УДК 517.927.25+512.928.5

Андрій Гайдис

ПРО СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНУ ЗАДАЧУ ШТУРМА–ЛІУВІЛЛЯ

Вступ. У праці вивчається асимптотика власних елементів сім'ї самоспряжених операторів з дискретним спектром, які сильно збігаються до оператора множення на функцію. Загалом граничний оператор має неперервний спектр, і тоді власні функції операторів збігаються до узагальнених власних функцій граничного оператора тільки в деякому умовному сенсі [1,2]. Ми ж вивчаємо ситуацію, коли цей оператор є оператором множення на кусково сталу функцію. Він має два власні значення, яким відповідають два нескінченновимірні власні підпростори. Досліджується механізм "заповнення" цих підпросторів власними функціями дограничних операторів. У розділі 2 методом примежевого шару будується асимптотика власних функцій, які відповідають неперервним за малим параметром власним значенням λ_k^ε. Доведено, що в границі такі власні функції утворюють базу лише одного з підпросторів. Основний результат праці міститься в розділах 3,4, де з використанням методу ВКБ розвинень доведено існування та побудована асимптотика збіжних послідовностей власних елементів вигляду $\lambda^\varepsilon_{k(\varepsilon)}$, $u^\varepsilon_{k(\varepsilon)}$, де $k(\varepsilon) \to \infty$. Границі таких послідовностей заповнюють другий інваріантний підпростір.

1. Постановка задачі та деякі властивості

Нехай (a,b) – інтервал в $\mathbb{R}$ і $c \in (a,b)$. Розглянемо задачу на власні значення

$$-\varepsilon^2 y_\varepsilon'' + (U(x) - \lambda_\varepsilon) y_\varepsilon = 0 \qquad x \in (a,b), \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(a) = y_\varepsilon(b) = 0, \tag{2}$$

де ε – малий додатний параметр, а потенціал U має вигляд

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \in (a,c) \\ q^2, & x \in (c,b) \end{cases}$$

для деякої сталої $q > 0$. Рівняння (1) не виконується в точці $x = c$, тому додамо умови спряження

$$[y_\varepsilon]_{x=c} = [y_\varepsilon']_{x=c} = 0, \tag{3}$$

де $[f]_{x=c} = f(c+0) - f(c-0)$ – стрибок функції f в точці $x = c$.

Зауважимо, що власні функції задачі (1)–(3) можна записати в явному вигляді, де власні значення є коренями деяких трансцендентних рівнянь. Однак це лише частково допомагає в дослідженні задачі.

Ми вивчатимемо асимптотичну поведінку власних значень λ_ε та власних функцій y_ε задачі (1)–(3) при $\varepsilon \to 0$.

У просторі Соболєва $H_0^1(a,b)$ введемо неперервну білінійну форму

$$a_\varepsilon(u,v) = \varepsilon^2 \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx + q^2 \int_c^b u(x)v(x)\,dx$$

та норму $\|u\|_\varepsilon = a_\varepsilon(u,u)^{1/2}$. Тоді задачі (1)–(3) відповідає обмежений оператор $\mathrm{A}_\varepsilon : H_0^1(a,b) \to H_0^1(a,b)$, що породжений цією формою

$$a_\varepsilon(\mathrm{A}_\varepsilon\, u, v) = (u,v)_{L_2(a,b)}, \quad \text{для всіх } v \in H_0^1(a,b).$$

Цей оператор при кожному $\varepsilon > 0$ є компактним та самоспряженим щодо скалярного добутку $a_\varepsilon(\cdot,\cdot)$. Нехай $0 < \lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon < \dots < \lambda_n^\varepsilon < \dots$ – послідовність власних значень задачі (1)–(3), а $\{y_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ – система відповідних власних функцій.

Лема 1. *Для кожного натурального n власне значення λ_n^ε є неперервною функцією параметра $\varepsilon \in (0,1)$. Крім того, існує така стала C_n, що*

$$\lambda_n^\varepsilon \leqslant C_n \varepsilon^2.$$

Доведення. Неперервність власних значень одержуємо з варіаційного принципу Куранта та неперервності форми $a_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ за змінною ε. Нехай $\{\varphi_k \in H_0^1(a,b) | k = \overline{1,n}\}$ – деяка ортогональна в $L_2(a,b)$ система функцій така, що для всіх $k = \overline{1,n}$ виконується $\operatorname{supp}\varphi_k \subset (a,c)$ і система похідних $\{\varphi_k'\}$ також ортогональна в $L_2(a,b)$.

