ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.28–32 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.28–32*

УДК 519.21

Наталія Бугрій

ДЕЯКІ ПРОБЛЕМИ АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ВІДНОВЛЕННЯ

Розглянемо напівмарківський процес x_t зі скінченною кількістю станів $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$. Позначимо

$$\tau = \inf\{\ t > 0,\ \ x_0 \neq x_t\ \},\ F_{ij}(t) = P\{\ \tau \leqslant t,\ x_\tau = j \mid x_0 = i\ \},$$
$$F_i(t) = \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(t) = P\{\ \tau \leqslant t \mid x_0 = i\ \}.$$

Матриця $||p_{ij}||_{i,j=1,\ldots,m}$ з $p_{ij} = P\{\ x_\tau = j \mid x_0 = i\ \}$ вкладеного ланцюга Маркова нерозкладна і, отже, для неї існує єдиний стаціонарний розподіл $p_1, \ldots, p_m$.
Припустимо, що

$$1 - F_i(t) \sim a_i t^{-\alpha} L(t),\ i = 1, \ldots, m,\ \frac{1}{2} < \alpha < 1 \text{ при } t \to \infty, \tag{1}$$

де $L(t)$ – повільно змінна функція.

Запишемо векторне рівняння відновлення

$$q_i(t) = b_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t F_{ij}(du) q_j(t-u),\ i = 1, \ldots, m,\ t \geqslant 0 \tag{2}$$

Розв'язок (2) має вигляд

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t U_{ij}(du) b_j(t-u) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t U_{ij}(tdu) b_j(t(1-u)),\ i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

де $U_{ij}\{[0, x)\} = U_{ij}(x)$ – елементи матриці відновлення, яка відповідає векторному рівнянню відновлення, $b(x) = (b_j(x), j = 1, \ldots, m)$ – вектор, координати якого $b_j(x) : R_+ \to R_+,\ j = 1, \ldots, m$ є незростаючими функціями такими, що $b_j(0) < \infty,\ j = 1, \ldots, m$ і

$$b_j(t) \sim t^{-\beta_j} L(t),\ 0 \leqslant \beta_j < 1,\ j = 1, \ldots, m, \text{ при } t \to \infty. \tag{4}$$

Як видно з (3), асимптотична поведінка $q_i(t)$ рівняння (2) при $t \to \infty$ визначається властивостями матричної міри $U(tx) = ||U_{ij}(tx)||_{i,j=1,\ldots,m}$ і $b(tx)$ при $t \to \infty$.

Знайдемо асимптотику матричної міри $U(tx)$.

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x), \tag{5}$$

де $F^{0*}(x) = E$, E – одинична матриця.

Позначимо через

$$\hat{U}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} U(dx)$$

перетворення Лапласа для $U(x)$, а через

$$\hat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(dx)$$

перетворення Лапласа для $F(x)$.

Враховуючи (5) і властивості перетворення Лапласа, маємо

$$\hat{U}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\hat{F}(\lambda)\Big)^n = \Big(E - \hat{F}(\lambda)\Big)^{-1}.$$

Розглянемо послідовність матриць $\{\hat{F}(\frac{\lambda}{t})\}$ при λ фіксованих і $t \to \infty$. Це монотонна послідовність матриць з невід'ємними елементами, для якої $\hat{F}\left(\frac{\lambda}{t}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} P$, де $P = ||p_{ij}||_{i,j=1,\dots,m}$ – матриця перехідних ймовірностей вкладеного ланцюга Маркова. Оскільки P нерозкладна з перроновим коренем, який дорівнює одиниці, лівим і правим власними векторами $p = (p_1, \dots, p_m)$ і $1 = (1, \dots, 1)$, то за лемою [1, с.599]

$$c_t\left(E - \hat{F}\left(\frac{\lambda}{t}\right)\right)^{-1} \xrightarrow[t\to\infty]{} ||1 \cdot p_j||_{i,j=1,\dots,m},$$

де $c_t = 1 - (p, \hat{F}(\frac{\lambda}{t}) \cdot 1)$.

Розглянемо

$$\frac{1 - \hat{F}_i(\lambda)}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}(1 - F_i(x))dx$$

– перетворення Лапласа міри з монотонною щільністю $1 - F_i(x)$.

