ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.33–43 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.33–43*

УДК 517.95

Олег Бугрій, Сергій Лавренюк

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ, ЯКЕ УЗАГАЛЬНЮЄ РІВНЯННЯ ПОЛІТРОПНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

Сильно нелінійним рівнянням з частинними похідними, які виникають у механіці суцільних середовищ, присвячено праці [1 – 3] та інші. До таких рівнянь відносяться і рівняння політропної фільтрації та різні їхні узагальнення [4], [5]. У цій праці ми розглянемо мішану задачу для рівняння, яке є узагальненням рівняння політропної пружної фільтрації у випадку неоднорідних середовищ. Це рівняння автори використовують для дослідження варіаційних нерівностей, що і зумовлює його специфічний вигляд.

Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$; $Q = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$; $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1,t_2)$, $t_1, t_2 \in [0,T], t_1 < t_2$; $n,\ N$ – довільні натуральні числа; $p, q \in C(\overline{\Omega})$,

$$1 < p_1 = \min_{\overline{\Omega}} p(x) \leqslant \max_{\overline{\Omega}} p(x) = p_2 < +\infty,$$
$$1 < q_1 = \min_{\overline{\Omega}} q(x) \leqslant \max_{\overline{\Omega}} q(x) = q_2 < +\infty;$$
$$r = \min\{p_1, q_1\}, s = \max\{p_2, q_2\};$$
$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1,\ \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1,\ x \in \overline{\Omega}.$$

Ми припускатимемо, що $r < 2$. Зауважимо, що умова неперервності на $\overline{\Omega}$ функцій p, q може бути замінена на умову 2 в теоремі 1.5 [5].

Через $[W]^N$ позначатимемо декартовий степінь, а через $\|\cdot\,; W\|$ – норму банахового простору W, якщо $u \in [W]^N$, то $u = \mathrm{colon}(u_1, \ldots, u_N)$, де $u_j \in W (j = \overline{1,N})$.

Нехай $L^{p(x)}(\Omega)$, $L^{q(x)}(\Omega)$, $W^{1,p(x)}(\Omega)$, $\overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)$ – узагальнені простори Лебега та Соболєва, введені в [6],

$$\rho_p(v) = \int\limits_{\Omega} |v|^{p(x)} dx;\ \ \|v; L^{p(x)}(\Omega)\| = \inf\{\lambda > 0 \ |\ \rho_p(v/\lambda) \leqslant 1\}.$$

Зауваження 1. Якщо функція v задовольняє нерівність $\rho_p(v) \leqslant K_1$, де $K_1 = \mathrm{const} > 0$, то $\|v; L^{p(x)}(\Omega)\| \leqslant \max\{1, K_1\}$.

Зауваження 2. Якщо $p(x) \leqslant q(x)$ при $x \in \Omega$, то $L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ і $\|\cdot\,; L^{p(x)}(\Omega)\| \leqslant (1 + |\Omega|)\|\cdot\,; L^{q(x)}(\Omega)\|$, де символ $\hookrightarrow$ означає неперервне вкладення.

Простори $[L^2(\Omega)]^N$, $[L^{q(x)}(\Omega)]^N$, $[W^{1,p(x)}(\Omega)]^N$ наділимо нормами

$$||u;[L^2(\Omega)]^N|| = \left(\sum_{j=1}^{N} ||u_j; L^2(\Omega)||^2\right)^{1/2},$$

$$||u;[L^{q(x)}(\Omega)]^N|| = \sum_{j=1}^{N} ||u_j; L^{q(x)}(\Omega)||,$$

$$||u;[W^{1,p(x)}(\Omega)]^N|| = ||u;[L^{p(x)}(\Omega)]^N|| + \sum_{i=1}^{n} ||u_{x_i};[L^{p(x)}(\Omega)]^N||$$

відповідно. Аналогічно визначимо простори $[L^2(Q)]^N$,$[L^{q(x)}(Q)]^N$, $[L^{p(x)}(Q)]^N$.

Нехай X – замкнений підпростір простору $[W^{1,p(x)}(\Omega)]^N$, для якого виконуються (неперервні) вкладення $[\overset{\circ}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)]^N \hookrightarrow X \hookrightarrow [W^{1,p(x)}(\Omega)]^N$;

$$V = X \cap [L^{q(x)}(\Omega)]^N \cap [L^2(\Omega)]^N.$$

Тоді $V^* = X^* + \left[L^{\frac{q(x)}{q(x)-1}}(\Omega)\right]^N + [L^2(\Omega)]^N$.

Зауваження 3. З вибору простору V маємо $V \subset [L^2(\Omega)]^N$, де символ $\subset$ означає неперервне та щільне вкладення. Тому, ототожнивши $[L^2(\Omega)]^N$ зі спряженим до нього простором, ми можемо ототожнити його з деяким підпростором простору V^*. Тоді $V \subset [L^2(\Omega)]^N \subset V^*$.