Позначимо через P_ε підпростір, породжений власними функціями $y_1^\varepsilon, \dots, y_{n-1}^\varepsilon$ задачі (3)–(5), а через $P_\varepsilon^\perp$ – його ортогональне доповнення в $L_2(a,b)$. Тоді існує такий ненульовий вектор $(\alpha_1^\varepsilon, \dots, \alpha_n^\varepsilon)$, що функція $v = \sum_{k=1}^n \alpha_k^\varepsilon \varphi_k$ належить $P_\varepsilon^\perp$. Тому

$$\lambda_n^\varepsilon = \inf_{u \in P_\varepsilon^\perp \cap H_0^1(a,b)} \frac{a_\varepsilon(u,u)}{\|u\|^2_{L_2(a,c)}} \leqslant \frac{a_\varepsilon(v,v)}{\|v\|^2_{L_2(a,b)}} =$$

$$= \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n \frac{(\alpha_k^\varepsilon)^2 \|\varphi_k'\|^2_{L_2(a,c)}}{\sum\limits_{i=1}^n (\alpha_i^\varepsilon)^2 \|\varphi_i\|^2_{L_2(a,c)}} \leqslant \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n \frac{\|\varphi_k'\|^2_{L_2(a,c)}}{\|\varphi_k\|^2_{L_2(a,c)}} = C_n \varepsilon^2.$$

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай власна функція y_n^ε є нормованою в $H_0^1(a,b)$, тоді її звуження на інтервал (c,b) справджує оцінку*

$$\|y_n^\varepsilon\|_{L_2(c,b)} \leqslant C\varepsilon.$$

Доведення. Для функції y_n^ε правильна тотожність

$$\varepsilon^2 \int_a^b y^{\varepsilon\,\prime} \varphi'\,dx + q^2 \int_c^b y^\varepsilon \varphi\,dx = \lambda_\varepsilon \int_a^b y^\varepsilon \varphi\,dx, \qquad \varphi \in H_0^1(a,b). \tag{4}$$

Тоді

$$q^2\|y_n^\varepsilon\|^2_{L_2(c,b)} = \lambda_n^\varepsilon\|y_n^\varepsilon\|^2_{L_2(a,b)} - \varepsilon^2\|y_n^{\varepsilon\prime}\|^2_{L_2(a,b)}, \tag{5}$$

і залишається скористатися лемою 1. Лему доведено.

2. Асимптотика власних значень при фіксованому номері

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Введемо позначення $\lambda_\varepsilon = \lambda_n^\varepsilon$ і $y_\varepsilon = y_n^\varepsilon$. Асимптотичні розвинення власних значень шукатимемо у вигляді

$$\lambda_\varepsilon \sim \varepsilon^2(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots + \varepsilon^n\lambda_n + \dots), \tag{6}$$

а власних функцій – у вигляді регулярного ряду на інтервалі (a, c)

$$y_\varepsilon(x) \sim v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \dots + \varepsilon^n v_n(x) + \dots, \qquad x \in (a, c), \tag{7}$$

і методом примежевого шару на інтервалі (c, b)

$$y_\varepsilon(x) \sim e^{-\varepsilon^{-1}q(x-c)}(\varepsilon w_1(x) + \varepsilon^2 w_2(x) + \dots + \varepsilon^n w_n(x) + \dots), \quad x \in (c, b). \tag{8}$$

Підставимо розвинення (6)–(8) у задачу (1)–(3). Зокрема, одержимо

$$v_0'' + \lambda_0 v_0 = 0, \quad x \in (a, c); \qquad v_0(a) = 0, \quad v_0(c) = 0. \tag{9}$$

Отже, головні члени асимптотики λ_0 і v_0 є власними елементами задачі Штурма-Ліувілля (9), спектр якої складається з послідовності простих додатних власних значень. Виберемо власне значення λ_0 цієї задачі. Тоді власна функція однозначно визначається умовами $\|v_0\|_{L_2(a,c)} = 1$ і $v_0'(a) > 0$.

Тоді функція w_1 є розв'язком задачі Коші

$$w_1' = 0, \quad x \in (c, b); \qquad w_1(c) = -q^{-1}v_0'(c),$$

тобто $w_1(x) = -q^{-1}v_0'(c)$. Зауважимо, що кожна частинна сума асимптотичного ряду (8) є експоненціально мала в околі точки $x = b$, тому крайова умова $y_\varepsilon(b) = 0$ не накладає ніяких обмежень на функції $w_k(x)$.