Використовуючи (1) і тауберову теорему [3, с.513], одержимо

$$\frac{1 - \hat{F}_i(\lambda)}{\lambda} \sim \frac{1}{\lambda^{1-\alpha}} \Gamma(1-\alpha) L\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) a_i \;\text{ при }\; \lambda \to 0,$$

звідси

$$1 - \hat{F}_i(\lambda) \sim \lambda^\alpha \Gamma(1-\alpha) L\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) a_i \;\text{ при }\; \lambda \to 0. \tag{6}$$

Скориставшись (6), знайдемо асимптотику c_t, $t \to \infty$:

$$c_t = 1 - \left(p, \hat{F}\Big(\frac{\lambda}{t}\Big) \cdot 1\right) = 1 - \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^m \hat{F}_{ij}\Big(\frac{\lambda}{t}\Big) = \sum_{i=1}^m p_i \left(1 - \hat{F}_i\Big(\frac{\lambda}{t}\Big)\right) \sim$$

$$\sim \sum_{i=1}^m p_i \Big(\frac{\lambda}{t}\Big)^\alpha \Gamma(1-\alpha) L\Big(\frac{t}{\lambda}\Big) a_i \sim t^{-\alpha} \lambda^\alpha \Gamma(1-\alpha) L(t) \sum_{i=1}^m a_i p_i.$$

З того, що

$$t^{-\alpha}\lambda^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)L(t)\sum_{i=1}^{m}a_ip_i\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{t}x}U(dx)\xrightarrow[t\to\infty]{}||1\cdot p_j||_{i,j=1,\dots,m},$$

тобто

$$t^{-\alpha}L(t)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda u}U(tdu)\xrightarrow[t\to\infty]{}\frac{1}{\lambda^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)L(t)\sum\limits_{i=1}^{m}a_ip_i}||1\cdot p_j||_{i,j=1,\dots,m}$$

випливає

$$t^{-\alpha}L(t)U_{ij}(tdu)\xrightarrow[t\to\infty]{}\mu(du)p_j \tag{7}$$

в значенні слабої збіжності мір.

Міра $\mu(du)$ визначається перетворенням Лапласа

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda u}\mu(du)=\frac{1}{\lambda^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)\sum\limits_{i=1}^{m}a_ip_i}.$$

Враховуючи (7),

$$t^{-\alpha}L(t)U_{ij}(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}\mu(1)p_j \tag{8}$$

в значенні слабої збіжності мір, де $\mu(1)=\mu\{[0,1)\}$. За доведеним в [4, с.391]

$$\int\limits_0^t U_{ij}(du)b_j(t-u)\sim\alpha B(\alpha,1-\beta_j)U_{ij}(t)b_j(t),\ \text{ при } t\to\infty.$$

Дослідимо асимптотичну поведінку $q_i(t),\ i=1,\dots,m$ при $t\to\infty$.

$$\lim_{t\to\infty}q_i(t)=\lim_{t\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_0^t U_{ij}(du)b_j(t-u)=\lim_{t\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\alpha B(\alpha,1-\beta_j)U_{ij}(t)b_j(t)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\alpha B(\alpha,1-\beta_j)\lim_{t\to\infty}U_{ij}(t)t^{-\alpha}L(t)\frac{1}{t^{-\alpha}L(t)}b_j(t).$$

З (8) одержуємо

$$\lim_{t\to\infty}U_{ij}(t)t^{-\alpha}L(t)=\mu(1)p_j,\ \ i,j=1,\dots,m.$$

Знайдемо

$$L_j=\lim_{t\to\infty}\frac{b_j(t)}{t^{-\alpha}L(t)},\ \ j=1,\dots,m.$$

З (4) випливає, що

$$L_j=\lim_{t\to\infty}\frac{t^{-\beta_j}L(t)}{t^{-\alpha}L(t)}=\lim_{t\to\infty}t^{\alpha-\beta_j}=\begin{cases}1, & \alpha=\beta_j,\\ 0, & \alpha<\beta_j,\\ \infty, & \alpha>\beta_j.\end{cases}$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} q_i(t) = \begin{cases} \alpha\mu(1)\sum\limits_{j=1}^{m} B(\alpha, 1-\beta_j)p_j, & \alpha = \beta_j, \\ 0, & \alpha < \beta_j, \\ \infty, & \alpha > \beta_j. \end{cases}$$

Звідси видно, що $\lim\limits_{t\to\infty} q_i(t)$ – скінченна $\Leftrightarrow$, коли $\alpha \leqslant \beta_j,\ i,j = 1,\dots,m$. Замінимо умову (4) на

$$b_j(t) \sim t^{-\beta_j} L_{\beta_j}(t),\ 0 \leqslant \beta_j < 1,\ j = 1,\dots,m \quad \text{при } t \to \infty, \tag{4'}$$

де $L_{\beta_j}(t),\ j = 1,\dots,m$ – повільно змінні функції.