Введемо простір

$$U(Q) = \Big\{u \mid u(t) \in V \text{ для майже усіх } t \in (0,T),\ u \in [L^2(Q)]^N \cap [L^{q(x)}(Q)]^N,$$
$$u_{x_i} \in [L^{p(x)}(Q)]^N,\ i = \overline{1,n}\Big\}$$

з нормою

$$||u;U(Q)|| = \sum_{i=1}^{n} ||u_{x_i};[L^{p(x)}(Q)]^N|| + ||u;[L^2(Q)]^N|| + ||u;[L^{q(x)}(Q)]^N||.$$

Зауваження 4. Можна довести, що

$$L^{p_2}((0,T);L^{p(x)}(\Omega)) \subset L^{p(x)}(Q) \subset L^{p_1}((0,T);L^{p(x)}(\Omega)).$$

Тому $L^s((0,T);V) \subset U(Q) \subset L^r((0,T);V)$ і $[U(Q)]^* \subset L^{\frac{s}{s-1}}((0,T);V^*)$.

Аналогічно як в [7, с. 145], при потребі розглядатимемо функцію $u = u(x,t), (x,t) \in Q$, як функцію, яка кожному моменту часу $t \in (0,T)$ ставить у відповідність функцію змінної x: $u(t) = u(\cdot,t)$.

Позначимо через $(\cdot,\cdot)$ скалярний добуток в R^N, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ і $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ – скалярний добуток між V^* і V та між $[U(Q)]^*$ і $U(Q)$ відповідно.

Далі розглядатимемо функції, які задовольняють такі умови:

(A): $a_{ij} \in L^\infty(Q)$; $a_{ij}(x,t) \geqslant a_0$ для майже усіх $(x,t) \in Q$, $a_0 = \text{const} > 0$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,N}$;

(C): елементи $c_{km}(k,m = \overline{1,N})$ матриці C належать простору $L^\infty(Q)$ і $(C(x,t)\xi,\xi) \geqslant c_0|\xi|^2$, $c_0 = \text{const}$, для майже усіх $(x,t) \in Q$ і для усіх $\xi \in R^N$;

(F): $F \in [L^{q'(x)}(Q)]^N$;

(G): $g_j \in L^\infty(Q)$; $g_j(x,t) \geqslant g_0$, для майже усіх $(x,t) \in Q$, $g_0 = \text{const} > 0$, $j = \overline{1,N}$.

(U): $u_0 \in V$.

Нехай K – замкнена опукла множина в V, яка містить нульовий елемент, $P_K : [L^2(\Omega)]^N \to K$ – оператор проектування $[L^2(\Omega)]^N$ на K; $B : [L^2(\Omega)]^N \to [L^2(\Omega)]^N$ – оператор штрафу, який визначається за правилом: $Bw = w - P_K(w)$; сім'я операторів $\{A(t) \mid A(t) : V \to V^*$ для майже усіх $t \in (0,T)\}$ визначається рівністю

$$\langle A(t)u, v\rangle = \int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x,t)|u_{j,x_i}(x)|^{p(x)-2}u_{j,x_i}(x)v_{j,x_i}(x) +$$

$$+(C(x,t)u(x), v(x)) + \sum_{j=1}^{N} g_j(x,t)|u_j(x)|^{q(x)-2}u_j(x)v_j(x)\Bigg]dx, \ \ u, v \in V;$$

оператори $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U(Q) \to [U(Q)]^*$ визначають так:

$$\langle\langle \mathcal{A}u, v\rangle\rangle = \int\limits_0^T \langle A(t)u(t), v(t)\rangle dt; \quad \langle\langle \mathcal{B}u, v\rangle\rangle = \int\limits_0^T \langle Bu(t), v(t)\rangle dt, \ \ u, v \in U(Q);$$

$$\mathcal{F} \in [U(Q)]^*, \quad \langle\langle \mathcal{F}, u\rangle\rangle = \int\limits_Q (F(x,t), u(x,t))dxdt, \ u \in U(Q).$$

Розглянемо задачу

$$u_t + \mathcal{A}u + \mathcal{B}u = \mathcal{F}, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2}$$

Означення. Розв'язком задачі (1), (2) називається функція $u \in U(Q) \cap C([0,T]; [L^2(\Omega)]^N)$, яка задовольняє рівняння (1) та умову (2).

Зауваження 5. Із зауваження 4 випливає, що ми можемо розглядати функцію u як розподіл на $(0,T)$ зі значеннями в V^* і тому похідну від u розумітимемо в сенсі простору $D^*((0,T); V^*)$.

