ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.44-47

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.44-47

УДК 517.535

Ярослав Васильків

ЗРОСТАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ СЕРЕДНІХ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Для вивчення властивостей аргументів аналітичних в одиничному крузі функцій з нулями в точках $\{a_\nu = |a_\nu|e^{i\alpha_\nu},\ \nu \in \mathbb{N}\}$, $a_\nu \neq 0$, $|a_\nu| < 1$, у праці [1] (див. також [2]) введена функція

$$p\left(re^{i\theta}\right) = \int_0^r \sum_{|a_\nu| \leqslant t} \mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta - \alpha_\nu)}\right) t^{-1} dt, \quad 0 < r < 1, \quad \theta \in [0, 2\pi], \tag{1}$$

яка ефективно описує розподіл послідовності $\{a_\nu\}$ за модулями та аргументами, де

$$\mathcal{P}(r, w) = \mathrm{Re}\,\frac{r + w}{r - w}, \quad |w| < r,$$

– ядро Пуассона.

Нехай $\mathcal{Z} = \{a_\nu = |a_\nu|e^{i\alpha_\nu},\ a_\nu \neq 0,\ \nu \in \mathbb{N}\}$ довільна послідовність комплексних чисел з єдиною точкою скупчення на нескінченності.

Означення. *Функцію $p\left(re^{i\theta}\right)$, $0 < r < +\infty$, $\theta \in [0, 2\pi]$, задану співвідношенням (1), назвемо функцією розподілу послідовності $\mathcal{Z}$.*

Позначимо

$$n(r, \mathcal{Z}) = \sum_{|a_\nu| \leqslant r} 1, \quad N(r, \mathcal{Z}) = \int_0^r n(t, \mathcal{Z}) t^{-1} dt,$$

$$m_q(r, p) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p^q\left(re^{i\theta}\right) d\theta\right\}^{1/q}, \ 0 < r < +\infty,\ 1 \leqslant q < +\infty,$$

а також $1/q + 1/q' = 1$. Зауважимо, що $m_1(r, p) = N(r, \mathcal{Z})$.

У праці [2] (див. доведення теореми 1) для функції $p(z)$, $r = |z| < 1$, доведено такий результат, який залишається в силі для $r = |z| < +\infty$ і який сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{Z}$ довільна послідовність комплексних чисел . Тоді для довільного $1 \leqslant q < +\infty$*

$$m_q(r, p) \leqslant \int_0^r \left(\frac{r + t}{r - t}\right)^{1/q'} \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t}\, dt, \quad 0 < r < +\infty. \tag{2}$$

Нехай

$$\rho \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \rho[\mathcal{Z}] \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\log n(r, \mathcal{Z})}{\log r}.$$

Через $B(x, y)$, $x, y > 0$, позначимо бета–функцію Ейлера.

Наслідок 1. *Нехай $\mathcal{Z}$ послідовність комплексних чисел така, що $0 < \rho < +\infty$. Тоді для довільного $1 \leqslant q < +\infty$*

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{m_q(r,p)}{n(r,\mathcal{Z})} \leqslant 2^{1/q'} B(\rho, 1/q).$$

Використовуючи міркування, подібні до запропонованих у [2], також доведемо такий результат.

Теорема 2. *Нехай $\mathcal{Z}$ послідовність комплексних чисел , що зосереджена на скінченній системі k променів. Тоді для довільного $1 < q < +\infty$*

$$m_q(r,p) \geqslant \frac{r^{1/q'}}{2k} \int_0^r \frac{n(t,\mathcal{Z})}{(r-t)^{1/q'}} \frac{dt}{t}. \tag{3}$$

Наслідок 2. *Нехай $\mathcal{Z}$ послідовність комплексних чисел, що зосереджена на скінченній системі k променів така, що $0 < \rho < +\infty$. Тоді для довільного $1 < q < +\infty$*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{m_q(r,p)}{n(r,\mathcal{Z})} \geqslant \frac{1}{2k} B(\rho, 1/q). \tag{4}$$

Якщо ж, окрім того, $n(r,\mathcal{Z}) \sim r^\rho$, $r \to +\infty$, то

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{m_q(r,p)}{n(r,\mathcal{Z})} \geqslant \frac{1}{2k} B(\rho, 1/q). \tag{5}$$

Нагадаємо (див. [3]), що послідовність $\{r_n\}$, $r_n \to +\infty$, називається послідовністю піків Пойя порядку $0 < \rho < +\infty$ для $n(r,\mathcal{Z})$, якщо

$$n(r,\mathcal{Z}) \leqslant \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho-\varepsilon_n} n(r_n,\mathcal{Z}), \quad 1 \leqslant r \leqslant r_n, \tag{6}$$

для деякої послідовності $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0+$, $n \to +\infty$.

