + o(\delta_p(\varepsilon))}. \tag{21}$$

З останньої рівності (21) та визначення (18) коефіцієнтів $c_{ij}(t)$ випливає правильність пункту 4 даної теореми. Теорему доведено.

1. *Sharpe W.* Portfolio theory and capital markets. – New York, McGraw-Hill, 1970.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. – М., 1984. – Т.2.
3. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – К., 1976.
4. *Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К., 1995.
5. *Єлейко Я.І.* Асимптотична функція відновлення для одного класу напівмарківських процесів // Математичні студії. – 1994. – N 3. – С.107–110.
6. *Єлейко Я.І., Боротюк А.Ю.* Швидкість збіжності збурених доходності і ризику та шкала нескінченно малих // Вісн. Львів. ун-ту. – 1999. – Вип.53. – С.133–137.
7. *Боротюк А.Ю.* Збурені прибуток та ризик для акцій у випадковому середовищі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т.42. – N 4. – С.148–154

A. Borotyuk

THE PERTURBED PROFIT AND THE PERTURBED RISK FOR A STOCK IN A RANDOM ENVIRONMENT

The behaviour of the stock is described by semimarkov process with a finite set of states. A profit and a risk are considered in a arbitrary finite moment of time t. The perturbed profit and the perturbed risk are presented by a scale of infinitely small $\delta_1(\varepsilon), \dots, \delta_p(\varepsilon)$ as $\varepsilon \to 0$. The speed of convergence of the perturbed profit and the perturbed risk to respective unperturbed is researched.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.2000