ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.20–27

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.20–27

УДК 517.535

Андрій Бридун, Оксана Лизун, Руслана Мицик

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ЛІНДЕЛЬОФА ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Нехай f - ціла функція, $f(0) = 1, \{a_j\}$ - послідовність її нулів, $\alpha_j = \arg a_j$. Приймемо

$$\log f(z) = \int\limits_0^z \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi$$

в комплексній площині з радіальними розрізами від нулів функції f до ∞.

Позначимо

$$n_k(r, f) = \sum_{|a_j| \leqslant r} e^{-ik\alpha_j}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$N_k(r, f) = \int\limits_0^r \frac{n_k(t, f)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n(r, f) = n_0(r, f), \quad N(r, f) = N_0(r, f).$$

Нехай

$$\log f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m z^m$$

- розвинення в деякому околі точки $z = 0$.

Позначимо

$$l_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log f(re^{i\theta}) d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Додатну, неперервну, зростаючу та необмежену функцію $\lambda(r)$, $r > 0$, називатимемо функцією зростання. Через $T(r, f)$ позначимо характеристику Неванлінни функції f [2,7].

Означення 1. *[1] Нехай λ - функція зростання. Ціла функція f називається функцією скінченного λ - типу, якщо існують додатні сталі A і B такі, що $T(r, f) \leqslant A\lambda(Br)$ для всіх $r > 0$.*

Клас таких цілих функцій при фіксованій функції λ позначимо через Λ_E.

Означення 2. *Порядком Пойя [3] функції зростання λ називається величина*

$$\rho^* = \rho^*[\lambda] = \sup\{p > 0 : \overline{\lim_{r,\tau\to\infty}} \frac{\lambda(\tau r)}{\tau^p \lambda(r)} = +\infty\}.$$

Зауважимо, що $\rho^* < +\infty$ тоді і лише тоді, коли $\lambda(2r) \leqslant M\lambda(r)$ при деякому $M > 0$ і всіх $r > 0$.

Через ρ позначимо порядок функції зростання λ, тобто

$$\rho = \rho[\lambda] = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\lambda(r)}{\log r}.$$

Порядком цілої функції f назвемо порядок її неванліннівської характеристики.

Додатна неперервна функція $L(r), r \geqslant r_0$ називається повільно змінною, якщо $\lim\limits_{r\to\infty} L(cr)/L(r) = 1$ рівномірно на будь-якому сегменті $0 < a \leqslant c \leqslant b < \infty$.

З результату Ліндельофа [4] випливає така теорема.

Теорема L. *Нехай $\lambda(r) = r^\rho L(r)$, $\rho \in \mathbb{N}$, L - повільно змінна функція. Ціла функція f порядку не вищого ніж ρ належить класу Λ_E тоді і лише тоді, коли*

$$N(r,f) \leqslant a\lambda(r)$$

i

$$\left|\gamma_\rho + \frac{1}{\rho}\sum_{|a_j|\leqslant r} \frac{1}{a_j^\rho}\right| \leqslant aL(r),$$

при деякому $a > 0$ і всіх $r > 0$.

Мета цієї статті – узагальнити теорему L на випадок, коли λ є довільною функцією зростання скінченного порядку Пойя.

Лема 1. *[5] Правильні співвідношення*

$$l_0(r,f) = N(r,f), \tag{2}$$

$$l_k(r,f) = \gamma_k r^k + r^k \int_0^r \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}dt, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$l_{-k}(r,f) = r^{-k} \int_0^r \frac{n_{-k}(t,f)}{t^{-k+1}}dt, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Позначимо

$$m_q(r,\log f) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log f(re^{i\theta})|^q d\theta\right\}^{1/q}, \quad q \geqslant 1. \tag{5}$$

Теорема А. [1], [2,с.16]. *Нехай f - ціла функція. Якщо $f \in \Lambda_E$, то для довільного q, $1 \leqslant q < \infty$ існують $A > 0, B > 0$ такі, що*

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log|f(re^{i\theta})||^q d\theta\right\}^{1/q} \leqslant A\lambda(Br). \tag{6}$$

Якщо ж для всіх $r > 0$ при деяких $q \geqslant 1, A > 0, B > 0$ виконується нерівність (6), то $f \in \Lambda_E$.