Рівняння (1) розглядається в просторі $D^*((0,T); V^*)$. Тобто (1) означає, що $\int\limits_0^T \langle u_t(t) + A(t)u(t) + Bu(t) - F(t), v\rangle \varphi dt = 0$ для усіх $v \in V$ і для усіх $\varphi \in D(0,T)$.

Зауваження 6. Ми можемо трактувати (1) як рівність функціоналів у просторі $[U(Q)]^*$, де під похідною u_t будемо розуміти функціонал

$$\langle\langle u_t, w\rangle\rangle = \int\limits_0^T \langle u_t(t), w(t)\rangle dt, \ \text{для усіх } w \in U(Q).$$

Теорема. *Нехай виконуються умови (A) - (U) і разом з тим функції a_{ij}, g_j ($i = \overline{1,n}, j = \overline{1,N}$) та коефіцієнти матриці C належать простору $C([0,T]; L^\infty(\Omega))$.*

Тоді існує єдиний розв'язок u задачі (1), (2).

Доведення. Використаємо метод Фаедо-Гальоркіна.

1) (Побудова гальоркінських наближень). Нехай $\{w^1, \ldots, w^m, \ldots\}$ – база простору V, $u^m(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_{km}(t) w^k(x)$, $(x,t) \in Q$, де $\varphi_{1m}(t), \ldots, \varphi_{mm}(t)$ шукаємо як розв'язки задач

$$\left\langle \frac{\partial u^m}{\partial t}(t), w^\mu \right\rangle + \langle A(t) u^m(t), w^\mu \rangle + \langle B u^m(t), w^\mu \rangle =$$
$$= \int\limits_\Omega (F(x,t), w^\mu(x)) dx, \ \ 1 \leqslant \mu \leqslant m, \tag{3}$$

$$\varphi_{km}(0) = \varphi^0_{km}, \tag{4}$$

де φ^0_{km}, $k = 1, 2, \ldots$, – координати u_0 стосовно бази $\{w^\mu\}_{\mu=1}^\infty$ в $[L^2(\Omega)]^N$: $u^m(0) \equiv \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi^0_{km} w^k \to u_0$ в V при $m \to \infty$. Запишемо (3) у вигляді

$$\sum_{k=1}^m \varphi'_{km}(t)(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)} + \int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n a_{ij}(x,t) \Big| \sum_{k=1}^m \varphi_{km}(t) w^k_{j,x_i}(x) \Big|^{p(x)-2} \times$$
$$\times \sum_{k=1}^m \varphi_{km}(t) w^k_{j,x_i}(x) w^\mu_{j,x_i}(x) + \sum_{r,j=1}^N c_{rj}(x,t) \sum_{k=1}^m \varphi_{km}(t) w^k_j(x) w^\mu_r(x) +$$
$$+ \sum_{j=1}^N g_j(x,t) \Big| \sum_{k=1}^m \varphi_{km}(t) w^k_j(x) \Big|^{q(x)-2} \sum_{k=1}^m \varphi_{km}(t) w^k_j(x) w^\mu_j(x) \Bigg] dx +$$
$$+ \Big\langle B\Big(\sum_{k=1}^m \varphi_{km}(t) w^k \Big), w^\mu \Big\rangle = \int\limits_\Omega (F(x,t), w^\mu(x)) dx, \ \ 1 \leqslant \mu \leqslant m. \tag{5}$$

Нехай $\overline{\varphi}(t) = \mathrm{colon}(\varphi_{1m}(t), \ldots, \varphi_{mm}(t))$. Тоді (5) перепишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^m \varphi'_{km}(t)(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)} = G_\mu(t, \overline{\varphi}(t)), \ \ \mu = \overline{1, m}. \tag{6}$$

З лінійної незалежності системи $\{w^\mu\}_{\mu=1}^\infty$ в V маємо, що матриця $[(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)}]$ невироджена $(\det[(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)}] \neq 0)$. Тому система (6) може бути записана у вигляді

$$\overline{\varphi}'(t) = [(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)}]^{-1} \overline{G}(t, \overline{\varphi}(t))). \tag{7}$$

Функція $\overline{G}(t, \overline{y}) = \mathrm{colon}(G_1(t, \overline{y}), \ldots, G_m(t, \overline{y}))$, $t \in [0,T]$, $\overline{y} \in R^m$, є неперервною за $\overline{y}$ для майже усіх $t \in (0,T)$ і (з теореми Фубіні) вимірна за t при кожному фіксованому $\overline{y}$. Крім того, для кожного $l > 0$

$$|\overline{G}(t, \overline{y})| \leqslant m(t), \ \text{ де } \ m \in L^1(0,T) \ \text{ для усіх } \ \overline{y} : |\overline{y}| \leqslant l.$$

Тому з теореми Каратеодорі на деякому інтервалі $[0, t_0]$ існує абсолютно неперервна функція, яка є розв'язком задачі (7), (4). З апріорних оцінок, одержаних нижче, випливатиме, що цей розв'язок можна продовжити на весь відрізок $[0, T]$.