Далі функція v_1 задовольняє задачу

$$v_1'' + \lambda_0 v_1 = -\lambda_1 v_0, \quad x \in (a, c); \quad v_1(a) = 0, \quad v_1(c) = -q^{-1}v_0'(c). \tag{10}$$

Число λ_1 знайдемо з умови існування розв'язку цієї задачі, а саме

$$\lambda_1 = -q^{-1}(v_0'(c))^2.$$

Зауважимо, що перша поправка λ_1 є від'ємною. Тоді задача (10) має єдиний розв'язок, підпорядкований умові $(v_1, v_0)_{L_2(a,c)} = 0$.

Припустимо, що знайдено коефіцієнти рядів λ_i, v_i для $i \leqslant k-1$ і w_i для $i \leqslant k$. Тоді функція v_k є розв'язком задачі

$$\begin{gathered} v_k'' + \lambda_0 v_k = -\lambda_k v_0 - \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i v_{k-i}, \\ v_k(a) = 0, \; v_k(c) = q^{-1}(w_{k-1}'(c) - v_{k-1}'(c)). \end{gathered} \tag{11}$$

Задача (11) має розв'язок тоді і лише тоді, коли

$$\lambda_k = q^{-1}(w'_{k-1}(c) - v'_{k-1}(c))v'_0(c). \tag{12}$$

Виберемо розв'язок v_k так, щоб $(v_k, v_0)_{L_2(a,c)} = 0$. Далі можна знайти функцію w_{k+1} як розв'язок задачі

$$\begin{aligned} w'_{k+1} &= (2q)^{-1}(w''_k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i w_{k-i}), \quad x \in (c,b), \\ w_k(c) &= q^{-1}(w'_{k-1}(c) - v'_{k-1}(c)), \end{aligned} \tag{13}$$

тобто

$$w_{k+1}(x) = \frac{1}{q}(w'_k(c) - v'_k(c)) + \frac{1}{2q}\int_c^x (w''_k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i w_{k-i})\, dt.$$

Отже, ми завершили побудову формальних асимптотик.

Введемо тепер позначення для часткових сум розвинень (6)–(8):

$$\lambda_N(n,\varepsilon) = \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \varepsilon^i,$$

$$S_N(x,n,\varepsilon) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{N} v_i(x)\varepsilon^i, & x \in (a,c), \\ e^{-\varepsilon^{-1}q(x-c)} \sum\limits_{i=1}^{N} w_i(x)\varepsilon^i, & x \in (c,b), \end{cases}$$

де λ_0 – n-не власне значення задачі (9), а v_0 – відповідна власна функція.

Обґрунтування побудованих асимптотик проводиться за класичною схемою [3]. Можна показати, що λ_N^{-1} і S_N є "майже власним значенням" та "майже власним вектором" оператора A_ε, звідки і випливатиме теорема 1. Ми опустимо всі проміжні міркування і сформулюємо лише кінцевий результат.

Теорема 1. *Нехай λ_n^ε – n-не власне значення задачі (1)–(3), а y_n^ε – власна функція, що йому відповідає. Тоді виконуються оцінки*

$$\begin{gathered} |\varepsilon^{-2}\lambda_n^\varepsilon - \lambda_N(n,\varepsilon)| \leqslant C_1(N,n)\varepsilon^{N+1}, \\ \|y_n^\varepsilon - u_N(x,n,\varepsilon)\|_{H_0^1(a,b)} \leqslant C_2(N,n)\varepsilon^N, \end{gathered}$$

де $u_N(x,n,\varepsilon) = S_N(x,n,\varepsilon) + \tilde{u}_N(x,n,\varepsilon)$, а функція $\tilde{u}_N(x,n,\varepsilon)$ задовольняє оцінку

$$|\tilde{u}_N(x,n,\varepsilon)| \leqslant C_3(N,n)e^{-\varepsilon^{-1}q(b-c)}.$$

3. Побудова асимптотик високочастотних власних коливань

Ще раз звернемось до асимптотик (7) і (8). Як бачимо, граничні функції

$$y_0(x) = \begin{cases} v_0(x), & x \in (a,c) \\ 0, & x \in (c,b) \end{cases}$$

не утворюють повної системи в $L_2(a,b)$, хоча для кожного $\varepsilon > 0$ система $\{y_n^\varepsilon\}$ такою властивістю володіє. Цей факт підказує нам, що можливі інші стійкі форми власних функцій. Для їхнього знаходження використаємо те, що асимптотики (7) і (8) не є рівномірними стосовно номера n.