Лема 2. *Наступні чотири твердження еквівалентні:*

1) $f \in \Lambda_E$;

2) $|l_k(r, f)| \leqslant A\lambda(Br), \quad k \in \mathbb{Z},$ (7)

при деяких додатних A, B *і всіх* $r > 0$;

3) $|l_k(r, f)| \leqslant \frac{A\lambda(Br)}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z},$ (8)

при деяких додатних A, B *і всіх* $r > 0$;

4) $m_q(r, \log f) \leqslant A_q\lambda(B_q r)$, $1 \leqslant q < +\infty$,

при деяких додатних A_q, B_q *і всіх* $r > 0$.

Доведення. Доведення леми 2 подамо за схемою 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 1).

Нехай

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|e^{-ik\theta}d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді [1], [2, с.10]

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2}\gamma_k r^k + \frac{1}{2k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left[\left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k\right], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

$$c_{-k}(r, f) = \overline{c}_k(r, f), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$c_0(r, f) = N(r, f)$$

для всіх $r > 0$.

Згідно з (3) коефіцієнти $l_k(r, f)$ можна подати у вигляді

$$l_k(r, f) = \gamma_k r^k + \frac{r^k}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k - \frac{n_k(r, f)}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Враховуючи (9), маємо

$$l_k(r, f) = 2c_k(r, f) - \frac{n_k(r, f)}{k} + \frac{1}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Звідси

$$|l_k(r, f)| \leqslant 2|c_k(r, f)| + 2\frac{n(r, f)}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

З 1) відповідно випливає, що

$$N(r, f) \leqslant A\lambda(Br), \quad r > 0,$$

при деяких додатних A, B. Зауважимо, що звідси [1], [2, с.13] $n(r, f) \leqslant A\lambda(eBr)$, $r > 0$. З 1) випливає також [2, с.14]

$$|c_k(r, f)| \leqslant A\lambda(Br), \quad k \in \mathbb{Z},$$

при деяких додатних сталих A, B і всіх $r > 0$. Отже, маємо 2) для $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Покажемо, що 2) виконується і для від'ємних k. З (4) випливає, що

$$|l_{-k}(r, f)| \leqslant \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n(t, f)}{t}dt \leqslant N(r, f), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отже, імплікацію 1) $\Longrightarrow$ 2) доведено.

Покажемо, що з 2) випливає 3). З (10) і (7) випливає

$$\left|\gamma_k + \frac{1}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k\right| \leqslant \frac{A_1\lambda(B_1 r)}{r^k}, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{11}$$

при деяких додатних A_1, B_1 і всіх $r>0$.

Отже,

$$\left|\gamma_k + \frac{1}{k}\sum_{|a_j|\leqslant rk^{\frac{1}{k}}}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k\right| \leqslant \frac{A_1\lambda(2B_1 r)}{kr^k}, \quad k\in\mathbb{N},$$

при деяких додатних A_1, B_1 і всіх $r>0$. Маємо

$$\left|\gamma_k r^k + \frac{r^k}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k + \frac{1}{k}\sum_{r\leqslant|a_j|\leqslant rk^{\frac{1}{k}}}\left(\frac{r}{a_j}\right)^k\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\gamma_k r^k + \frac{r^k}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k\right| - \frac{n(2r,f)}{k}, \quad k\in\mathbb{N}, \quad r>0.$$

Враховуючи (7), одержуємо

$$\left|\gamma_k r^k + \frac{r^k}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k\right| \leqslant \frac{A_2\lambda(B_2 r)}{k}, \quad k\in\mathbb{N},$$

при деяких додатних A_2, B_2 і всіх $r>0$.