2) (Апріорні оцінки). Помножимо (3) на $\varphi_{\mu m}$ і підсумуємо за μ. Одержимо

$$\left\langle \frac{du^m}{dt}(t), u^m(t) \right\rangle + \int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n a_{ij}(x,t) |u^m_{j,x_i}(x,t)|^{p(x)} + (C(x,t) u^m(x,t), u^m(x,t)) +$$

$$+\sum_{j=1}^{N} g_j(x,t)|u_j^m(x,t)|^{q(x)}\Bigg] dx + \langle Bu^m(t), u^m(t)\rangle = \int_{\Omega} (F(x,t), u^m(x,t))dx.$$

Тому зінтегрувавши цю рівність за t відрізком $[0,\tau]$ $(0 < \tau \leqslant t_0)$ й оцінивши доданки на підставі умов теореми, матимемо нерівність

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} |u^m(x,\tau)|^2 dx + \int_{Q_{0,\tau}} \Bigg[a_0 \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} |u^m_{j,x_i}(x,t)|^{p(x)} + c_0 \sum_{j=1}^{N} |u_j^m(x,t)|^2 +$$

$$+(g_0 - \varkappa)\sum_{j=1}^{N} |u_j^m(x,t)|^{q(x)}\Bigg] dx\, dt + \int_0^{\tau} \langle Bu^m(t), u^m(t)\rangle dt \leqslant C_0 M_0, \qquad (8)$$

де $M_0 = \int\limits_{Q}\sum\limits_{j=1}^{N} |F_j(x,t)|^{q'(x)} dxdt + \int\limits_{\Omega} |u_0(x)|^2 dx$, $0 < \varkappa < g_0$, C_0 – стала, яка не залежить від m. Позначимо $y(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u(x,t)|^2 dxdt$. Тоді з (8) $\left(e^{2c_0 t} y(\tau)\right)' \leqslant 2C_0 M_0 e^{2c_0\tau}$. Тому $y(\tau) \leqslant C_2$ і з (8) та з зауваження 1 одержимо оцінки

$$\int_{\Omega} |u^m(x,\tau)|^2\, dx \leqslant C_2,$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} ||u^m_{j,x_i}; L^{p(x)}(Q_{0,\tau})|| + \sum_{j=1}^{N} ||u_j^m; L^2(Q_{0,\tau})|| + \sum_{j=1}^{N} ||u_j^m; L^{q(x)}(Q_{0,\tau})|| \leqslant C_2,$$

$$\int_0^{\tau} \langle Bu^m(t), u^m(t)\rangle\, dt \leqslant C_2,\ \ \tau \in (0, t_0), \qquad (9)$$

де стала C_2 не залежить від m.

З оцінки (9_1) випливає, що розв'язок задачі (7), (4) можна продовжити на весь інтервал $[0,T]$ і що оцінки (9) можна отримати для $t_0 = T$.

Нехай $A_1 = \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Покажемо обмеженість норм $||A_1 u^m; [U(Q)]^*||$. Для довільного $v \in U(Q)$, використовуючи узагальнену нерівність Гельдера ([6, с. 594]), одержимо

$$|\langle\langle A_1 u^m, v\rangle\rangle| = |\int_{Q} \Bigg[\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x,t)|u^m_{j,x_i}(x,t)|^{p(x)-2} u^m_{j,x_i}(x,t) v_{j,x_i}(x,t) +$$

$$+(C(x,t)u^m(x,t), v(x,t)) + \sum_{j=1}^{N} g_j |u_j^m(x,t)|^{q(x)-2} u_j^m(x,t) v_j(x,t)\Bigg] dxdt +$$

$$+\langle\langle \mathcal{B}u^m, v\rangle\rangle| \leqslant C_3\Bigg(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} ||\, |u^m_{j,x_i}|^{p(x)-1}; L^{p'(x)}(Q)|| \cdot ||v_{j,x_i}; L^{p(x)}(Q)|| +$$

$$+\sum_{j=1}^{N} ||u_j^m; L^2(Q)|| \cdot ||v_j; L^2(Q)|| + \sum_{j=1}^{N} ||\, |u_j^m|^{q(x)-1}; L^{q'(x)}(Q)|| \cdot ||v_j; L^{q(x)}(Q)|| +$$

$$+||\mathcal{B}u^m;[U(Q)]^*||\cdot||v;U(Q)||\Big),$$

де C_3 – стала не залежить від m. Оператор $\mathcal{B}$ є обмеженим. Тому з (9_2) випливає, що $||\mathcal{B}u^m;[U(Q)]^*||\leqslant||\mathcal{B}||\cdot||u^m;U(Q)||\leqslant C_4$ і $|\langle\langle A_1u^m,v\rangle\rangle|\leqslant C_5||v;U(Q)||$; сталі C_4, C_5 не залежать від m. Отже,

