ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.72-79

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.72-79

УДК 531

Петро Доманський

ОЦІНКИ БЕЗПЕЧНОГО СТОСОВНО ДВОХ МІР НАВАНТАЖЕННЯ ПРУЖНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ

Постановка задачі про безпечне навантаження пружних тіл належить Холдену (J.T.Hol-den, 1964) [1]. Дослідження її було продовжено в публікаціях Бітті (M.F.Beatty, 1969-1971) (див. [2]). Для оцінки критичних навантажень суттєво використовують нерівності Корна, Холдена, Бітті, а також умови сталості в об'ємі тіла тензора напружень Коші і міри деформації Фінгера. Параметри безпечного навантаження визначають через сталу Корна, точне значення якої відоме лише для кулі. У цій праці постановка задачі про безпечне навантаження природно одержана в процесі загального дослідження стійкості руху пружних тіл за двома конкретними мірами. Розв'язання її для пружного за Гріном тіла (без обмежень на напружено-деформований стан) зведено до знаходження екстремалей певної ізопериметричної задачі і дослідження додатної знакосталості інтегральної квадратичної форми на цих екстремалях.

1. Формулювання задачі. Розглянемо ізотропне пружне тіло K. Розрізняємо три конфігурації цього тіла: γ_0, γ_τ, γ_τ^*. Першу з них назвемо відліковою, а дві інші – актуальними. Відлікова γ_0-конфігурація вважається природною (недеформованою), коли в тілі відсутні напруження і деформації. Область відлікової конфігурації і поверхню, що її обмежує, позначатимемо через X_0 і ∂X_0 відповідно. Актуальну γ_τ-конфігурацію назвемо базовою (незбуреною). Вона виникла внаслідок дії на тіло K з моменту часу $\tau = \tau_0$ масових і поверхневих сил, які задані на всій поверхні тіла K. Другу актуальну γ_τ^* -конфігурацію, яка відповідає збуренню початкових умов у γ_τ-конфігурації, будемо називати збуреною. Місце точки $k_0 \in K$ в γ_0, γ_τ, γ_τ^*-конфігураціях визначаємо радіусом-векторами $\vec{r_0} = \vec{r_0}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $\vec{r} = \vec{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau) = \vec{r_0} + \vec{u_0}$, $\vec{r_*} = \vec{r_*}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau) = \vec{r_0} + \vec{u_*}$ відповідно, де $\vec{u_0}$, $\vec{u_*}$ – вектори переміщень із γ_0 в γ_τ і γ_τ^* -конфігурації; $\{\xi^i\}$ – лагранжеві координати, за які приймаємо координати місця точки $k_0 \in K$ у відліковій конфігурації в єдиній для всіх конфігурацій нерухомій у просторі прямокутній декартовій системі координат, $\vec{r_0} = \xi^1 \vec{\ni}_1^0 + \xi^2 \vec{\ni}_2^0 + \xi^3 \vec{\ni}_3^0 \equiv \xi^i \vec{\ni}_i^0$. Напружений стан γ_τ і γ_τ^*-конфігурацій визначаємо тензорами напружень Піоли-Кірхгофа $\hat{P}_0 = \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r})$ і $\hat{P}_* = \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r_*})$ відповідно, де $\hat{P}_0$ – тензорна функція, що характеризує зв'язок між тензором напружень і градієнтом місця; $\vec{\nabla}_0 = \vec{\ni}_0^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ – набла-оператор Гамільтона в γ_0-конфігурації; $\left\{\vec{\ni}_0^i\right\}$ – база, біортогональна до бази $\left\{\vec{\ni}_i^0\right\}$; "$\otimes$" – операція тензорного (зовнішнього) добутку. Приймаємо, що $\vec{u_*} = \vec{u_0} + \vec{u}$, $\hat{P}_* = \hat{P}_0 + \hat{P}$. Величини $\hat{P}$ і $\vec{u}$ назвемо збуренням (варіацією) тензора напружень Піоли-Кірхгофа і вектора переміщення в γ_τ-конфігурації відповідно.

Вважаючи, що напружено-деформований стан γ_τ-конфігурації відомий, у праці [3] виведено рівняння стійкості руху тіла K стосовно збурень

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P} + \rho_0(\vec{f}_* - \vec{f}_0) = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}, \tag{1}$$

де $\vec{f}_0$ – вектор масових сил; $\vec{f}_*$ – його значення в γ_τ^*-конфігурації; ρ_0 – густина розподілу маси щодо γ_0-конфігурації; " $\cdot$ " – операція скалярного (внутрішнього) множення.