Звідси і з (10) випливає

$$|l_k(r,f)| \leqslant \frac{A\lambda(Br)}{k}, \quad k\in\mathbb{N},$$

при деяких додатних A, B і всіх $r>0$.

Покажемо, що така ж оцінка правильна і для $|l_{-k}(r,f)|, k\in\mathbb{N}$. Коефіцієнти $l_{-k}(r,f)$ можна подати у вигляді

$$l_{-k}(r,f) = -\frac{1}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left(\frac{a_j}{r}\right)^k + \frac{1}{k}n_{-k}(r,f), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Тоді

$$|l_{-k}(r,f)| \leqslant \frac{2}{k}n(r,f) \leqslant \frac{A_1\lambda(B_1 r)}{k}, \quad k\in\mathbb{N},$$

при деяких додатних A_1, B_1 і всіх $r>0$.

Доведемо імплікацію 3) $\Longrightarrow$ 4). Нехай $q\geqslant 2$. Використовуючи нерівність Хаусдорфа-Юнг, одержуємо

$$m_q(r,\log f) \leqslant \left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|l_k(r,f)|^p\right\}^{1/p},$$

де $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, r>0$. Беручи до уваги (8), маємо

$$\Big\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|l_k(r,f)|^p\Big\}^{1/p}\leqslant\Big\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{A\lambda(Br)}{|k|+1}\right)^p\Big\}^{1/p}=A_q\lambda(B_qr), r>0.$$

Отже, $m_q(r,\log f)\leqslant A_q\lambda(B_qr)$ при деяких додатних A_q, B_q, всіх $r>0$ і $q\geqslant 2$. При $1\leqslant q\leqslant 2$ така нерівність випливає з останньої з врахуванням монотонності $m_q(r,f)$ по q. Зауважимо, що

$$m_q(r,\log|f|)\leqslant m_q(r,\log f).$$

Отже, з 4) випливає (6), звідки за теоремою A отримуємо 1).

Зауважимо, що імплікація 2) $\Longrightarrow$ 3) іншим способом була доведена в [6].

Доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай λ – функція зростання ,$\rho^*=\rho^*[\lambda]<+\infty$. Якщо $f\in\Lambda_E$, то існує стала $a>0$ така, що при всіх $r>0$ виконується*

$$N(r,f)\leqslant a\lambda(r) \tag{12}$$

і

$$\left|\gamma_k+\frac{1}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\frac{1}{a_j^k}\right|\leqslant a\frac{\lambda(r)}{r^k} \tag{13}$$

при $k\in\mathbb{N}$.

Якщо ціла функція f порядку не вище ρ^* задовольняє умову (12) і умову (13) при $k\in[0,\rho^*]\bigcap\mathbb{N}$, то $f\in\Lambda_E$.

Доведення. Нехай $f\in\Lambda_E$. Тоді за лемою 2

$$|l_k(r,f)|\leqslant A\lambda(Br),\quad k\in\mathbb{Z}, \tag{14}$$

при деяких додатних A, B і всіх $r>0$.

Візьмемо $m_0\in\mathbb{N}$ таке, що $2^{m_0}>B$. Враховуючи нерівність $\lambda(2r)\leqslant M\lambda(r)$ при деякому $M>0$ і всіх $r>0$, маємо

$$|l_k(r,f)|\leqslant A\lambda(2^{m_0}r)\leqslant AM\lambda(2^{m_0-1}r)\leqslant AM^{m_0}\lambda(r),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Приймемо, що $AM^{m_0}=a$. Тоді (14) набуває вигляду

$$|l_k(r,f)|\leqslant a\lambda(r),\quad k\in\mathbb{Z},\quad r>0. \tag{15}$$

При $k=0$ маємо (12). З (11) і нерівності $A_1\lambda(B_1r)\leqslant a\lambda(r)$ при деякому $a>0$ і всіх $r>0$ випливає (13).

