ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.58–71

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.58–71

УДК 517.95

Галина Доманська

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ СИСТЕМИ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ У НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Крайові задачі для псевдопараболічних рівнянь є математичною моделлю багатьох фізичних та механічних процесів (фільтрація рідини в середовищах з подвійною пористістю [1], передача тепла в гетерогенному середовищі [2], перенесення вологи в ґрунті [3] та ін.). Загальна теорія таких рівнянь ґрунтовно викладена в працях [4,5]. Вивченню мішаних задач присвячено [6-8]. Задача Коші для псевдопараболічних рівнянь теж детально досліджувалась. Зокрема, Рандел [9] показав, що розв'язок задачі Коші для псевдопараболічного рівняння може бути єдиним лише в класі функцій, які зростають не швидше, ніж $e^{\alpha|x|}$ при $|x| \to \infty$, де число α залежить від коефіцієнтів рівняння.

Якщо фізичний процес, який описується вищезгаданими математичними моделями, розпочався давно і початкові умови перестають впливати на хід процесу, то природно виникає задача без початкових умов. Вивченню саме таких задач в обмежених областях присвячені праці [10-12], у необмежених – [13].

У запропонованій праці розглянуто систему псевдопараболічних варіаційних нерівностей без початкових умов у необмеженій (за просторовими змінними) області. Визначено умови існування та єдиності розв'язку зазначеної задачі.

Нехай Ω – необмежена область в R^n з межею Γ; існує $\{\Omega_\tau\}$ – сім'я обмежених підобластей області Ω, які залежать від параметра $\tau \in \Pi$ (тут Π – зліченна підмножина множини додатних дійсних чисел), і мають такі властивості:

1) $\Omega = \bigcup\limits_{\tau\in\Pi} \Omega_\tau$;

2) $\tau \leqslant \tau' \Rightarrow \Omega_\tau \subset \Omega_{\tau'}$;

3) $\partial\Omega_\tau = \Gamma^1_\tau \cup \Gamma^2_\tau$, де $\Gamma^1_\tau, \Gamma^2_\tau$ – кусково-гладкі гіперповерхні; $\mathrm{mes}\{\Gamma^1_\tau \cap \Gamma^2_\tau\} = 0$, $\Gamma^1_\tau \neq \oslash$, $\Gamma^1_\tau \cap \Gamma \neq \oslash$, $\forall\tau \in \Pi$;

4) $\Gamma = \bigcup\limits_{\tau\in\Pi} \Gamma^1_\tau$.

Нехай $Q_T = \Omega \times (-\infty, T]$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $\Omega_\tau = \Omega \times \{t = \tau\}$, $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T$. В області Q_T розглянемо систему псевдопараболічних варіаційних нерівностей

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[(v_t - f(x,t), v_t + v - u_t - u) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha v_t + B_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha v, D^\beta \times$$

$$\times (v_t + v - u_t - u)) - \sum_{|\alpha|=1} (C_\alpha(x,t) D^\alpha u, v_t + v - u_t - u) + (C(x,t)v, v_t + v - u_t -$$

$$- u) - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha}(v_t - u_t), D^{\beta}(v_t - u_t)\right) - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \Big((B_{\alpha\beta}(x,t) -$$

$$- \frac{1}{2} B_{\alpha\beta t}(x,t) - \frac{\mu}{2}\left(A_{\alpha\beta}(x) + B_{\alpha\beta}(x,t)\right)\Big) D^{\alpha}(v-u), D^{\beta}(v-u)\Big) - |v_t - u_t|^2 -$$

$$- \left(\left(C(x,t) - \frac{1}{2}C_t(x,t) - \frac{\mu}{2}\left(C(x,t) + I\right)\right)(v-u), v-u\right) - \tag{1}$$

$$- \lambda \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u_t + B_{\alpha\beta}(x,t) D^{\alpha} u, v_t + v - u_t - u\right) \frac{x^{\beta}}{|x|}\Bigg] e^{-\lambda|x| + \mu t} dx dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_2}} G(v-u) e^{-\lambda|x| + \mu t_2} dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_1}} G(v-u) e^{-\lambda|x| + \mu t_1} dx,$$

де $G(v) = ((C(x,t)+I)v, v) + \sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(\left(A_{\alpha\beta}(x) + B_{\alpha\beta}(x,t)\right) D^{\alpha} v, D^{\beta} v\right)$. Тут I, $A_{\alpha\beta}(x)$, $B_{\alpha\beta}(x,t)$, $C_{\alpha}(x,t)$, $C(x,t)$ – квадратні матриці розміру $m \times m$ і, крім того, I – одинична; $u = (u_1, ..., u_m)^T$, $v = (v_1, ..., v_m)^T$, $f(x,t) = (f_1(x,t), ..., f_m(x,t))^T$; $D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$; $x^{\beta} = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$; $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток в R^m; $|\cdot|$ – модуль в R^m, а якщо йтиметься про просторову змінну x, то через $|\cdot|$ будемо також позначати і модуль в R^n; $\{\lambda, \mu\} \subset R_+$.

Введемо необхідні для подальшого дослідження простори. Через $\overset{\circ}{H}{}^1_{\lambda}(\Omega)$ позначимо замикання простору $C_0^{\infty}(\Omega)$ за нормою

$$\|w\|_{\lambda} = \left(\int\limits_{\Omega} \left[|w|^2 + \sum_{|\alpha|=1} |D^{\alpha} w|^2\right] e^{-\lambda|x|} dx\right)^{\frac{1}{2}};$$

$H^1_{\lambda}(\Omega)$ – простір Соболєва з вагою $e^{-\lambda|x|}$. У випадку $\lambda = 0$ індекс λ опускатимемо і писатимемо $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ та $H^1(\Omega)$.