Доведення наслідку 1. З огляду на співвідношення (2) та (6), для послідовності піків Пойя $\{r_n\}$ порядку $0 < \rho < +\infty$ для $n(r,\mathcal{Z})$ одержуємо

$$m_q(r_n,p) \leqslant n(r_n,\mathcal{Z}) \int_0^{r_n} \left(\frac{r_n+t}{r_n-t}\right)^{1/q'} \left(\frac{t}{r_n}\right)^{\rho-\varepsilon_n} \frac{dt}{t} = n(r_n,\mathcal{Z}) \int_0^1 \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{1/q'} \times$$
$$\times y^{\rho-1-\varepsilon_n} dy \leqslant 2^{1/q'} n(r_n,\mathcal{Z}) B(\rho-\varepsilon_n, 1/q), \quad 1/q + 1/q' = 1, \quad 1 \leqslant q < +\infty,$$

що імплікує

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{m_q(r,p)}{n(r,\mathcal{Z})} \leqslant \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{m_q(r_n,p)}{n(r_n,\mathcal{Z})} \leqslant 2^{1/q'} B(\rho, 1/q).$$

Доведення теореми 2. Нехай послідовність $\mathcal{Z}$ зосереджена на скінченній системі k променів: $\{te^{i\varphi_j}\}_{j=1}^k$, $0 \leqslant \varphi_1 < \cdots < \varphi_k < 2\pi$, $0 < t \leqslant r < +\infty$; $n_j(r)$ – кількість точок послідовності $\mathcal{Z}$ (з урахуванням їхньої кратності) на промені $\{te^{i\varphi_j}\}$, $0 < t \leqslant\leqslant r < +\infty$. Очевидно, що $\sum_{j=1}^k n_j(r) = n(r,\mathcal{Z})$. У цьому випадку функція $p(z)$ (див. співвідношення (1)) набуде вигляду

$$p\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{j=1}^k \int_0^r \frac{n_j(t)}{t} \mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta-\varphi_j)}\right) dt.$$

Для довільного $1 < q < +\infty$ приймемо

$$g\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2kr}\sum_{j=1}^{k}\int_0^r \left|\frac{r+\rho e^{i(\theta-\varphi_j)}}{r-\rho e^{i(\theta-\varphi_j)}}\right|^{1/q'} d\rho.$$

Враховуючи інтегральну нерівність Мінковського [4, с. 24] та нерівності

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{r+\rho e^{ix}}{r-\rho e^{ix}}\right| dx \leqslant 1 + \frac{2}{\pi}\log\frac{r+\rho}{r-\rho},$$

$$\int_0^r \log\frac{r+\rho}{r-\rho}d\rho = 2\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2m+1}\int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2m+1}d\rho = r\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)(m+1)} \leqslant$$
$$\leqslant r\left(1+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m(m+1)}\right) \leqslant \frac{3}{2}r,$$

знаходимо

$$m_{q'}(r,g) \leqslant \frac{1}{2kr}\sum_{j=1}^{k}\int_0^r d\rho\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{r+\rho e^{i(\theta-\varphi_j)}}{r-\rho e^{i(\theta-\varphi_j)}}\right| d\theta\right\}^{1/q'} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2r}\int_0^r\left(1+\frac{2}{\pi}\log\frac{r+\rho}{r-\rho}\right)^{1/q'}d\rho \leqslant \frac{1}{2r}\left(r+\frac{3}{\pi}r\right) < 1.$$

Тоді, застосовуючи нерівність Гельдера, для всіх $1 < q < +\infty$, $0 < r < +\infty$, одержуємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\left(re^{i\theta}\right) g\left(re^{i\theta}\right)\, d\theta \leqslant m_q(r,p)m_{q'}(r,g) \leqslant m_q(r,p). \tag{7}$$

Але функція $|F(z)|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $F(z) = (1+z)(1-z)^{-1}$ субгармонійна в крузі $\{|z| < 1\}$. Тому [4, с. 72]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|F\left(\frac{\rho}{r}e^{ix}\right)\right|^\alpha \mathcal{P}\left(\frac{\rho}{r},\frac{\rho t}{r^2}e^{ix}\right)dx \geqslant \left|F\left(\frac{\rho t}{r^2}\right)\right|^\alpha = \left(\frac{r^2+\rho t}{r^2-\rho t}\right)^\alpha,\ 0 < t,\rho < r.$$