Нехай тепер f – ціла функція порядку не вище ρ^* і виконується (12). Тоді

$$|l_{-k}(r,f)|\leqslant N(r,f)\leqslant a\lambda(r),\quad k\in\mathbb{N}. \tag{16}$$

Позначимо $\lambda_1(r)=r^{\rho^*+\epsilon}, 2\epsilon=[\rho^*]+1-\rho.^*$, де $[\rho^*]$ – ціла частина від ρ^*. Оскільки порядок функції f не перевищує ρ^*, то $T(r,f)\leqslant Cr^{\rho^*+\epsilon},\quad r>r_\epsilon$ при деякому $C>0$. Тобто функція f є функцією скінченного λ_1-типу.

За лемою 2

$$|l_k(r,f)|\leqslant A\lambda_1(r),$$

при деякому $A>0$ і всіх $r>0$.

Згідно з (3), маємо

$$\left|\gamma_k + \int_0^r \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}dt\right| \leqslant A\frac{r^{\rho^*+\epsilon}}{r^k}. \tag{17}$$

Спрямовуючи r до $+\infty$ при $k > \rho^* + \epsilon$, одержуємо

$$\gamma_k = -\int_0^\infty \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}dt.$$

Отже,

$$l_k(r,f) = -r^k\int_r^\infty \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}dt, \quad k > \rho^*. \tag{18}$$

Враховуючи (15) при $k = 0$, маємо

$$n(t,f) \leqslant N(4t,f) \leqslant a\lambda(4r,f) \leqslant aM^2\lambda(r).$$

Тоді

$$|l_k(r,f)| \leqslant r^k\int_r^\infty \frac{n(t,f)}{t^{k+1}}dt \leqslant aM^2r^k\int_r^\infty \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt, \quad k > \rho^*.$$

Зробимо заміну $t = r\tau$. Тоді

$$r^k\int_r^\infty \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt = r^k\int_1^{+\infty} \frac{\lambda(r\tau)}{\tau^{k+1}r^{k+1}}rd\tau = \int_1^{+\infty}\frac{\lambda(r\tau)}{\tau^{k+1}}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \lambda(r)\int_1^{+\infty}\frac{\lambda(r\tau)}{\tau^{k+1}\lambda(r)}d\tau.$$

Оскільки

$$\lambda(r\tau)/\lambda(r)\tau^{\rho^*+\epsilon} \leqslant c_1,$$

то

$$|l_k(r,f)| \leqslant \lambda(r)A_1\int_1^\infty \frac{\lambda(r\tau)}{\tau^{k+1}\lambda(r)}d\tau \leqslant c_2\lambda(r)\int_1^{+\infty}\tau^{-k+\rho^*+\epsilon-1}d\tau =$$

$$= \frac{c_2\lambda(r)}{k-\rho^*-\epsilon} \leqslant \frac{2c_2}{[\rho^*]+1-\rho^*}\lambda(r) = c_3\lambda(r), \quad k > \rho^*. \tag{19}$$

Співвідношення (16), (13) при $k \in [0,\rho^*]\bigcap\mathbb{N}$ і (19) дають (15), звідки за лемою 2 маємо $f \in \Lambda_E$.

Означення 3. *Узагальненим уточненим порядком називається додатна, неперервно диференційовна на $(0,+\infty)$ функція $l(r)$ така, що $l'(r)r\log r \to 0$ при $r \to \infty$.*

Позначимо $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, l(r) = \beta$.

Лема 3. *Нехай $l(r)$ - узагальнений уточнений порядок, $\lambda(r) = r^{l(r)}$. Тоді $\rho^*[\lambda] = \beta$.*

Доведення. Порядок Пойя $\rho^*[\lambda]$ може бути визначений так:

$$\rho^*[\lambda] = \varlimsup_{r,A\to\infty} \frac{\log\lambda(Ar) - \log\lambda(r)}{\log A}.$$

При $A > 1$ маємо

$$\frac{\log(Ar)^{l(Ar)} - \log r^{l(r)}}{\log A} = \frac{l(Ar) - l(r)}{\log(Ar) - \log r}\log r + l(Ar). \tag{20}$$

Застосовуючи теорему Коші про середнє, одержуємо

$$\frac{l(Ar) - l(r)}{\log(Ar) - \log r}\log r = l'(r^*)r^*\log r = \frac{\log r}{\log r^*}l'(r^*)r^*\log r^*, \quad \text{де} \quad r < r^* < Ar.$$

Звідси та з (20) випливає $\rho^*[\lambda] = \beta$.