Введемо силовий тензор [4] в γ_τ -конфігурації

$$\hat{B} = \int\limits_{X_0} \rho_0 \vec{f}_0 \otimes \vec{r} dV_0 + \int\limits_{\partial X_0} \vec{g_0} \otimes \vec{r} d\Sigma_0.$$

Тут $\vec{g_0} = \vec{g} d\Sigma / d\Sigma_0$; $\vec{g}$ – вектор поверхневих сил, віднесений до одиниці площі γ_τ-конфігурації; $d\Sigma_0, d\Sigma$ – площі елементарної поверхні в γ_0 і γ_τ -конфігураціях відповідно. У праці [4] показано, що подвоєна кососиметрична частина цього тензора визначається через головний момент $\vec{m_0}$ масових і поверхневих сил, а саме:

$$\hat{B} - \hat{B}^T = \hat{I} \times \vec{m}_0, \tag{2}$$

де $\hat{I}$ – одиничний тензор, "$\times$" – операція векторного множення, індексом " T " позначено операцію транспонування.

Надалі масове і поверхневе навантаження вважаємо "мертвим". Тоді $\vec{f}_* = \vec{f}_0$, $\vec{g} d\Sigma = \vec{g_*} d\Sigma_*$, де $\vec{g_*}$ – значення вектора поверхневих сил в γ_τ^*-конфігурації, $d\Sigma_*$ – площа елементарної поверхні в γ_τ^*-конфігурації. Внаслідок цього рівняння стійкості руху (1) набуде вигляду

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P} = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}. \tag{3}$$

Можна також показати, що

$$\hat{B}_* - \hat{B}_*^T = \hat{B} - \hat{B}^T + \int\limits_{X_0} \Bigg[\rho_0 \left(\frac{\partial^2 \vec{u}_0}{\partial \tau^2} \otimes \vec{u} - \vec{u} \otimes \frac{\partial^2 \vec{u}_0}{\partial \tau^2} \right) + $$
$$+ \hat{P}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \hat{P}_0 \Bigg] dV_0, \tag{4}$$

де $\hat{B}_*$ – силовий тензор в γ_τ^* -конфігурації.

Якщо лінеаризувати рівняння стійкості руху (3) в околі базової конфігурації, тобто наближено прийняти, що $\hat{P} = \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r_*}) - \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) \approx \hat{P}_0^\bullet(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u_0})$, де $\hat{P}_0^\bullet$ – лінійна стосовно аргумента $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$ функція, то одержимо лінеаризоване рівняння стійкості руху при великих (скінченних) початкових деформаціях

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P}_0^\bullet = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}. \tag{5}$$

У тих випадках, коли певні компоненти тензора деформації є нехтовно малими, можна виділити інші спрощені варіанти лінеаризованих рівнянь стійкості руху, зокрема, при малих початкових деформаціях.

Рівняння (5) при будь-яких граничних умовах стосовно збурень має розв'язок $\vec{u} \equiv 0$. При дослідженні стійкості цього розв'язку за міри відхилення базового розв'язку від збуреного приймаємо функціонали

$$d_0[h(\cdot,\tau)] = \int\limits_{X_0} \left[\vartheta \vec{u}^2 + \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)^2 + |\hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0| \right] dV_0, \tag{6}$$

$$d[h(\cdot,\tau)] = \int\limits_{X_0} \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)^2 dV_0, \tag{7}$$

визначені на функціях $h(\vec{r_0},\tau) = \left(\vec{u}(\vec{r_0},\tau), \frac{\partial \vec{u}(\vec{r_0},\tau)}{\partial \tau} \right)$, де $\vec{u}$ – розв'язки рівняння (5), ϑ – розмірна стала. Очевидно, що $d_0[0] = d[0] = 0$.

Означення 1. *Розв'язок $\vec{u} \equiv 0$ називаємо стійким за мірами (6), (7), якщо*

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists \delta > 0)\, (\forall h)\, (\forall \tau \geqslant \tau_0)\, [d_0\, [h(\cdot,\tau_0)] < \delta \Longrightarrow d\, [h(\cdot,\tau)] < \varepsilon]\,.$$

Розглянемо функціонал

$$V[h(\cdot,\tau)] = \int\limits_{X_0} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)^2 + \hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 \right] dV_0. \tag{8}$$

Функціонали d і V є неперервними в момент часу $\tau = \tau_0$ за мірою d_0 при $d_0 = 0$ [5] і функціонал (8) є додатно означеним за мірою d, якщо виконується нерівність

$$W[\vec{u}] = \int\limits_{X_0} \hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 dV_0 \geqslant 0. \tag{9}$$

Якщо врахувати, що для тензора $\hat{P}_0^{\bullet}$ характерною є властивість взаємності [4] і використати формулу Гауса-Остроградського, то можна показати, що

$$\frac{dV}{d\tau} = \int\limits_{X_0} \left[2 \left(\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} - \vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet} \right) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + \hat{L} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 \right] dV_0 + 2 \int\limits_{\partial X_0} \vec{n_0} \cdot \hat{P}_0^{\bullet} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} d\Sigma_0, \tag{10}$$

де $\hat{L} = \hat{P}_0^{\bullet} \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u_0} \right)$ – лінійна тензорна функція (вона дорівнює нулю, коли градієнт $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u_0}$ базового розв'язку не залежить від часу), $\vec{n_0}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні ∂X_0.