Нехай $\varepsilon_k \to +0$ – послідовність малого параметра, $\lambda_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ – деяка послідовність власних значень задачі (1)–(3) така, що існує $\lim\limits_{\varepsilon_k\to+0} \lambda_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k} = \lambda_0 \in (0,\infty)$, а $y_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ – послідовність відповідних власних функцій, нормованих в $H_0^1(a,b)$.

Означення. *Казатимемо, що послідовність $y_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ моделює високочастотні власні коливання, якщо існує границя y_0 послідовності $y_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ в просторі $L_2(a,b)$, причому $y_0\big|_{(c,b)} \neq 0$.*

Наші дослідження будуть присвячені пошуку послідовностей, що моделюють високочастотні власні коливання. Термін високочастотні власні коливання ми запозичили з праць [4–7], де вперше вивчалися подібні проблеми.

Надалі для спрощення запису замість $\lambda_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$, $y_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ писатимемо ξ_k, y_k.

Лема 3. *Замикання множини $\{(\varepsilon,\lambda_n^\varepsilon) | \varepsilon \in (0,1),\ n\in\mathbf{N}\}$ в площині $\mathbf{R}^2_{\varepsilon\lambda}$ містить промінь $\{(0,\lambda) | \lambda \geqslant 0\}$.*

Доведення. Нехай $\lambda_0 > 0$ – довільне число, а $K_\sigma(\lambda_0)$ – круг радіуса σ з центром у точці $(0,\lambda_0)$, де $\sigma > 0$ – довільне число.

Зафіксуємо $\varepsilon_0 < \sigma$. Згідно з властивостями спектра задачі Штурма–Ліувілля, знайдеться таке власне значення $\lambda_n^{\varepsilon_0}$, що $\lambda_n^{\varepsilon_0} > \lambda_0$. Оскільки λ_n^ε – неперервна функція параметра ε і $\lambda_n^\varepsilon \leqslant C\varepsilon^2$, то її графік обов'язково перетне вибраний круг. Лему доведено.

Отже, кожне число $\lambda_0 \in (0,+\infty)$ є границею деякої послідовності власних значень задачі (1)-(3). Однак при цьому послідовність відповідних власних функцій не обов'язково моделює високочастотні власні коливання. Справді, нехай $y_k \to y_0$ в $L_2(a,b)$, причому $\operatorname{supp} y_0 \cap (c,b) \neq \emptyset$. Функцію $\varphi \in C_0^\infty(c,b)$ виберемо так, щоб $(y_0,\varphi)_{L_2(a,b)} \neq 0$ і перепишемо рівність (4) у такому вигляді

$$-\varepsilon_k^2 (y_k,\varphi'')_{L_2(c,b)} = (\xi_k - q^2)(y_k,\varphi)_{L_2(c,b)}.$$

Звідси видно таке: якщо y_k має ненульову границю в $L_2(c,b)$, то $|\xi_k - q^2| \leqslant C\varepsilon_k^2$.

Лема 4. *Якщо послідовність власних значень ξ_k задачі (1)–(3) задовольняє оцінку $|\xi_k - q^2| \leqslant C\varepsilon_k^2$ по деякій послідовності $\varepsilon_k \to +0$, то послідовність відповідних власних функцій, нормованих в $H_0^1(a,b)$, є нескінченно малою в $L_2(a,c)$.*

Доведення. Твердження цієї леми випливає з рівності (5).

Для побудови асимптотик власних функцій на інтервалі (a,c) використаємо метод ВКБ–наближень. Враховуючи попередні твердження, асимптотичні розвинення власних елементів шукатимемо у вигляді

$$\xi_k \sim q^2 + \varepsilon_k^2\xi_2 + \varepsilon_k^3\xi_3 + \cdots + \varepsilon_k^n\xi_n + \ldots \tag{14}$$

$$y_k(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n(x)\cos\varepsilon_k^{-1}S(x) + h_n(x)\sin\varepsilon_k^{-1}S(x)\right)\varepsilon^n, \quad x\in(a,c), \tag{15}$$

$$y_k(x) \sim u_0(x) + \varepsilon_k u_1(x) + \cdots + \varepsilon_k^n u_n(x) + \ldots, \quad x\in(c,b), \tag{16}$$

де $S(x) = \alpha x + \beta$, $u_0 \neq 0$.