Теорема 2. *Нехай $l(r)$ - узагальнений уточнений порядок, $\lambda(r) = r^{l(r)}$,*

$$\varliminf_{r\to\infty} l(r) = \alpha, \quad \varlimsup_{r\to\infty} l(r) = \beta < +\infty.$$

Якщо ціла функція f порядку не вищого ніж β задовольняє умову (12) та умову (13) при $k \in [\alpha,\beta]\bigcap\mathbb{N}$, то $f \in \Lambda_E$.

Доведення. За теоремою 1 і лемою 3 досить показати, що (14) виконується при $k \in (0,\alpha)\bigcap\mathbb{N}$. Остання множина непорожня при $1 < \alpha$. Тоді при $k < \alpha$ маємо $r^k < r^{l(r)}$ при $r > r_0$, а також з огляду на (12)

$$|l_k(r,f)| \leqslant r^k|\gamma_k| + r^k\int\limits_{|a_1|}^{r}\frac{n(t,f)}{t^{k+1}}dt \leqslant |\gamma_k|r^{l(r)} + Ar^k\int\limits_{|a_1|}^{r}\frac{t^{l(t)}}{t^{k+1}}dt$$

при деякому $A > 0$.

З означення узагальненого уточненого порядку $l(r)$ випливає (див., наприклад, [7, с.91])

$$r^k\int\limits_{|a_1|}^{r}\frac{t^{l(t)}}{t^{k+1}}dt \leqslant A_1\frac{r^{l(r)}}{\alpha - k}.$$

Отже,

$$|l_k(r,f)| \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant\alpha}|\gamma_k|r^{l(r)} + A_2\frac{r^{l(r)}}{\alpha - k} \leqslant C\lambda(r), \quad k < \alpha$$

при деяких $A_2 > 0, C > 0$,що завершує доведення теореми 2.

Якщо $\alpha = \beta = \rho \in \mathbb{N}$, то $\lambda(r) = r^{l(r)}$, де $\lambda(r)$ - уточнений порядок, тобто $l(r) \to \rho$, $l'(r)r\ln r \to 0$ при $r \to \infty$. Тоді (див.,наприклад, [7,с.73]) $\lambda(r) = r^\rho L(r)$, де $L(r)$ повільно змінна.

Отже, з теореми 2 випливає теорема L.

---

1. *Rubel L.A., Taylor B.A.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions// Bull. Soc. Math. France. - 1968. - Vol.96. - P.53-96.

2. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции. – К., 1988.
3. *Drasin D., Shea D.F.* Polya peaks and the oscillation of positive functions// Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol.34. – N 2. – P.403-411.
4. *Lindelöf E.* Sur les fonctions entieres d'ordre entier// Ann. Sci. Ecole Normale Sup. – 1905. – Vol. 22. – P.365-395.
5. *Калинець Р.З., Кондратюк А.А.* Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $\mathbb{L}^p[0,2\pi]$- метриці// Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50. – N 7. – С.889-896.
6. *Васильків Я.В.* Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $\mathbb{L}^p[0,2\pi]$- метриці. I// Мат.студії. – 1999. – Т.12. – N 1. – С.37-58.
7. *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций. – М., 1970.

A. Brydun, O. Lyzun, R. Mytsyk

GENERRALIZATION OF LINDELÖF THEOREM FOR ENTIRE FUNTIONS

For an arbitrary entire function of finite order in the sense of Polya the generalization of Lindelöf theorem on boundedness of λ-type of the function is given. We also improve thus theorem in the case of generalized oscillating order.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99