Через $L^r_{\mu}((t_1,t_2); X)$, $1 < r < \infty$, будемо позначати простір функцій $w : (t_1, t_2) \to X$, для яких

$$\|w\|_{\mu} = \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} \|w(t)\|_X^r e^{\mu t} dt\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

де X – банахів простір [4]; $L^r_{\mu,\mathrm{loc}}((-\infty, T]; X)$ - простір функцій, які належать до $L^r_{\mu}((t_1,t_2); X)$ для довільного інтервалу $(t_1, t_2) \subset (-\infty, T]$. Аналогічно можна ввести і простори $H^1_{\mu}((t_1,t_2); X)$ та $H^1_{\mu,\mathrm{loc}}((-\infty, T]; X)$.

Нехай простір V такий, що $\overset{\circ}{H}{}^1_{\lambda}(\Omega) \subset V \subset H^1_{\lambda}(\Omega)$; V^* – простір, спряжений до V;

$$W = \left\{w : w \in L^2_{\mathrm{loc}}\left((-\infty, T]; L^2_{\lambda}(\Omega)\right); w_t \in L^2_{\mathrm{loc}}\left((-\infty, T]; L^2_{\lambda}(\Omega)\right)\right\}.$$

Означення. *Розв'язком задачі (1) називатимемо функцію u, яка має такі властивості:*

1) $u \in H^1_{\mu,\mathrm{loc}}((-\infty, T]; V)$;

2) *функція* u *задовольняє нерівність (1) для майже всіх* $(t_1, t_2) \subset (-\infty, T]$ *і для довільної функції* v *такої, що* $\{v, D^\alpha v \mid |\alpha| = 1\} \subset W$, $\{v, v_t\} \subset V$ *для майже всіх* $t \in (-\infty, T]$.

Для спрощення подальших записів введемо ще кілька позначень:

$$\hat{A} = \max_{|\alpha|=|\beta|=1} \sup_{Q_T} \|A_{\alpha\beta}(x)\|^2; \quad \hat{B} = \max_{|\alpha|=|\beta|=1} \sup_{Q_T} \|B_{\alpha\beta}(x,t)\|^2;$$
$$\hat{C} = \max_{|\alpha|=1} \sup_{Q_T} \|C_\alpha(x,t)\|^2.$$

Говоритимемо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови (A_0), (B_0), (B_1), (C_0), (C_1), (C_2), якщо

$$(A_0): a_0 \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^2 \leqslant \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (A_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha, \xi_\beta) \leqslant a^0 \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^2, \quad \forall x \in \Omega;$$
$$A_{\alpha\beta}(x) = A_{\beta\alpha}(x), \; A_{\alpha\beta}(x) = A^*_{\alpha\beta}(x), \; \forall x \in \Omega; \; A_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega); \; a_0 > 0;$$
$$(B_0): b_0 \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^2 \leqslant \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (B_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha, \xi_\beta) \leqslant b^0 \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^2, \quad \forall (x,t) \in Q_T;$$
$$B_{\alpha\beta}(x,t) = B_{\beta\alpha}(x,t), \; B_{\alpha\beta}(x,t) = B^*_{\alpha\beta}(x,t), \; \forall (x,t) \in Q_T;$$
$$B_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega); \; b_0 > 0;$$
$$(B_1): \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (B_{\alpha\beta t}(x,t)\xi_\alpha, \xi_\beta) \leqslant b^1 \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^2, \quad \forall (x,t) \in Q_T;$$
$$(C_0): c_0|\xi|^2 \leqslant (C(x,t)\xi, \xi) \leqslant c^0|\xi|^2, \quad \forall (x,t) \in Q_T; \quad C \in L^\infty(\Omega); \; c_0 > 0;$$
$$(C_1): (C_t(x,t)\xi, \xi) \leqslant c^1|\xi|^2, \quad \forall (x,t) \in Q_T;$$
$$(C_2): C_\alpha \in L^\infty(\Omega)$$

для довільних векторів ξ, ξ_α, ξ_β з R^m, $|\alpha| = |\beta| = 1$.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови* (A_0), (B_0), (B_1), (C_0), (C_1), (C_2) *та існують такі додатні числа* λ *і* μ, *що справджуються нерівності*

$$\left(2b_0 - b^1 - 2\left(a^0 + b^0\right)\mu\right) > 0;$$
$$\left(2b_0 - b^1 - 2\left(a^0 + b^0\right)\mu\right)\left(2c_0 - c^1 - 2\left(c^0 + 1\right)\mu\right) > 2\hat{C}n;$$
$$0 < \lambda < \frac{1}{4n}\left(-1 - \frac{2\hat{C}}{\hat{B}} + \left[\left(\frac{2\hat{C}}{\hat{B}} - 1\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{4}{\hat{B}n}\left(2b_0 - b^1 - 2\left(a^0 + b^0\right)\mu\right)\left(2c_0 - c^1 - 2\left(c^0 + 1\right)\mu\right)\right]^{1/2}\right).$$

Тоді система (1) не може мати більше одного розв'язку, що задовольняє умову

$$\lim_{t \to -\infty} \left(e^{\mu t}\|u(t, \cdot)\|_{H^1_\lambda(\Omega)}\right) = 0. \qquad (2)$$

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки u_1 та u_2 задачі (1). Оскільки $\{u_i, D^\alpha u_i \mid |\alpha| = 1, i = 1, 2\} \subset W$, то згідно з теоремою 1.17 [4] $\{u_i, D^\alpha u_i \mid |\alpha| =$

$1, i = 1,2\} \subset C\left((-\infty, T]\,; L^2_\lambda(\Omega)\right)$ та існують інтеграли

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (u_i, u_{it}) e^{-\lambda|x|+\mu t} dxdt, \qquad \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (D^\alpha u_i, D^\beta u_{it}) e^{-\lambda|x|+\mu t} dxdt, \quad i = 1,2.$$