Підставимо ці розвинення у задачу (1)–(3). Тоді $\alpha = q$, а u_0 та ξ_2 є власними елементами задачі Штурма–Ліувілля

$$u_0'' + \xi_2 u_0 = 0, \quad x \in (c, b), \quad u_0(c) = 0, \; u_0(b) = 0. \tag{17}$$

Виберемо яке-небудь власне значення задачі (17). Власну функцію визначимо умовами: $\|u_0\|_{L_2(c,b)} = 1$ і $u_0'(c) > 0$.

Далі функції g_1 і h_1 є розв'язками диференціальних рівнянь $g_1' = 0$, $h_1' = 0$, тобто $g_1(x) \equiv A_1$, $h_1(x) \equiv B_1$; крім того, сталі A_1 і B_1 є розв'язком неоднорідної алгебраїчної системи лінійних рівнянь

$$A_1 \cos \varepsilon_k^{-1}(qa + \beta) + B_1 \sin \varepsilon_k^{-1}(qa + \beta) = 0,$$
$$-A_1 \sin \varepsilon_k^{-1}(qc + \beta) + B_1 \cos \varepsilon_k^{-1}(qc + \beta) = q^{-1} u_0'(c),$$

визначник якої $\Delta = -q \cos \varepsilon_k^{-1} q(c - a)$. Послідовність $\varepsilon_k \to +0$ виберемо так, щоб ця система завжди мала розв'язок, тобто $\Delta \neq 0$: $\varepsilon_k^{-1} q(c-a) = \delta + 2\pi k$, $\delta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Крім того, вимагатимемо, щоб розв'язок не залежав від номера k. Цього можна досягнути, прийнявши, що $\beta = -qa$. Отже, при зроблених припущеннях розв'язки мають вигляд: $A_1 = 0$, $B_1 = \frac{u_0'(c)}{q \cos \delta}$.

Функція u_1 є розв'язком задачі

$$u_1'' + \xi_2 u_1 = -\xi_3 u_0, \quad x \in (c, b), \quad u_1(c) = q^{-1} u_0'(c) \operatorname{tg} \delta, \; u_1(b) = 0.$$

Сталу ξ_3 знайдемо з умови розв'язності цієї задачі: $\xi_3 = -q^{-1}(u_0'(c))^2 \operatorname{tg} \delta$. Функцію u_1 однозначно визначимо умовою: $(u_1, u_0)_{L_2(c,b)} = 0$.

Нехай знайдено коефіцієнти u_k, g_k і h_k для всіх $k \leqslant n - 1$ та ξ_k при $k \leqslant n + 1$. Тоді функції g_n і h_n задовольняють диференціальні рівняння

$$g_n' = \frac{1}{2q}\Big(h_{n-1}'' + \sum_{i=2}^{n+1} \xi_i h_{n-i+1}\Big), \qquad h_n' = -\frac{1}{2q}\Big(g_{n-1}'' + \sum_{i=2}^{n+1} \xi_i g_{n-i+1}\Big).$$

Звідси знаходимо

$$g_n(x) = \frac{1}{2q} \int_a^x \Big(h_{n-1}'' + \sum_{i=2}^{n+1} \xi_i h_{n-i+1}\Big)\, dt + A_n,$$
$$h_n(x) = -\frac{1}{2q} \int_a^x \Big(g_{n-1}'' + \sum_{i=2}^{n+1} \xi_i g_{n-i+1}\Big)\, dt + B_n,$$

де $A_n = 0$, $B_n = \frac{1}{q \cos \delta}\Big(u_{n-1}'(c) - \big(g_{n-1}'(c) - \frac{1}{2}\int_a^c \big(h_{n-1}''(t) + \sum_{i=2}^{n+1} \xi_i h_{n-i+1}(t)\big)\, dt\big) \cos \delta - {}$ $-(h_{n-1}'(c) - q g_n(c)) \sin \delta\Big)$.

Функція u_n є розв'язком такої задачі:

$$u_n'' + \xi_2 u_n = -\xi_{n+2} u_0 - \sum_{i=3}^{n+1} \xi_i u_{n-i+2},$$
$$u_n(c) = g_n(c) \cos \delta + h_n(c) \sin \delta, \quad u_n(b) = 0.$$

Сталу ξ_{n+2} знайдемо так само, як і ξ_3: $\xi_{n+2} = (g_n(c)\cos\delta + h_n(c)\sin\delta)u_0'(c)$. Функцію u_n визначимо однозначно умовою $(u_n, u_0)_{L_2(c,b)} = 0$. Отже, ми повністю побудували формальні асимптотики.