З урахуванням цього факту, нерівність (7) набуде вигляду

$$m_q(r,p) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\left(re^{i\theta}\right) g\left(re^{i\theta}\right)d\theta = \frac{1}{2kr}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\int_0^r\frac{n_j(t)}{t}dt\int_0^r d\rho\frac{1}{2\pi}\times \tag{8}$$
$$\times\int_0^{2\pi}\left|\frac{r+\rho e^{i(\theta-\varphi_l)}}{r-\rho e^{i(\theta-\varphi_l)}}\right|^{1/q'}\mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta-\varphi_j)}\right)d\theta \geqslant \frac{1}{2k}\int_0^r\frac{n(t,Z)}{t}\frac{dt}{r}\int_0^r\left(\frac{r^2+\rho t}{r^2-\rho t}\right)^{1/q'}d\rho.$$

Зауважимо, що

$$\frac{1}{r}\int_0^r\left(\frac{r^2+\rho t}{r^2-\rho t}\right)^{1/q'}d\rho = \int_0^1\left(\frac{r+xt}{r-xt}\right)^{1/q'}dx \geqslant r^{1/q'}\int_0^1\frac{dx}{(r-xt)^{1/q'}} =$$
$$= r^{1/q'}\frac{r^{1/q}}{t}q\frac{(1-t/r)^{1/q'}-1+t/r}{(1-t/r)^{1/q'}} \geqslant \frac{r^{1/q'}}{(r-t)^{1/q'}}.$$

Звідси та з (8) отримуємо (3).

Для доведення наслідку 2 використаємо таке поняття (див. [5]): послідовність $\{r_n\}$, $r_n \to +\infty$ називається послідовністю піків Пойя порядку $0 < \rho < +\infty$ другого роду для $n(r, \mathcal{Z})$, якщо нерівність

$$n(r, \mathcal{Z}) \geqslant \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho} (1 - \varepsilon_n) n(r_n, \mathcal{Z}), \quad a_n^{-1} r_n \leqslant r \leqslant a_n r_n, \tag{9}$$

виконується для деяких $a_n \to +\infty$, $\varepsilon_n \to 0+$, $n \to +\infty$.

Доведення наслідку 2. З огляду на співвідношення (3) та (9), на послідовності піків Пойя $\{r_n\}$ другого роду для $n(r, \mathcal{Z})$ маємо

$$\frac{m_q(r_n, p)}{n(r_n, \mathcal{Z})} \geqslant \frac{1}{2kn(r_n, \mathcal{Z})} \int_{a_n^{-1} r_n}^{r_n} \frac{n(t, \mathcal{Z})}{(1 - t/r_n)^{1/q'}} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{(1 - \varepsilon_n)}{2k} \int_{a_n^{-1}}^{1} y^{\rho - 1} (1 - y)^{-1/q'} dy,$$

звідки негайно випливає (4).

Далі, якщо $n(r, \mathcal{Z}) \sim r^{\rho}$, $r \to +\infty$, то з (3) одержимо

$$\frac{m_q(r, p)}{n(r, \mathcal{Z})} \geqslant \frac{1}{2kn(r, \mathcal{Z})} \int_0^r \frac{n(t, \mathcal{Z})}{(1 - t/r)^{1/q'}} \frac{dt}{t} \sim \frac{1}{2k} \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{\rho} \frac{dt}{t(1 - t/r)^{1/q'}} =$$
$$= \frac{1}{2k} \int_0^1 x^{\rho - 1} (1 - x)^{-1/q'} dx = \frac{1}{2k} B(\rho, 1/q), \quad r \to +\infty,$$

що імплікує (5).

---

1. *Васильків Я.В., Кондратюк А.А.* Про обмеженість середніх квадратичних логарифмів добутків Бляшке// Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51. – N 2. – С. 255–259.
2. *Васильків Я.В., Кондратюк А.А.* Інтегральні середні логарифмів добутків Бляшке// Вісн. Львів. ун-ту. – 1999. – Вип. 53. – С. 52–61.
3. *Shea D.F., Wainger S.* Growth problems for a class of entire functions via singular integral estimates// Ill. J. Math. – 1981. – Vol. 25. – N 1. – P. 42–50.
4. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М., 1984.
5. *Drasin D., Shea D.F.* Polya peaks and the oscillation of positive functions// Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 24. – N 2. – P. 404–411.

Ya. Vasylkiv

GROWTH OF INTEGRAL MEANS OF DISTRIBUTION FUNCTIONS FOR SEQUENCES

A notion of distribution function for a sequence of complex number is introduced. Unimprovable estimates for growth of ratio of integral means of arbitrary order for such functions with respect to the counting function of points of a sequence are established.

Стаття надійшла до редколегії 15.07.99