Для функцій $\{u_i, D^\alpha u_i \,|\, |\alpha| = 1, i = 1,2\} \subset L^2_{\mu,\mathrm{loc}}\left((-\infty,T]\,;V\right) \bigcap C\left((-\infty,T]\,; L^2_\lambda(\Omega)\right)$, що задовольняють (1), правильними є такі оцінки (при $f = f_1, f = f_2, u = u_1 - u_2, v = (u_1+u_2)/2$):

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (f_1 - f_2, u_t + u)\, e^{-\lambda|x|+\mu t} dxdt \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_2}} G(u) e^{-\lambda|x|+\mu t_2} dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_1}} G(u) \times$$

$$\times\, e^{-\lambda|x|+\mu t_1} dx + \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[\left(1 - \frac{n\varepsilon}{2} - \lambda n^2 \varepsilon\right) |u_t|^2 + \left(a_0 - \frac{\lambda n \hat{A}}{\varepsilon}\right) \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_t|^2 + \right.$$

$$+ \frac{2b_0 - b^1 - \mu(a^0 + b^0) - \frac{2\lambda n \hat{B}}{\varepsilon} - \frac{2\hat{C}}{\varepsilon}}{2(a^0 + b^0)} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left((A_{\alpha\beta}(x) + B_{\alpha\beta}(x,t)) D^\alpha u, D^\beta u \right) +$$

$$\left. + \frac{2c_0 - c^1 - \mu(1 + c^0) - n\varepsilon - 2\lambda n^2 \varepsilon}{2(1 + c^0)} \left((I + C(x,t))u, u \right) \right] e^{-\lambda|x|+\mu t} dxdt.$$

Позначимо

$$y(t) = \int\limits_{\Omega} G(u) e^{-\lambda|x|+\mu t} dx. \tag{3}$$

Враховуючи умови теореми та останню нерівність і використовуючи (3), отримуємо, що для довільних чисел t_1 та t_2, де $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T$,

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) dt + \mu \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t) dt \leqslant 0. \tag{4}$$

З (4) випливає, що для майже всіх $t \in (-\infty, T]$ справджується нерівність $y'(t) + \mu y(t) \leqslant 0$. Домножимо її на $e^{\mu t}$, зінтегруємо в межах від t_1 до t_2 і одержимо, що

$$y(t_2) e^{\mu t_2} \leqslant y(t_1) e^{\mu t_1}. \tag{5}$$

Перейдемо в нерівності (5) до границі при $t_1 \to -\infty$ і використаємо умову теореми. Одержимо, що для довільного $t_2 \in (-\infty, T]$ правильною є оцінка $y(t_2) e^{\mu t_2} \leqslant 0$, тобто

$$\int\limits_{\Omega_{t_2}} \left[((I + C(x,t))(u_1 - u_2), u_1 - u_2) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} ((A_{\alpha\beta}(x) + \right.$$

$$\left. +\; B_{\alpha\beta}(x,t))\, D^\alpha (u_1 - u_2), D^\alpha (u_1 - u_2)) \right] e^{-\lambda|x|} dx \leqslant 0$$

для всіх $t_2 \in (-\infty, T]$. А звідси випливає, що $u_2 = u_1$ майже скрізь в Q_T. Теорему доведено.

Для визначення умов існування розв'язку задачі (1) буде використано метод штрафу. Відомо [14], що оператор штрафу B задається формулою

$$B(u) = J(u),$$

де J – оператор двоїстості між просторами V і V^*; а також, що B є монотонним, обмеженим та ліпшиць-неперервним. У даному випадку оператор двоїстості, отже, і оператор штрафу є лінійним.

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються всі умови теореми 1 і, крім того,*

$$0 < \lambda < -\frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} \min \left\{ \left[1 + \frac{4}{\hat{A}n} (2-\mu)(2a_0 - \mu) \right]^{1/2}, -\frac{2\hat{C}}{\hat{B}} + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{2\hat{C}}{\hat{B}} - 1 \right)^2 + \frac{4}{\hat{B}n} \left(2b_0 - b^1 - 2\left(a^0 + b^0\right)\mu \right) \left(2c_0 - c^1 - 2\left(c^0 + 1\right)\mu \right) \right]^{1/2} \right\};$$

$f \in L^2_\mu\left((-\infty, T]; L^2_\lambda(\Omega)\right)$. *Тоді існує розв'язок задачі (1), який задовольняє умову (2).*

Доведення. Розглянемо допоміжну задачу: потрібно довести існування розв'язку задачі Фур'є для системи

$$u_t - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D^\beta \left(A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_t\right) - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D^\beta \left(B_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u\right) - \sum_{|\alpha|=1} C_\alpha(x,t) D^\alpha u +$$
$$+ C(x,t)u + \gamma B(u + u_t) = f(x,t) \tag{6}$$

в області Q_T, де B – оператор штрафу, $\gamma > 0$. Для цього в області $Q^*_{t_0,T} = \Omega^* \times [t_0, T]$, де $\Omega^* \subset \{\Omega_\tau\}_{\tau \in \Pi}$ дослідимо систему

$$u_t - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D^\beta \left(A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_t\right) - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D^\beta \left(B_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u\right) - \sum_{|\alpha|=1} C_\alpha(x,t) D^\alpha u +$$
$$+ C(x,t)u + \gamma B(u + u_t) = f^*_{t_0}(x,t) \tag{7}$$

з такими початковими та крайовими умовами:

$$u|_{t=t_0} = 0, \tag{8}$$

$$u|_{\partial\Omega^* \times [t_0,T]} = 0. \tag{9}$$

Тут

$$f^*_{t_0}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q^*_{t_0,T}; \\ 0, & (x,t) \in Q_T \setminus Q^*_{t_0,T}. \end{cases}$$

Розв'язок задачі (7)-(9) шукатимемо методом Гальоркіна. Нехай $\{\hat{\varphi}^{*,k}\}$ – фундаментальна система функцій, визначених на Ω. Ортогоналізуємо її стосовно скалярного добутку

$$(v, w)_A = \int_{\Omega^*} \left[(v, w) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha v, D^\beta w\right) \right] dx$$