$$||A_1u^m;[U(Q)]^*||\leqslant C_5. \tag{10}$$

3) (Граничний перехід). Покажемо, що послідовність $\{u^m\}$ одностайно неперервна на [0,T]. Для цього достатньо виконати цю властивість на відрізках $[0,T_2]$ і $[T_1,T]$, де $0\leqslant T_1\leqslant T_2\leqslant T$. Зауважимо, що $u^m(0)\to u_0$ в V при $m\to\infty$. Тому існує стала $C_6>0$

$$||u^m(0);V||\leqslant C_6 \text{ для усіх } m. \tag{11}$$

Нехай $0\leqslant T_1<T_2\leqslant T$, $\delta\in(0,T-T_2)$. Домножимо (3) на $(\varphi_{\mu m}(0)-\varphi_{\mu m}(t))$, підсумуємо за μ від 1 до m та зінтегруємо за t від 0 до δ:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u^m(x,\delta)-u^m(x,0)|^2\,dx=\int\limits_0^{\delta}\langle Bu^m(t),u^m(0)-u^m(t)\rangle\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_{0,\delta}}\Bigg[\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(x,t)|u^m_{j,x_i}(x,t)|^{p(x)-2}u^m_{j,x_i}(x,t)(u^m_{j,x_i}(x,0)-u^m_{j,x_i}(x,t))+$$

$$+(C(x,t)u^m(x,t),u^m(x,0)-u^m(x,t))+\sum_{j=1}^{N}g_j(x,t)|u^m_j(x,t)|^{q(x)-2}u^m_j(x,t)\times$$

$$\times(u^m_j(x,0)-u^m_j(x,t))-(F(x,t),u^m(x,0)-u^m(x,t))\Bigg]dxdt.$$

Розглянемо доданок

$$\int\limits_{Q_{0,\delta}}a_{ij}(x,t)|u^m_{j,x_i}(x,t)|^{p(x)-2}u^m_{j,x_i}(x,t)(u^m_{j,x_i}(x,0)-u^m_{j,x_i}(x,t))dxdt=$$

$$=\int\limits_{Q_{0,\delta}}a_{ij}(x,t)|u^m_{j,x_i}(x,0)|^{p(x)-2}u^m_{j,x_i}(x,0)(u^m_{j,x_i}(x,0)-u^m_{j,x_i}(x,t))dxdt-$$

$$-\int\limits_{Q_{0,\delta}}a_{ij}(x,t)(|u^m_{j,x_i}(x,0)|^{p(x)-2}u^m_{j,x_i}(x,0)-|u^m_{j,x_i}(x,t)|^{p(x)-2}u^m_{j,x_i}(x,t))\times$$

$$\times(u^m_{j,x_i}(x,0)-u^m_{j,x_i}(x,t))dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{Q_{0,\delta}}a_{ij}(x,t)|u^m_{j,x_i}(x,0)|^{p(x)-2}u^m_{j,x_i}(x,0)(u^m_{j,x_i}(x,0)-u^m_{j,x_i}(x,t))dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_7\int\limits_{Q_{0,\delta}}|u^m_{j,x_i}(x,0)|^{p(x)-1}|u^m_{j,x_i}(x,0)-u^m_{j,x_i}(x,t)|dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_8\delta+C_7\int\limits_{Q_{0,\delta}}|u^m_{j,x_i}(x,0)|^{p(x)-1}|u^m_{j,x_i}(x,t)|dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_9\left(\delta + \int_0^\delta || \, |u^m_{j,x_i}(0)|^{p(x)-1}; L^{p'(x)}(\Omega)|| \cdot ||u^m_{j,x_i}(t); L^{p(x)}(\Omega)||dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_9\left(\delta + \delta^{\frac{p_1-1}{p_1}} || \, |u^m_{j,x_i}(0)|^{p(x)-1}; L^{p'(x)}(\Omega)|| \cdot ||u^m_{j,x_i}; L^{p_1}((0,T); L^{p(x)}(\Omega))||dt\right),$$

$i=\overline{1,n}, j=\overline{1,N}$. З (8) випливає, що

$$\rho_{p'}(|u^m_{j,x_i}(T_1)|^{p(x)-1}) = \int_\Omega |u^m_{j,x_i}(x,T_1)|^{p(x)}dx \leqslant C_{10},$$

де стала C_{10} не залежить від m. Тому (див. зауваження 1)

$$|| \, |u^m_{j,x_i}(T_1)|^{p(x)-1}; L^{p'(x)}(\Omega)|| \leqslant \max\{1, C_{10}\}.$$