Збурення вектора переміщення $\vec{u}$, які згідно з їхнім означенням, повинні узгоджуватися з в'язями, що накладаються на тіло, підпорядкуємо додатковим обмеженням, а саме: на тій частині поверхні $\partial X_1 \subset \partial X_0$, на якій задано вектор переміщення, вимагаємо, щоб

$$\vec{u} = 0. \tag{11}$$

Аналогічно, якщо на $\partial X_2 \subset \partial X_0$ задається i-на компонента вектора переміщення, то на ∂X_2

$$\vec{\ni}_i^{\,0} \cdot \vec{u} = 0. \tag{12}$$

Оскільки поверхневе навантаження тіла K є "мертвим", а збурення вектора переміщення підпорядковуються додатковим обмеженням (11), (12), то з теореми про стійкість руху за двома мірами систем із розподіленими параметрами [5,6] і формул (9), (10) випливає теорема 1.

Теорема 1. *Якщо градієнт базового розв'язку $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u_0}$ не залежить від часу, то достатньою умовою стійкості розв'язку $\vec{u} \equiv 0$ рівняння (5) за мірами (6), (7) є виконання нерівності (9).*

На базовий розв'язок накладатимемо сильніші обмеження, ніж це передбачено в теоремі 1, а саме: приймаємо, що сам вектор $\vec{u_0}$ не залежить від часу. Нехай, крім того, поверхневе навантаження тіла K є таким, що його головний момент в γ_τ і γ_τ^*-конфігураціях дорівнює нулю. Тоді, згідно з (2) і (4), збурення вектора переміщення повинні підпорядковуватися співвідношенню

$$\int\limits_{X_0} \left(\hat{P}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \hat{P}_0 \right) dV_0 = 0. \tag{13}$$

Означення 2. *Навантаження тіла K, для якого виконується нерівність (9) при будь-яких збуреннях вектора переміщення $\vec{u}$, що справджують рівняння (13), називаємо безпечним.*

Таке означення безпечного навантаження було запропоновано Холденом. Ми його одержали в результаті дослідження стійкості нульового розв'язку лінеаризованого рівняння стійкості руху (5) за мірами (6), (7). Тому так означене безпечне навантаження можна назвати безпечним навантаженням тіла K стосовно мір (6), (7). Якщо замість (6), (7) вибрати інші міри відхилення базового розв'язку від збуреного $d_{0н}, d_н$, то забезпечення виконання достатніх умов стійкості руху за новими мірами приведе, взагалі кажучи, до заміни інтегральної умови (9) іншою і як наслідок одержимо постановку задачі про безпечне навантаження стосовно мір $d_{0н}$ і $d_н$. Зауважимо, що нові постановки задач про безпечне стосовно двох мір навантаження пружних тіл можна отримати, якщо запропонувати відмінні, від наведених вище, обмеження на характер зовнішньої дії, що призведе до інших, ніж (13), в'язей на збурення вектора переміщення.

Задачу про відшукання безпечного (згідно з означенням 2) навантаження можна звести до знаходження екстремалей квадратичного функціонала $W[u]$ при лінійних ізопериметричних умовах (13). Якщо після цього знайти значення функціонала $W[u]$ на знайдених екстремалях, то з умови, що воно є більшим або дорівнює нулю, знайдемо область зміни параметрів силового навантаження, яка є областю стійкості тіла K.

2. Формулювання задачі для циліндричного тіла. Приймаємо, що в γ_0-конфігурації тіло K є циліндричним сталого поперечного перерізу D, два характерні розміри якого значно менші від висоти. Положення точок осі тіла будемо характеризувати радіусом-вектором $\vec{r}_{30} = \xi^3 \vec{\ni}_3^{\,0}$, де ξ^3 - осьова координата $(0 \leqslant \xi^3 \leqslant l)$, $\vec{\ni}_3^{\,0}$ – базовий орт у напрямі цієї осі. Положення довільної точки $x_0 \in X_0$ визначаємо радіусом-вектором

$$\vec{r}_0 = \vec{R}_0 + \vec{r}_{30}, \quad \vec{R}_0 = \vec{R}_0(\xi^1, \xi^2) = \xi^\alpha \vec{\ni}_\alpha^{\,0} \quad (\alpha = 1, 2), \quad (\xi^1, \xi^2) \in D.$$

Подамо збурення вектора переміщення $\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{r}_{30} + \vec{R}_0; \tau\right)$ у вигляді розвинення за заданою базою тензорних функцій $\left\{\hat{\Phi}^{(i-1)}\left(\vec{R}_0\right)\right\}$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{30}; \tau), \tag{14}$$

де індекси "$(i-1)$" та "(i)" свідчать про ранг тензорних функцій, "$\overset{i}{\cdot}$" означає i-кратний внутрішній добуток тензорів.