і позначимо через $\{\varphi^{*,k}\}$ отриману систему. Приймемо, що

$$u^{*,N}(x,t) := \sum_{s=1}^{N} c_k^N(t)\varphi^{*,k}(x), \qquad x \in \Omega^*, \quad t \in (t_0, T),$$

де $c_k^N(t)$, $k = 1, ..., N$ визначають із системи рівнянь

$$\sum_{k=1}^{N} \left(c_k^N(t)\right)' \left[\int_{\Omega^*} \left[\left(\varphi^{*,k}(x), \varphi^{*,s}(x)\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha \varphi^{*,k}(x), D^\beta \varphi^{*,s}(x)\right)\right] dx + \right.$$
$$\left. + \gamma\langle B(\varphi^{*,k}(x)), \varphi^{*,s}(x)\rangle\right] = -\sum_{k=1}^{N} c_k^N(t) \left[\int_{\Omega^*} - \sum_{|\alpha|=1} \left(C_\alpha(x,t) D^\alpha \varphi^{*,k}(x), \varphi^{*,s}(x)\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(B_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha \varphi^{*,k}(x), D^\beta \varphi^{*,s}(x)\right) + \left(C(x,t)\varphi^{*,k}(x), \varphi^{*,s}(x)\right)\right] dx + \tag{10}$$
$$+ \gamma \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t) \langle B(\varphi^{*,k}(x)), \varphi^{*,s}(x)\rangle + \int_{\Omega^*} \left(f_{t_0}^*(x,t), \varphi^{*,s}(x)\right) dx, \qquad s = 1, ..., N$$

та умов

$$c_s^N(t_0) = 0, \qquad s = 1, ..., N. \tag{11}$$

Домножимо кожне з рівнянь системи (10) на $\left(c_s^N(t)\right)' + c_s^N(t)$ відповідно, підсумуємо ці рівняння та зінтегруємо відрізком $[\tau, T]$, $\tau > t_0$. Отримаємо

$$\int_{Q_{\tau,T}^*} \left[\left(u_t^{*,N}, u_t^{*,N} + u^{*,N}\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_t^{*,N} + B_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u^{*,N}, D^\beta \times \right.\right.$$
$$\left.\left(u_t^{*,N} + u^{*,N}\right)\right) - \sum_{|\alpha|=1} \left(C_\alpha(x,t) D^\alpha u^{*,N}, u_t^{*,N} + u^{*,N}\right) + \tag{12}$$
$$\left. + \left(C(x,t)u^{*,N}, u_t^{*,N} + u^{*,N}\right)\right] dxdt + \gamma \int_\tau^T \langle B(u_t^{*,N} + u^{*,N}), u_t^{*,N} + u^{*,N}\rangle dt =$$
$$= \int_{Q_{\tau,T}^*} \left(f_{t_0}^*(x,t), u_t^{*,N} + u^{*,N}\right) dxdt.$$

З оцінок

$$I_1 = \int_{Q_{\tau,T}^*} \left[\left(u_t^{*,N}, u_t^{*,N} + u^{*,N}\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_t^{*,N} + B_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u^{*,N},\right.\right.$$
$$\left.\left. D^\beta \left(u_t^{*,N} + u^{*,N}\right)\right) + \left(C(x,t)u^{*,N}, u_t^{*,N} + u^{*,N}\right)\right] dxdt \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau^*} G(u^{*,N}) dx + \int_{Q_{\tau,T}^*} \left[\left|u_t^{*,N}\right|^2 + \left(\left(C(x,t) - \frac{1}{2}C_t(x,t)\right) u^{*,N}, u^{*,N}\right) + \right.$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_t^{*,N}, D^\beta u_t^{*,N}\right)+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}((B_{\alpha\beta}(x,t)-$$

$$-\frac{1}{2}B_{\alpha\beta t}(x,t)\Big) D^\alpha u^{*,N}, D^\beta u^{*,N}\Big)\Big]\,dxdt,$$

$$I_2=\int\limits_{Q^*_{\tau,T}}\sum_{|\alpha|=1}\left(C_\alpha(x,t)D^\alpha u^{*,N}, u_t^{*,N}+u^{*,N}\right)dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{Q^*_{\tau,T}}\left[\frac{\hat{C}}{\varepsilon}\sum_{|\alpha|=1}\left|D^\alpha u^{*,N}\right|^2+\frac{\varepsilon n}{2}\left|u^{*,N}\right|^2+\frac{\varepsilon n}{2}\left|u_t^{*,N}\right|^2\right]dxdt,$$

$$I_3=\int\limits_\tau^T\langle B(u_t^{*,N}+u^{*,N}), u_t^{*,N}+u^{*,N}\rangle dt\geqslant 0,$$

$$I_4=\int\limits_{Q^*_{\tau,T}}\left(f^*_{t_0}(x,t), u_t^{*,N}+u^{*,N}\right)dxdt\leqslant\int\limits_{Q^*_{\tau,T}}\left[\frac{1}{\delta}\left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2+\frac{\delta}{2}\left|u_t^{*,N}\right|^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta}{2}\left|u^{*,N}\right|^2\right]dxdt$$

та з рівності (12) знаходимо

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^*_\tau}G(u^{*,N})dx+\int\limits_{Q^*_{\tau,T}}\left[\left(1-\frac{\varepsilon n}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\left|u_t^{*,N}\right|^2+\right.$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_t^{*,N}, D^\beta u_t^{*,N}\right)-\frac{\hat{C}}{\varepsilon}\sum_{|\alpha|=1}\left|D^\alpha u^{*,N}\right|^2+ \tag{13}$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(\left(B_{\alpha\beta}(x,t)-\frac{1}{2}B_{\alpha\beta t}(x,t)\right)D^\alpha u^{*,N}, D^\beta u^{*,N}\right)+$$

$$\left.+\left(\left(C(x,t)-\frac{1}{2}C_t(x,t)-I\left(\frac{\varepsilon n}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\right)u^{*,N}, u^{*,N}\right)\right]dxdt\leqslant\int\limits_{Q^*_{\tau,T}}\left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2dxdt.$$