Оскільки $L^{p(x)}(Q) \hookrightarrow L^{p_1}((0,T); L^{p(x)}(\Omega))$ і множина $\{u^m_{j,x_i}\}_{k=1}^{\infty}$ обмежена в просторі $L^{p(x)}(Q)$, то ця множина обмежена і в $L^{p_1}((0,T); L^{p(x)}(\Omega))$. Отже, $||u^m_{j,x_i}; L^{p_1}((0,T); L^{p(x)}(\Omega))|| \leqslant C_{11}$, де стала C_{11} не залежить від m. Тому для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_0 > 0$ таке, що для довільного $\delta \in (0, \delta_0)$ і довільних m

$$\int_{Q_{0,\delta}} a_{ij}(x,t)|u^m_{j,x_i}(x,t)|^{p(x)-2}u^m_{j,x_i}(x,t)(u^m_{j,x_i}(x,0) - u^m_{j,x_i}(x,t))dxdt < \varepsilon$$

для $i=\overline{1,n}, j=\overline{1,N}$. Аналогічні оцінки зробимо для доданків, що містять C та g_j, $(j=\overline{1,N})$, а за рахунок обмеженості і монотонності оператора B і для доданка, що містить оператор B. Крім того, для досить малих δ

$$\int_{Q_{0,\delta}} (F(x,t), u^m(x,0) - u^m(x,t))dxdt \leqslant C_{12}||F; L^{q'(x)}(Q_{0,\delta})||\times$$

$$\times||u^m(0) - u^m; L^{q(x)}(Q_{0,\delta})|| \leqslant C_{13}||F; L^{q'(x)}(Q_{0,\delta})|| < \varepsilon,$$

бо інтеграл множиною малої міри є малим. Отже, для $\varepsilon > 0$ існує $\delta_1 > 0$ не залежне від m таке, що для довільного $\delta \in (0, \delta_1)$

$$\int_\Omega |u^m(x,\delta) - u^m(x,0)|^2\,dx < \varepsilon. \tag{12}$$

З (3) та монотонності B для $t \in [0, T_2]$ $(\delta \in (0, T-T_2))$, легко одержуємо оцінку

$$\int_\Omega |u^m(x,t+\delta) - u^m(x,t)|^2\,dx \leqslant \int_\Omega |u^m(x,\delta) - u^m(x,0)|^2\,dx +$$

$$+2\int_{Q_{0,t}} (F(x,\tau+\delta) - F(x,\tau), u^m(x,\tau+\delta) - u^m(x,\tau))dxd\tau -$$

$$-2\int_0^t \langle A(\tau+\delta)u^m(\tau+\delta) - A(\tau)u^m(\tau), u^m(\tau+\delta) - u^m(\tau)\rangle\,d\tau. \tag{13}$$

Перший доданок в (13) оцінюємо за допомогою (12). До другого доданка застосуємо оцінку Гельдера. Функція F неперервна в середньому. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_2 \in (0, T - T_2)$ таке, що для довільного $\delta \in (0, \delta_2)$

$$\int\limits_{Q_{0,T_2}} |F(x, t+\delta) - F(x,t)|^{q'(x)} dxdt < \varepsilon.$$

Третій доданок зобразимо у вигляді

$$-2 \int\limits_{T_1}^{t} \langle A(\tau+\delta)u^m(\tau+\delta) - A(\tau)u^m(\tau), u^m(\tau+\delta) - u^m(\tau)\rangle \, d\tau =$$

$$= -2 \int\limits_{T_1}^{t} \langle A(\tau+\delta)u^m(\tau+\delta) - A(\tau+\delta)u^m(\tau), u^m(\tau+\delta) - u^m(\tau)\rangle \, d\tau -$$

$$-2 \int\limits_{T_1}^{t} \langle (A(\tau+\delta) - A(\tau))u^m(\tau), u^m(\tau+\delta) - u^m(\tau)\rangle \, d\tau$$

Перший доданок оцінимо за допомогою оцінки

$$\langle A(t)v_1 - A(t)v_2, v_1 - v_2\rangle \geqslant c_0 \int\limits_{\Omega} |v_1 - v_2|^2 dx, \quad v_1, v_2 \in V, \ t \in [0,T]. \tag{14}$$