4. Обґрунтування високочастотних асимптотичних розвинень

У розділі 3 ми побудували асимптотичні розвинення, але не визначили об'єкта апроксимації. Це пов'язано з тим, що визначити цей об'єкт ми зможемо лише за допомогою побудованих розвинень.

Лема 5. *Нехай послідовність власних значень ξ_k задачі (1)-(3) задовольняє рівність $\xi_k = q^2 + \xi_2\varepsilon_k^2 + \tilde{\xi}_k\varepsilon_k^3$, де ξ_2 - деяке власне значення задачі (17), а величина $\tilde{\xi}_k$ має скінченну границю при $k \to \infty$, і нехай відповідні власні функції є нормованими в $H^1(c,b)$. Тоді величини ${\varepsilon_k}^{-1}|y_k(c)|$ та $|y_k'(c)|$ мають скінченні границі при $\varepsilon_k \to +0$.*

Доведення. На інтервалі (c, b) власна функція y_k задовольняє диференціальне рівняння $-\varepsilon_k^2 y_k'' + q^2 y_k = \xi_k y_k$; крім того, $y_k(b) = 0$. Тому

$$y_k(x) = B_k \sin \varepsilon_k^{-1}\sqrt{\xi_k - q^2}(x-b) = B_k \sin(\sqrt{\xi_2} + \alpha_k)(x-b), \quad x \in (c,b), \tag{18}$$

причому існує $\lim {\varepsilon_k}^{-1}\alpha_k < \infty$. Згідно з умовою леми $\|y_k\|_{H^1(c,b)} = 1$, а тому величина B_k має скінченну границю при $k \to \infty$.

Далі $y_k(c)$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} y_k(c) &= B_k \left(\sin\sqrt{\xi_2}(c-b)\cos\alpha_k(c-b) + \cos\sqrt{\xi_2}(c-b)\sin\alpha_k(c-b)\right) = \\ &= B_k \cos\sqrt{\xi_2}(c-b)\sin\alpha_k(c-b). \end{aligned} \tag{19}$$

Тут ми використали той факт, що ξ_2 є власним значенням задачі (17). Твердження леми випливає з рівностей (19) і (18).

Наслідок. *За умов леми 5 послідовність $\|y_k\|_{H^1(a,b)}/\|y_k\|_{H^1(c,b)}$ має скінченну границю при $k \to \infty$.*

Доведення. На інтервалі (a, c) функцію $y_k(x)$ можна подати у вигляді

$$y_k(x) = y_k(c)\cos\frac{\sqrt{\xi_k}}{\varepsilon_k}(x-c) + y_k'(c)\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\xi_k}}\sin\frac{\sqrt{\xi_k}}{\varepsilon_k}(x-c).$$

Звідси і випливає твердження наслідку.

Задачі (17), так само як і задачі (1)-(3), відповідає компактний, самоспряжений, додатно визначений, лінійний оператор $\mathrm{A}_0 : H_0^1(c,b) \to H_0^1(c,b)$ заданий рівністю

$$a_0(\mathrm{A}_0\, u, v) = (u, v)_{L_2(c,b)} \qquad \text{для всіх } v \in H_0^1(c,b),$$

де $a_0(u,v) = (u', v')_{L_2(c,b)}$. Через $\|u\|_0$ позначимо $\sqrt{a_0(u,u)}$.

Лема 6. *Нехай виконуються умови леми 5. Тоді існує така функція $\tilde{u}_k$, що виконується нерівність*

$$\left\|\mathrm{A}_0\, u_k - \frac{\varepsilon_k^2}{\xi_k - q^2}u_k\right\|_0 \leqslant C_1\varepsilon_k,$$

де $u_k(x) = y_k(x) + \tilde{u}_k(x)$, *а функція* $\tilde{u}_k$ *задовольняє оцінку*

$$\|\tilde{u}_k\|_{H^1(c,b)} \leqslant C_2\varepsilon_k.$$

Доведення. Згідно з лемою 5 функція $\tilde{u}_k(x) = y_k(c)\frac{x-b}{b-c}$ задовольняє потрібну оцінку; крім того, зауважимо, що функція $u_k(x) = y_k(x) + \tilde{u}_k(x)$ належить простору $H_0^1(c,b)$.