Зауважимо, що для числа μ, яке задовольняє умови теореми, можна підібрати таке $\varepsilon>0$, що справджуватиметься нерівність

$$0<\mu<\min\left\{\frac{2c_0-c^1-\varepsilon n-\delta}{1+c^0}, \frac{2b_0-b^1-\frac{2\hat{C}}{\varepsilon}}{a^0+b^0}, 2-\varepsilon n-\delta, 2a_0\right\}. \tag{14}$$

Після заміни

$$y(\tau)=\int\limits_{Q^*_{\tau,T}}\left[G(u^{*,N})+|u_t^{*,N}|^2+\sum_{|\alpha|=1}\left|D^\alpha u_t^{*,N}\right|^2\right]dxdt$$

одержимо

$$y'(\tau) + \mu y(\tau) \leqslant \frac{2}{\delta} \int\limits_{Q^*_{\tau,T}} \left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2 dxdt$$

або

$$\frac{d}{d\tau}\left(y(\tau)e^{\mu\tau}\right) \leqslant \frac{d}{d\tau}\left(\frac{2}{\delta}\int\limits_{t_1}^{\tau} e^{\mu\theta} \int\limits_{Q^*_{\theta,T}} \left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2 dxdtd\theta\right). \tag{15}$$

Зінтегруємо останню нерівність відрізком $[t_1,t_2] \subset [t_0,T]$. Одержимо

$$y(t_2) \leqslant y(t_1)e^{\mu(t_1-t_2)} + \frac{2}{\delta}\int\limits_{t_1}^{t_2} e^{\mu(\theta-t_2)} \int\limits_{Q^*_{\theta,T}} \left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2 dxdtd\theta$$

і ще раз використаємо оцінку (13). Після цих перетворень (15) набуде вигляду

$$\int\limits_{Q^*_{t_2,T}} \left[G(u^{*,N}) + |u^{*,N}_t|^2 + \sum_{|\alpha|=1}\left|D^\alpha u^{*,N}_t\right|^2\right] dxdt \leqslant e^{\mu(t_1-t_2)} \int\limits_{Q^*_{t_1,T}} \Bigg[G(u^{*,N}) +$$

$$+ |u^{*,N}_t|^2 + \sum_{|\alpha|=1}\left|D^\alpha u^{*,N}_t\right|^2\Bigg] dxdt + \frac{2}{\delta}\int\limits_{t_1}^{t_2} e^{\mu(\theta-t_2)} \int\limits_{Q^*_{\theta,T}} \left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2 dxdtd\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{\mu(t_1-t_2)}}{\mu}\Bigg(\int\limits_{\Omega^*_{t_1}} \left[G(u^{*,N})) + |u^{*,N}_t|^2 + \sum_{|\alpha|=1}\left|D^\alpha u^{*,N}_t\right|^2\right] dx +$$

$$+ \frac{2}{\delta}\int\limits_{Q^*_{t_1,T}} \left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2 dxdt\Bigg) + \frac{2}{\delta}\int\limits_{t_1}^{t_2} e^{\mu(\theta-t_2)} \int\limits_{Q^*_{\theta,T}} \left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2 dxdtd\theta.$$

Отже, одержано оцінку

$$\|u^{*,N}\|_{H^1((t_0,T);H^1(\Omega^*))} \leqslant M^*, \tag{16}$$

де стала M^* залежить лише від $f^*_{t_0}$ та вибраного δ. Отже, з $\{u^{*,N}\}$ в області $Q^*_{t_0,T}$ можна вибрати підпослідовність $\{u^{*,N_k}\}$ таку, що $u^{*,N_k} \to u^*$ слабко в $H^1\left((t_0,T);H^1(\Omega^*)\right)$. Продовжимо u^* нулем на $Q_T \setminus Q^*_{t_0,T}$. Тоді для довільної функції $w \in H^1_{\mu,\mathrm{loc}}\left((-\infty,T]\,;H^1_\lambda(\Omega)\right)$ на довільному інтервалі $(t_1,t_2) \subset (-\infty,T]$ справджується рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[(u^*_t,w) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u^*_t + B_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^*, D^\beta w\right) + (C(x,t)u^*,w) -$$

$$- \sum_{|\alpha|=1}\left(C_\alpha(x,t)D^\alpha u^*,w\right)\Bigg] dxdt + \gamma\int\limits_{t_1}^{t_2}\langle B(u^*+u^*_t),w\rangle dt = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left(f^*_{t_0}(x,t),w\right) dxdt. \tag{17}$$

Приймемо в (17) $w = (u_t^* + u^*)e^{-\lambda|x|+\mu t}$, $t_1 = \tau$, перегрупуємо доданки та зінтегруємо частинами. Отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} G(u^*)e^{-\lambda|x|+\mu t_2}dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} G(u^*)e^{-\lambda|x|+\mu\tau}dx+$$
$$+\int\limits_{Q_{\tau,t_2}}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_t^*, D^\beta D^\beta u_t^*) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\Big(\Big(B_{\alpha\beta}(x,t) - \frac{1}{2}B_{\alpha\beta t}(x,t)-$$
$$-\frac{\mu}{2}\left(A_{\alpha\beta}(x) + B_{\alpha\beta}(x,t)\right)\Big)D^\alpha u^*, D^\beta u^*\Big) - \sum_{|\alpha|=1}(C_\alpha(x,t)D^\alpha u^*, u_t^* + u^*)+ \tag{18}$$
$$+\left(\left(C(x,t) - \frac{1}{2}C_t(x,t) - \frac{1}{2}(I + C(x,t))\right)u^*, u^*\right) + |u_t^*|^2 -$$
$$-\lambda\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_t^* + B_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^*, u_t^* + u^*)\frac{x^\beta}{|x|}\Bigg]e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt =$$
$$= \int\limits_{Q_{\tau,t_2}}\left(f_{t_0}^*(x,t), u_t^* + u^*\right)e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt.$$