Розглянемо

$$L_j^1 = \lim_{t\to\infty} \frac{b_j(t)}{t^{-\alpha}L(t)} = \lim_{t\to\infty} t^{\alpha-\beta_j}\frac{L_{\beta_j}(t)}{L(t)}, j = 1,\dots,m.$$

Функції $L(t), L_{\beta_j}(t),\ j = 1,\dots,m$ представимо [3, с.342] у вигляді

$$a(t)\exp\left(\int\limits_1^t \frac{\varepsilon(y)}{y}dy\right),\ \ a_j(t)\exp\left(\int\limits_1^t \frac{\varepsilon_j(y)}{y}dy\right),\ j = 1,\dots,m$$

відповідно, де $\varepsilon(y) \to 0$, $\varepsilon_j(y) \to 0$, $a(t) \to c < \infty$, $a_j(t) \to c_j < \infty$, $j = 1,\dots,m$ при $t \to \infty$. Тоді

$$L_j^1 = \lim_{t\to\infty} t^{\alpha-\beta_j}\frac{a_j(t)}{a(t)}\exp\left(\int\limits_1^t \frac{\varepsilon_j(y)-\varepsilon(y)}{y}dy\right) =$$

$$= \frac{c_j}{c}\lim_{t\to\infty} t^{\alpha-\beta_j}\exp\left(\int\limits_1^t \frac{\varepsilon_j(y)-\varepsilon(y)}{y}dy\right),\ j = 1,\dots,m.$$

1. Нехай $\alpha = \beta_j$. $L_j^1 = \frac{c_j}{c}\lim\limits_{t\to\infty}\exp\left(\int\limits_1^t \frac{\varepsilon_j(y)-\varepsilon(y)}{y}dy\right)$, $j = 1,\dots,m$. Досліджуватимемо такі випадки:

а) $\varepsilon_j(y) = \varepsilon(y)$. Тоді $L_j^1 = \dfrac{c_j}{c}$;

б) $\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) < 0$. Тоді $L_j^1 = \frac{c_j}{c}\lim\limits_{t\to\infty}\exp\left(-\int\limits_1^t \frac{\varepsilon(y)-\varepsilon_j(y)}{y}dy\right) = 0$;

в) $\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) > 0$. Тоді $L_j^1 = \frac{c_j}{c}\lim\limits_{t\to\infty}\exp\left(\int\limits_1^t \frac{\varepsilon_j(y)-\varepsilon(y)}{y}dy\right) = \infty$.

2. Нехай $\alpha < \beta_j$. Аналогічно розглянемо випадки:

а) $\varepsilon_j(y) = \varepsilon(y)$. Тоді $L_j^1 = \frac{c_j}{c}\lim\limits_{t\to\infty} t^{\alpha-\beta_j}\exp\left(\int\limits_1^t \frac{\varepsilon_j(y)-\varepsilon(y)}{y}dy\right) = 0$;

б) $\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) < 0$. Тоді $L_j^1 = \frac{c_j}{c}\lim\limits_{t\to\infty} t^{\alpha-\beta_j}\exp\left(-\int\limits_1^t \frac{\varepsilon(y)-\varepsilon_j(y)}{y}dy\right) = 0$;

в) $\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) > 0$. Тоді припустимо, що

$$\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) = d_1 y^{-k},\ k > 0,\ d_1 = \text{const}. \tag{9}$$

Звідси

$$L_j^1 = \frac{c_j}{c} \lim_{t\to\infty} t^{\alpha-\beta_j} \exp\left(\int_1^t \frac{\varepsilon_j(y)-\varepsilon(y)}{y} dy\right) = \frac{c_j}{c} \lim_{t\to\infty} t^{\alpha-\beta_j} d_2 \exp\left(-\frac{d_1}{kt^k}\right) = 0,$$

де $d_2 = \exp\left(\frac{d_1}{k}\right)$.

3. Нехай $\alpha > \beta_j$. У цьому випадку $L_j^1 = \infty$ для довільних $\varepsilon_j(y), \varepsilon(y)$.

Запишемо умови, при яких $\lim\limits_{t\to\infty} q_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$ скінченна.

Якщо $\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) = 0$, то

$$\lim_{t\to\infty} q_i(t) = \begin{cases} \frac{\alpha\mu(1)}{c} \sum\limits_{j=1}^{m} B(\alpha, 1-\beta_j) c_j p_j, & \alpha = \beta_j, \\ 0, \ \alpha < \beta_j. \end{cases}$$

Якщо $\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) < 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} q_i(t) = 0$ при $\alpha \leqslant \beta_j$.

Якщо $\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) > 0$ і виконується (9), то $\lim\limits_{t\to\infty} q_i(t) = 0$ при $\alpha < \beta_j$.

---

1. *Шуренков В. М., Єлейко Я. И.* Предельные распределения временных средних для полумарковского процесса с конечным числом состояний // Укр. мат. журн. – 1979. – Т.31. – N 5. – С. 598-603.
2. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – К., 1976.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М., 1967.
4. *Kevin K. Anderson, Krishna B. Athreya.* A renewal theorem in the infinite mean case // The Annals of Probability. – 1987. – Vol. 15. – N 1. – P. 388-393.

N. Buhrii

SOME PROBLEMS OF THE ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE RENEWAL EQUATION

An asymptotic of the solution of the renewal equation for semi-markov process with finite state space without finitness condition of mean stay times in states is found. There are established conditions under which this solution has a finite limit.

Стаття надійшла до редколегії 20.10.99