Функції $a_{ij} \in C([0,T]; L^\infty(\Omega))$ $(i = \overline{1,n}, j = \overline{1,N})$. Тому існує $\delta_3 \in (0, T-T_2)$ таке, що для довільного $\delta \in (0, \delta_3)$: $||a_{ij}(\tau+\delta) - a_{ij}(\tau); L^\infty(\Omega)|| < \varepsilon$ для усіх $\tau \in [0, T_2]$. Аналогічні оцінки одержуємо для функцій g_j $(j = \overline{1,N})$ та елементів матриці C. Тому

$$|-2 \int\limits_{0}^{t} \langle (A(\tau+\delta) - A(\tau))u^m(\tau), u^m(\tau+\delta) - u^m(\tau)\rangle \, d\tau| =$$

$$= 2| \int\limits_{Q_{0,t}} \Big[\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}(\tau+\delta) - a_{ij}(\tau)) |u^m_{j,x_i}(\tau)|^{p(x)-2} u^m_{j,x_i}(\tau) (u^m_{j,x_i}(\tau+\delta) - u^m_{j,x_i}(\tau)) +$$

$$+((C(\tau+\delta) - C(\tau))u^m(\tau), u^m(\tau+\delta) - u^m(\tau)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} (g_j(\tau+\delta) - g_j(\tau)) |u^m_j(\tau)|^{q(x)-2} u^m_j(\tau) (u^m_j(\tau+\delta) - u^m_j(\tau)) \Big] dxdt| \leqslant C_{14}\varepsilon.$$

Тоді для досить малих $\delta > 0$ з (13) матимемо

$$\int\limits_{\Omega} |u^m(x, t+\delta) - u^m(x,t)|^2 \, dx \leqslant C_{15} \Big(\varepsilon + \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{\Omega} |u^m(x, \tau+\delta) - u^m(x,\tau)|^2 dx d\tau \Big)$$

Звідси, на підставі леми Гронуола [7, с. 191] випливає, що послідовність $\{u^m\}$ одностайно неперервна на відрізку $[0, T_2]$. Тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_4 \in (0, T - T_2)$ таке, що для довільного $\delta \in (0, \delta_4)$

$$\int\limits_{\Omega} |u^m(x, t+\delta) - u^m(x,t)|^2 \, dx < \varepsilon, \text{ для усіх } t \in [0, T_2]. \tag{15}$$

Аналогічно як (13) для $t \in [T_1, T]$, $\delta \in (0, T_1)$ одержуємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega} |u^m(x,t) - u^m(x,t-\delta)|^2\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |u^m(x,T_1) - u^m(x,T_1-\delta)|^2\, dx +$$

$$+2 \int\limits_{Q_{T_1,t}} (F(x,\tau) - F(x,\tau-\delta), u^m(x,\tau) - u^m(x,\tau-\delta))dxd\tau -$$

$$-2 \int\limits_{T_1}^{t} \langle A(\tau)u^m(\tau) - A(\tau-\delta)u^m(\tau-\delta), u^m(\tau) - u^m(\tau-\delta)\rangle\, d\tau.$$

З (15) випливає, що перший доданок у цій нерівності менший за ε при $\delta \in (0, \delta_4)$. Решту доданків оцінимо аналогічно як у випадку одержання (15). Отже, $\{u^m\}$ – одностайно неперервна на відрізку $[0, T]$. Тому з цієї послідовності можна вибрати підпослідовність збіжну в $C([T_1, T]; [L^2(\Omega)]^N)$. З цієї послідовності на підставі оцінок (9), (10) можна виділити таку підпослідовність $\{u^{m_k}\} \subset \{u^m\}$, що

$$u^{m_k} \to u \quad * - \text{слабко в } L^\infty((0,T); [L^2(\Omega)]^N),$$
$$A_1 u^{m_k} \to \chi \quad \text{слабко в } [U(Q)]^*$$

при $k \to \infty$. Крім того,

$$u^{m_k}(t) \to u(t) \quad \text{сильно в } [L^2(\Omega)]^N \text{ рівномірно за } t \in [0, T]$$

при $k \to \infty$. Тому $u(0) = u_0$. Оскільки функції u^{m_k} – неперервні, то $u \in C([0,T]; [L^2(\Omega)]^N)$.

Домножимо (3) на функцію $\varphi \in C^1([0,T])$, зінтегруємо за t від 0 до T і перший доданок одержаної рівності зінтегруємо частинами

$$-\int\limits_0^T \langle u^{m_k}(t), w^\mu\rangle \varphi' dt + \int\limits_0^T \langle (A(t)+B)u^{m_k}(t), w^\mu\rangle \varphi dt = \int\limits_Q (F(x,t), w^\mu(x))\varphi dxdt +$$

$$+\int\limits_{\Omega} (u^{m_k}(x,0), w^\mu(x))\varphi(0)dx - \int\limits_{\Omega} (u^{m_k}(x,T), w^\mu(x))\varphi(T)dx,\ \mu \in N.$$