Після нескладних перетворень із рівності (18) можна одержати таку оцінку:

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} G(u^*)e^{-\lambda|x|+\mu\tau}dx + \int\limits_{Q_{\tau,t_2}}\Bigg[|u_t^*|^2\left(1 - \frac{\delta}{2} - \frac{\varepsilon n}{2} - \varepsilon n^2\lambda\right)+$$
$$+\frac{2b_0 - b^1 - \mu(a^0 + b^0) - \frac{2\lambda\hat{B}n}{\varepsilon} - \frac{2\hat{C}}{\varepsilon}}{2(a^0 + b^0)}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(\left(A_{\alpha\beta}(x) + B_{\alpha\beta}(x,t)\right)D^\alpha u^*, D^\beta u^*\right)+$$
$$+\frac{2c_0 - c^1 - \mu(1 + c^0) - \delta - \varepsilon n - 2\varepsilon n^2\lambda}{2(1 + c^0)}\left((I + C(x,t))u^*, u^*\right)+ \tag{19}$$
$$+\left(a_0 - \frac{\lambda\hat{A}n}{\varepsilon}\right)\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u_t^*|^2\Bigg]e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt \leqslant \frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_{\tau,t_2}}\left|f_{t_0}^*(x,t)\right|^2e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt.$$

Враховуючи умови теореми, з (19) отримуємо нерівність

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[G(u^*) + |u_t^*|^2 + \sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u_t^*|^2\right]e^{-\lambda|x|+\mu\tau}dx+$$
$$+\frac{\mu}{2}\int\limits_{Q_{\tau,t_2}}\left[G(u^*) + |u_t^*|^2 + \sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u_t^*|^2\right]e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt \leqslant \tag{20}$$
$$\leqslant \frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_{\tau,t_2}}\left|f_{t_0}^*(x,t)\right|^2e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt \leqslant \frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_{\tau,t_2}}|f(x,t)|^2e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt.$$

З останньої нерівності аналогічними до вищенаведених міркуваннями приходимо до оцінки

$$\|u^*\|_{H^1_\mu\left((-\infty,T];H^1_\lambda(\Omega)\right)} \leqslant M, \tag{21}$$

де стала M залежить лише від функції f та вибраного δ.

Не обмежуючи загальності, приймемо, що $\Pi = N$, $\Omega_k = \{x \in \Omega : |x| < k\}$. Тоді для довільного $k \in N$ задача (7)-(9) має слабкий розв'язок u^k в області $Q^k = \Omega_k \times [T-k,T]$. Продовжимо цей розв'язок нулем на $Q_T \setminus Q^k$. Оскільки $\Omega^* \subset \{\Omega_k\}$, то для кожного u^k, $k \in N$ правильна оцінка (21) і тому в Q^1 з послідовності $\{u^k\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{u^{k,1}\}$, що $u^{k,1} \to u_1$ слабко в $H^1_\mu\left([T-1,T];H^1_\lambda(\Omega_1)\right)$.

В Q^2 з $\{u^{k,1}\}$ вибираємо підпослідовність $\{u^{k,2}\}$, яка теж слабко збігається до деякого u_2 в $H^1_\mu\left([T-2,T];H^1_\lambda(\Omega_2)\right)$ і т.д. При такому виборі очевидним є те, що u_s є продовженням u_k на Q^s при $s > k$ і $u_k = u_s$ в Q^k.

Тепер виберемо діагональну підпослідовність $\{u^{k,k}\}$ і визначимо функцію u так: $u(x,t) = u_k(x,t)$, якщо $(x,t) \in Q^k$.

З вищенаведених міркувань та з вибору $\{u^{k,k}\}$ і u легко бачити, що $u^{k,k} \to u$ слабко в $H^1_\mu\left((-\infty,T];H^1_\lambda(\Omega)\right)$. Також очевидно, що знайдена функція u і буде розв'язком задачі Фур'є для системи рівнянь (6) в Q_T, тобто для будь-яких проміжків $(t_1,t_2) \in (-\infty,T]$ та довільної функції $w \in H^1_\mu\left((-\infty,T];H^1_\lambda(\Omega)\right)$ виконується

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[(u_t,w) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_t + B_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u, D^\beta w) + (C(x,t)u,w) -$$

$$- \sum_{|\alpha|=1} (C_\alpha(x,t)D^\alpha u, w)\Bigg]\, dxdt + \gamma\int\limits_{t_1}^{t_2} \langle B(u+u_t), w\rangle dt = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (f(x,t),w)\, dxdt. \tag{22}$$

Оскільки мета цієї праці – дослідити умови існування розв'язку системи варіаційних нерівностей, то перейдемо від задачі Фур'є для системи (6) до задачі (1) так: приймемо в (22) $w = (v_t + v - u_t - u)e^{-\lambda|x|+\mu t}$. Після звичайного інтегрування частинами та перегрупування доданків отримуємо