Оскільки множина $C_0^\infty(c,b)$ скрізь щільна в $H_0^1(c,b)$, то досить показати, що

$$\left|a_0(\mathrm{A}_0\, u_k - \frac{\varepsilon_k^2}{\xi_k - q^2}u_k, \varphi)\right| \leqslant C_1\varepsilon_k\|\varphi\|_{H_0^1(c,b)}.$$

Справді,

$$\left|a_0(\mathrm{A}_0\, u_k, \varphi) - \frac{\varepsilon_k^2}{\xi_k - q^2}a_0(u_k, \varphi)\right| = \left|(u_k,\varphi)_{L_2(c,b)} - \left(\xi_2^{-1} + O(\varepsilon_k)\right)(u_k', \varphi')_{L_2(c,b)}\right| \leqslant$$
$$\xi_2^{-1}\left|(y_k', \varphi')_{L_2(c,b)} - \xi_2(y_k,\varphi)_{L_2(c,b)}\right| + O(\varepsilon_k)\|\varphi\|_{H_0^1(c,b)}.$$

Потрібна оцінка випливає з тотожності (4) та умови леми. Лему доведено.

Лема 7. *Нехай послідовність власних значень* ξ_k *задачі (1)–(3) задовольняє рівність* $\xi_k = q^2 + \xi_2\varepsilon_k^2 + \tilde{\xi}_k\varepsilon_k^3$, *де* ξ_2 *– деяке власне значення задачі (17), а величина* $\tilde{\xi}_k$ *має скінченну границю при* $k \to \infty$ *і нехай відповідні власні функції* y_k *є нормованими в* $H_0^1(a,b)$. *Тоді послідовність* y_k *має ненульову границю в* $L_2(c,b)$.

Доведення. Згідно з лемою 4 звуження послідовності функцій y_k на інтервал (a,c) є нескінченно малою в $L_2(a,c)$. Ми пронормуємо власні функції y_k в просторі $H^1(c,b)$ і покажемо, що ця послідовність збігається до власної функції u_0 задачі (17), що відповідає власному значенню ξ_2, оскільки за наслідком з леми 5 нормування послідовності y_k в просторах $H^1(a,b)$ і $H^1(c,b)$ – еквівалентні.

Підберемо додатне число d_1 так, щоб на відрізку $\left[\frac{\varepsilon_k^2}{\xi_k-q^2} - d_1, \frac{\varepsilon_k^2}{\xi_k-q^2} + d_1\right] = \left[\frac{1}{\xi_2+\tilde{\xi}_k\varepsilon_k} - d_1, \frac{1}{\xi_2+\tilde{\xi}_k\varepsilon_k} + d_1\right]$ було лише одне власне значення оператора A_0, а саме ξ_2^{-1}. Тоді при досить малих ε_k матимемо $\|u_0 - u_k\|_0 \leqslant C_3\varepsilon_k$ [3]. Враховуючи малість функції $\tilde{u}_k$, остаточно одержуємо

$$\|u_0 - y_k\|_{H^1(c,b)} \leqslant C_4\varepsilon_k.$$

Лему доведено.

Лема 8. *Нехай* ξ_2 *– деяке власне значення задачі (17). Тоді існує таке число* $d_2 > 0$, *що при достатньо малих* ε_k *на відрізку* $\left[\frac{1}{q^2+\xi_2\varepsilon_k^2} - d_2\varepsilon_k^3, \frac{1}{q^2+\xi_2\varepsilon_k^2} + d_2\varepsilon_k^3\right]$ *є не більше одного власного значення оператора* $\mathrm{A}_{\varepsilon_k}$.

Доведення. Припустимо, що це не так. Тоді існує послідовність малого параметра $\varepsilon_k \to +0$, дві послідовності власних значень задачі (1)–(3) $\lambda_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ та $\lambda_{m(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ такі, що для них виконуються умови леми 8, причому $n(\varepsilon_k) \neq m(\varepsilon_k)$. Згідно з лемою 7 послідовності відповідних власних функцій $y_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ та $y_{m(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$, нормованих в $H_0^1(a,b)$, мають одну і ту ж ненульову границю в $L_2(a,b)$, а саме

$$\begin{cases} 0, & x \in (a,c) \\ u_0(x), & x \in (c,b) \end{cases}.$$

Але це неможливо, оскільки при кожному ε_k функції $y_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ та $y_{m(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ ортогональні в $L_2(a,b)$. Лему доведено.