Переходячи в цій рівності до границі при $m \to +\infty$, матимемо

$$-\int\limits_0^T \langle u(t), w^\mu\rangle \varphi' dt + \int\limits_0^T \langle \chi(t), w^\mu\rangle \varphi dt = \int\limits_Q (F(x,t), w^\mu(x))\varphi dxdt +$$

$$+\int\limits_{\Omega} (u_0(x), w^\mu(x))\varphi(0)dx - \int\limits_{\Omega} (u(x,T), w^\mu(x))\varphi(T)dx.$$

Оскільки $\{w^\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ база в V, то

$$-\int\limits_0^T \langle u(t), v\rangle \varphi' dt + \int\limits_0^T \langle \chi(t), v\rangle \varphi dt = \int\limits_Q (F(x,t), v(x))\varphi dxdt +$$

$$+\int\limits_{\Omega}(u_0(x),v(x))\varphi(0)dx-\int\limits_{\Omega}(u(x,T),v(x))\varphi(T)dx \qquad (16)$$

для усіх $v\in V$. Звідси, якщо φ фінітна на $(0,T)$, то

$$\langle u_t(t),v\rangle+\langle\chi(t),v\rangle=\langle F(t),v\rangle \text{ для усіх } v\in V \text{ для майже усіх } t\in(0,T).$$

Тому $u_t+\chi=\mathcal{F}$ і $u_t\in[U(Q)]^*$.

Згідно з [1, с. 384] оператор B є монотонним, обмеженим і семінеперервним. Можна показати, що для оператора A теж виконуються ці властивості. Тому аналогічно як в [5, с. 650] показуємо, що $\chi=A_1u$.

Існування доведено.

4) (Єдиність). Нехай u_1,u_2 розв'язки задачі (1), (2). Позначимо $u=u_1-u_2$. Тоді з (1) та монотонності оператора B одержимо

$$\langle\langle u_t,u\rangle\rangle+\langle\langle Au_1-Au_2,u_1-u_2\rangle\rangle=0.$$

Зінтегрувавши перший доданок частинами на підставі оцінки (14), матимемо

$$\int\limits_{\Omega}|u(x,t)|^2dx+c_0\int\limits_{Q_{0,t}}|u(x,t)|^2dxdt\leqslant 0,\ \ t\in(0,T].$$

Зробивши перетворення такі, як при виведенні оцінок (9) одержимо, що $u(x,t)=0$ майже скрізь в Q.

Зауваження 7. Ми розглянули досить загальний вигляд рівняння (1). Проте це зумовлено лише нашим бажанням, а не методом доведення. Наголосимо на деяких моментах поданого доведення. Принциповим є щільність вкладення $V\subset[L^2(\Omega)]^N$. Досягти цього вдалося завдяки специфічному вибору простору V, який відповідно був зумовлений виглядом рівняння (1). Якщо ми розглянемо задачу (1), (2), де в операторі $\mathcal{A}$ візьмемо $C\equiv 0$, $g_j\equiv 0\,(j=\overline{1,N})$ і в рівнянні (1) $\mathcal{B}\equiv 0$, $\mathcal{F}\in[L^2(\Omega)]^N$, то вибравши $V=X\cap[L^2(\Omega)]^N$ ми і тут одержимо щільне вкладення $V\subset[L^2(\Omega)]^N$. Доведення теореми підходить майже дослівно для цього випадку, якщо ми позначимо

$$U(Q)=\left\{u\ \mid\ u\in[L^2(Q)]^N,\ u_{x_i}\in[L^{p(x)}(Q)]^N,\ i=\overline{1,n},u(t)\in V,t\in[0,T]\right\}$$

Відмінність полягатиме лише в іншому способі одержання оцінок (9).

---

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.

2. *Калашников А.С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи матем. наук. – 1987. – Т.42. – Вып. 2 – С. 135-176.

3. *Шишков А.Е.* Об оценках скорости распространения возмущений в квазилинейных дивергентных вырождающихся параболических уравнений высокого порядка // Укр. мат. журн. – 1992. – Т.44. –N 10. – С.1451-1456.

4. *Бокало М.М., Сікорський В.М.* Про властивості розв'язків задачі без початкових умов для рівнянь, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації // Вісн. Львів. ун-ту. – 1998. – Вип. 51 – С. 85-98.

5. *Самохин В.Н.* Об одном классе уравнений обобщающих уравнения политропной фильтрации// Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т.32. – N 5 – С. 643-651.
6. *Kovacik O., Rakosnic Z., Rakosnic J.* On space $L^{p(x)}, W^{1,p(x)}$// Czechsl. Math. J. – 1991. – Vol.41. – N 4. – P.592–618.
7. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

O. Buhrii, S. Lavrenyuk

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION OF POLITROPIC FILTRATION TYPE

Initial-boundary value problem for the parabolic equation of politropic filtration type is studied. There are obtained the existence and uniqueness conditions of the solution of this problem.

Стаття надійшла до редколегії 02.07.99