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[(v_t - f(x,t), v_t + v - u_t - u) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha v_t + B_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha v,$$

$$D^\beta(v_t + v - u_t - u)) - \sum_{|\alpha|=1} (C_\alpha(x,t)D^\alpha u, v_t + v - u_t - u) - |v_t - u_t|^2 +$$

$$+ (C(x,t)v, v_t + v - u_t - u) - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha(v_t - u_t), D^\beta(v_t - u_t)\right) -$$

$$- \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(\left(B_{\alpha\beta}(x,t) - \frac{1}{2}B_{\alpha\beta t}(x,t) - \frac{\mu}{2}\left(A_{\alpha\beta}(x) + B_{\alpha\beta}(x,t)\right)\right) D^\alpha(v-u),\right.$$

$$\left. D^\beta(v-u)\right) - \left(\left(C(x,t) - \frac{1}{2}C_t(x,t) - \frac{\mu}{2}\left(C(x,t)+I\right)\right)(v-u), v-u\right) - \tag{23}$$

$$- \lambda \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_t + B_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u, v_t + v - u_t - u\right) \frac{x^\beta}{|x|} \Bigg] e^{-\lambda|x|+\mu t} dx dt +$$

$$+ \gamma \int_{t_1}^{t_2} \langle B(u_t + u), (v_t + v - u_t - u)e^{-\lambda|x|+\mu t} \rangle dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\Omega_{t_2}} G(v-u)e^{-\lambda|x|+\mu t_2} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{t_1}} G(v-u)e^{-\lambda|x|+\mu t_1} dx = 0.$$

З властивостей оператора штрафу B у цьому випадку випливає, що

$$\gamma \int_{t_1}^{t_2} \langle B(u_t + u) - B(v_t + v), (v_t + v - u_t - u)e^{-\lambda|x|+\mu t} \rangle dt \leqslant 0,$$

тобто для кожного конкретного γ існує розв'язок u^γ нерівності (1).

Оскільки для $\{u^\gamma\}$ правильна оцінка (21), то на підставі леми Фату одержимо, що для всіх $(T_1, T_1) \subset (-\infty, T]$

$$\int_{T_1}^{T_2} \liminf_{\gamma \to 0} \|u^\gamma(x,t)\|_V^2 \, dt \leqslant M_1,$$

тому для майже всіх $t \in [T_1, T_2]$

$$\liminf_{\gamma \to 0} \|u^\gamma(x,t)\|_V^2 < \infty.$$

Тоді існує $\tilde{T} \in [T_1, T_2]$ таке, що $\liminf\limits_{\gamma \to 0} \left\| u^\gamma(x, \tilde{T}) \right\|_V^2 < M_2$. Не обмежуючи загальності, вважатимемо $\tilde{T} = T_1$. Нехай тоді $\{u^{\gamma_m}\}$ – послідовність, для якої

$$\liminf_{\gamma \to 0} \|u^\gamma(x,T_1)\|_V^2 = \liminf_{m \to \infty} \|u^{\gamma_m}(x,T_1)\|_V^2 .$$

Тоді $\|u^{\gamma_m}(x,T_1)\|_V^2 \leqslant M_3$ для всіх $m \in N$. Зауважимо, що оцінка (21) не залежить від γ_m. Тому існує функція u, яка є слабкою границею $\{u^{\gamma_m}\}$ в просторі $H_\mu^1\left((-\infty, T]; H_\lambda^1(\Omega)\right)$ при $m \to \infty$.

Запишемо нерівність (1) для u^{γ_m}:

$$\int_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[\left(v_t - f(x,t), v_t + v - u_t^{\gamma_m} - u^{\gamma_m}\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha v_t + B_{\alpha\beta}(x,t) \times\right.$$

$$\left. \times \ D^\alpha v, D^\beta\left(v_t + v - u_t^{\gamma_m} - u^{\gamma_m}\right)\right) - \sum_{|\alpha|=1} \left(C_\alpha(x,t)D^\alpha u^{\gamma_m}, v_t + v - u_t^{\gamma_m} - u^{\gamma_m}\right) +$$

$$+ \left(C(x,t)v, v_t + v - u_t^{\gamma_m} - u^{\gamma_m}\right) - |v_t - u_t^{\gamma_m}|^2 - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha (v_t - \right.$$

$$\left. - \ u_t^{\gamma_m}), D^\beta\left(v_t - u_t^{\gamma_m}\right)\right) - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \Bigg(\Bigg(B_{\alpha\beta}(x,t) - \frac{1}{2}B_{\alpha\beta t}(x,t) - \qquad (24)$$

$$-\frac{\mu}{2}\left(A_{\alpha\beta}(x)+B_{\alpha\beta}(x,t)\right)\Big) D^{\alpha}(v-u^{\gamma_m}), D^{\beta}(v-u^{\gamma_m})\Big) -$$
$$-\left(\left(C(x,t)-\frac{\mu}{2}\left(C(x,t)+I\right)-\frac{1}{2}C_t(x,t)\right)(v-u^{\gamma_m}), v-u^{\gamma_m}\right)-$$
$$-\lambda\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_t^{\gamma_m}+B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^{\gamma_m}, v_t+v-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m}\right)\frac{x^{\beta}}{|x|}\Bigg]\times$$
$$\times e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} G(v-u^{\gamma_m})e^{-\lambda|x|+\mu t_2}dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} G(v-u^{\gamma_m})e^{-\lambda|x|+\mu t_1}dx.$$

У нерівності (24) перейдемо до границі при $t_1\to-\infty$, приймемо $t_2=T$, $v=u$ і перепишемо її так:

$$\int\limits_{Q_T}\Bigg[(u_t-f(x,t), u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m})+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_t+B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u,$$
$$D^{\beta}\left(u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m}\right))+(C(x,t)u, u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m})-$$
$$-\sum_{|\alpha|=1}\left(C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}\left(u^{\gamma_m}-u\right), u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m}\right)-\sum_{|\alpha|=1}(C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u, u_t+u-$$
$$-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m})-\left|u_t^{\gamma_m}-u_t\right|^2-\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}\left(u_t^{\gamma_m}-u_t\right), D^{\beta}\left(u_t^{\gamma_m}-u_t\right)\right)-$$
$$-\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(\left(B_{\alpha\beta}(x,t)-\frac{1}{2}B_{\alpha\beta t}(x,t)-\frac{\mu}{2}\left(A_{\alpha\beta}(x)+B_{\alpha\beta}(x,t)\right)\right)D^{\alpha}\left(u^{\gamma_m}-u\right),\right.$$
$$\left.D^{\beta}\left(u^{\gamma_m}-u\right)\right)-\left(\left(C(x,t)-\frac{1}{2}C_t(x,t)-\frac{\mu}{2}\left(I+C(x,t)\right)\right)\left(u^{\gamma_m}-u\right), u^{\gamma_m}-u\right)-$$
$$-\lambda\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}\left(u_t^{\gamma_m}-u_t\right)+B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}\left(u^{\gamma_m}-u\right), u_t+u-u_t^{\gamma_m}-$$
$$-u^{\gamma_m})\frac{x^{\beta}}{|x|}-\lambda\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_t+B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u, u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m})\frac{x^{\beta}}{|x|}\Bigg]\times$$
$$\times e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T} G\left(u^{\gamma_m}-u\right)e^{-\lambda|x|+\mu T}dx.$$

Після нескладних перетворень в останній нерівності зробимо ще один граничний перехід:

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{Q_T}\Bigg[(u_t-f(x,t), u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m})+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_t+B_{\alpha\beta}(x,t)\times$$
$$\times D^{\alpha}u, D^{\beta}\left(u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m}\right))+(C(x,t)u, u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m})-$$
$$-\sum_{|\alpha|=1}(C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u, u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m})-\lambda\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_t+B_{\alpha\beta}(x,t)\times$$

$$\times D^{\alpha}u, u_t + u - u_t^{\gamma_m} - u^{\gamma_m}\big) \frac{x^{\beta}}{|x|}\Big] e^{-\lambda|x|+\mu t} dx dt \geqslant \lim_{m\to\infty} \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_T} G\left(u^{\gamma_m} - u\right) \times \right.$$

$$\times e^{-\lambda|x|+\mu T} dx + \int\limits_{Q_T} \left[\left(1 - \frac{\varepsilon n}{2} - \lambda n^2 \varepsilon\right) \left|u_t^{\gamma_m} - u_t\right|^2 + \sum_{|\alpha|=1} \left|D^{\alpha}\left(u_t^{\gamma_m} - u_t\right)\right|^2 \times + \right.$$

$$\times \left(a_0 - \frac{\lambda \hat{A} n}{\varepsilon}\right) + \left(b_0 - \frac{b^1}{2} - \frac{\mu(a^0 + b^0)}{2} - \frac{\hat{C}}{\varepsilon} - \frac{\lambda \hat{B} n}{\varepsilon}\right) \sum_{|\alpha|=1} \left|D^{\alpha}\left(u^{\gamma_m} - u\right)\right|^2 +$$

$$\left. + \left(c_0 - \frac{c^1}{2} - \frac{\mu(1 + c^0)}{2} - \frac{\varepsilon n}{2} - \lambda n^2 \varepsilon\right) \left|(u^{\gamma_m} - u)\right|^2 \right] e^{-\lambda|x|+\mu t} dx dt \Bigg\}. \qquad (25)$$

Враховуючи накладені вище умови, з нерівності (25) одержуємо

$$0 \geqslant \lim_{m\to\infty} \left[\int\limits_{\Omega_T} G\left(u^{\gamma_m} - u\right) e^{-\lambda|x|+\mu T} dx + \mu \int\limits_{Q_T} G\left(u^{\gamma_m} - u\right) e^{-\lambda|x|+\mu t} dx dt \right],$$

тобто

$$\lim_{m\to\infty} \|u^{\gamma_m} - u\|_{H^1_{\lambda}(\Omega)} = 0.$$

Тому перехід до границі при $m \to \infty$ у нерівності (24) є обґрунтованим. Отже, знайдена функція u є розв'язком нерівності (1). Теорему доведено.

---

1. *Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. мат. и мех. – 1960. – Т.24. – Вып. 5.– С.852-864.

2. *Рубинштейн Л.И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. География и геофизика. – 1948. – Т.12. – N.I. – С.27–45.

3. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. – М., 1976.

4. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

5. *Showalter R.E.* Pseudoparabolic partial differential equations: Doct. diss. Univ. Ill. – 1968. – 75 p.p.// Dissert. Abstrs. – 1969. – B29. – N.8. – P.2994.

6. *Showalter R.E.* Partial differential equations of Sobolew-Galperin type // Pacif. J. Math. – 1969. – Vol.31. – N.3. – P.787–793.

7. *Rundell W.* The solution of initial–boundary value problem for pseudoparabolic partial differential equations// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1976. – A74. – P.311–326.

8. *Rundell W., Stecher M.* A method of ascent for parabolic and pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. – 1976. – Vol.7. – N.6. – P.898–912.

9. *Rundell W.* The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – Vol.76. – N.2. – P.253–257.

10. *Колінько М.О., Лавренюк С.П.* Єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї нелінійної псевдопараболічної системи // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип.45. – С.71–77.

11. *Lavrenyuk S.P., Kolinko M.O.* Fourier problem for linear Sobolev-Halperin system // Demonstratio mathematica. – 1998. – Vol.31. – N1. – P.26–32.

12. *Лавренюк С.П., Пташник М.Б.* Деякі нелінійні псевдопараболічні варіаційні нерівності без початкових умов // Укр. мат. журн. – 1999. – Т.51. – N3. – С.328–337.

13. *Доманська Г.П.* Задача Фур'є для однієї псевдопараболічної системи // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.49. – С.104–112.

14. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М., 1972.

G. Domans'ka

THE FOURIER PROBLEM FOR THE SYSTEM OF PSEUDOPARASBOLIC VARIATIONAL INEQUALITIES IN UNBOUNDED DOMAIN

A problem without initial data for the system of pseudoparabolic variational inequalities in unbounded (on space variables) domain is considered. The existence and the uniqueness of the solution of this problem are proved.

Стаття надійшла до редколегії 23.06.99