Введемо тепер позначення для часткових сум розвинень (14)–(16):

$$\xi_N(\varepsilon_k) = \sum_{n=0}^{N} \xi_n \varepsilon_k^n, \quad \xi_0 = q^2, \ \xi_1 = 0,$$

$$S_N(x,\varepsilon_k) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{N} \left(g_n(x)\cos q\varepsilon_k^{-1}(x-a) + h_n(x)\sin q\varepsilon_k^{-1}(x-a)\right)\varepsilon_k^n, & x \in (a,c), \\ \sum\limits_{n=0}^{N} u_n(x)\varepsilon_k^n, & x \in (c,b), \end{cases}$$

де послідовність ε_k була вибрана при побудові асимптотик.

Зауважимо, що функція S_N належить до $H_0^1(a,b)$.

Лема 9. *Для кожного натурального N існує стала C_N така, що виконується нерівність*

$$\|A_{\varepsilon_k} S_N - \xi_N(\varepsilon_k)^{-1} S_N\|_{\varepsilon_k} \leqslant C_N \ \varepsilon_k^{N-1}.$$

Доведення цієї леми аналогічне до доведення леми 6.

Теорема 2. *Нехай ε_k – послідовність визначена при побудові асимптотик. Тоді існує така послідовність власних значень ξ_k задачі (1)–(3), що виконується оцінка*

$$|\xi_k - \xi_N(\varepsilon_k)| \leqslant C_N \ \varepsilon_k^{N+1},$$

а послідовність відповідних власних функцій моделює високочастотні власні коливання; крім того, виконується оцінка:

$$\|y_k - S_N\|_{H_0^1(a,b)} \leqslant \tilde{C}_N \ \varepsilon_k^{N-4},$$

зокрема функції y_k мають швидкоосцилюючий характер на інтервалі (a,c).

Доведення. Твердження цієї теореми випливає з лем 8 та 9 [3].

Отже, з теореми 1 зокрема випливає, що границі власних функцій задачі (1)–(3) при фіксованому номері власного значення утворюють базу власного підпростору V_0 оператора множення на функцію $U(x)$, що відповідає меншому власному значенню $\lambda = 0$. Проекції цих власних функцій на власний підпростір V_{q^2}, що відповідає більшому власному значенню $\lambda = q^2$, є малими за нормою $\|\cdot\|_{H^1(c,b)}$.

Аналогічно, границі послідовностей власних функцій задачі (1)–(3), що моделюють високочастотні власні коливання, утворюють базу простору V_{q^2}, а їхні проекції на V_0 є швидкоосцилюючими функціями з малою амплітудою.

---

1. *Маслов В. П.* Теория возмущений при переходе от дискретного спектра к непрерывному// Докл. АН СССР. – 1956. – Т.109ю – N2. – С.267–270.

2. *Маслов В. П.* Метод теории возмущений для отыскания спектра обыкновенных дифференциальных операторов с малым параметром при старшей производной// Докл. АН СССР. – 1956. – Т.111. – N5.– С.977–980.

3. *Вишик М. И., Люстерник А. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром// Успехи мат. наук. – 1957. – Т.12. – N 5. – С.3–122.

4. *Lobo-Hidalgo M., Sanchez-Palencia E.* Low and high frequency vibration in stiff problems// in De Giorgy 60th Birthday, Partial differential Equations and the Calculus of Variations. – Birkhaüser, 1990. – Vol.2. – P.729–742.

5. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.* Vibration and Coupling of Continuous Systems. Asymptotic Methods. – Springer Verlag, 1989.

6. *Sanchez-Palencia E.* Asymptotic and spectral properties of a class of singular-stiff problems// J. Math. Pures Appl. – 1992. – Vol. 71. – P.379–406.

7. *Lobo M., Perez E.* High frequency vibrations in a stiff problem// Math. Methods. Appl. Sci. – 1997. – Vol 7. – N 2. – P.291–311.

8. *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнение Шредингера.– М., 1983.

9. *Головатий Ю.Д., Головач І.А.* Про асимптотику глобальних власних коливань сильно неоднорідної струни// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип.48. – С.88–99.

A. Haidys

ON A SINGULARLY PERTURBED STURM–LIOUVILLE PROBLEM

We study the behaviour of eigenvalues and eigenvectors of the one-parameter family of selfadjoint operators with discrete spectrum. This family converges strongly to the operator of multiplication by a piecewise constant function. Complete asymptotic expansions of eigenvalues and corresponding eigenvectors that are continuous with respect to the parameter are constructed. Other eigenvector limits are found and their complete asymptotic expansions are constructed.

Стаття надійшла до редколегії 10.03.2000