Як випливає з формули Тейлора для відображення одного нормованого простору в інший за базу можна вибрати, зокрема, систему тензорних функцій $\left\{\vec{R}_0^n\right\}$, де $\vec{R}_0^n$ – n-кратний зовнішній (тензорний) добуток вектора $\vec{R}_0$ на себе.

Підставимо (14) в (9) і (13). В результаті одержимо відповідно

$$W[\vec{u}] = W_1\left[\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}\right] = \int_0^l \sum_{m,n=1}^{N} \left(\hat{M}^{(m+n)} \overset{m+n}{\cdot} \hat{P}_3^{(n)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(m)}}{\partial \xi^3} + \right.$$

$$\left. + \delta^{\alpha\beta} \hat{K}_\alpha^{(m+n)} \overset{m+n}{\cdot} \hat{P}_\beta^{(n)} \otimes \hat{u}^{(m)}\right) d\xi^3 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{15}$$

$$\int_0^l \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{A}^{(i+2)} \overset{i}{\cdot} \hat{u}^{(i)} + \hat{B}^{(i+2)} \overset{i}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(i)}}{\partial \xi^3}\right) d\xi^3 = 0. \tag{16}$$

Тут

$$\hat{M}^{(m+n)} = \int\limits_D \vec{\ni}_0^k \otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} \otimes \vec{\ni}_k^0 \otimes \hat{\Phi}^{(n-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{A}^{(i+2)} = \int\limits_D p^{\alpha j} \hat{S}_j^{(3)} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0,$$

$$\hat{K}_\alpha^{(m+n)} = \int\limits_D \vec{\ni}_0^k \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(m-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \vec{\ni}_k^0 \otimes \hat{\Phi}^{(n-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{B}^{(i+2)} = \int\limits_D p^{3j} \hat{S}_j^{(3)} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} d\Sigma_0,$$

$\hat{S}_j^{(3)} = \vec{\ni}_j^0 \otimes \hat{I} - \vec{\ni}_0^k \otimes \vec{\ni}_j^0 \otimes \vec{\ni}_k^0$, $\hat{P}_j^{(n)}$ – коефіцієнти розвинення векторів $\vec{P}_j^\bullet = \vec{\ni}_j^0 \cdot \hat{P}_0^\bullet$ за базою $\left\{\hat{\Phi}^{(n-1)}\right\}$, p^{kn} – компоненти тензора $\hat{P}_0$, $\delta^{\alpha\beta}$ – символи Кронекера.

Якщо знайти екстремалі ізопериметричної задачі (15), (16) і підставити їх в (15), то одержимо квадратичну форму стосовно сталих інтегрування. З умови додатної знакосталості одержаної квадратичної форми знайдемо область зміни параметрів силового навантаження, яка є областю стійкості тіла K, а параметри силового навантаження, які належать цій області, є параметрами безпечного навантаження.

3. Циліндричне тіло під дією осьового навантаження. Нехай циліндричне тіло зі стандартного матеріалу другого порядку [7] перебуває під дією рівномірно розподіленого граничними поперечними перерізами осьового стискуючого навантаження інтенсивності N_0. Бічну поверхню вважаємо вільною від силових навантажень. Нехай область D має площу s_0 і її моменти інерції стосовно обох координатних осей є однаковими і дорівнюють J, а відцентровий момент і моменти першого порядку дорівнюють нулю. Знайдемо умови безпечного навантаження.

Тензор Піоли-Кірхгофа для вибраного матеріалу є многочленом третього степеня стосовно градієнта $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0$. Обмежимося розглядом одного з варіантів лінеаризованої теорії стійкості руху при малих початкових деформаціях: розглянемо тензор Піоли-Кірхгофа з точністю до членів другого порядку

$$\hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) = (\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0) \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) + \frac{\lambda}{2} \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \hat{I} + \mu \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0, \tag{17}$$

де

$$\hat{T}(\vec{u}_0) = \lambda \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{I} + 2\mu \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0), \qquad \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) = (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 + \vec{u}_0 \otimes \vec{\nabla}_0)/2$$

-тензор напружень Коші і тензор деформації лінійної теорії пружності; λ, μ – сталі Ляме.

Тепер $\hat{P}_0^\bullet$ є лінійною функцією градієнта базового розв'язку

$$\hat{P}_0^\bullet(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0) = (\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0) \cdot \hat{T}(\vec{u}) + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) +$$
$$+ \lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \hat{I} + \mu(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0).$$

За базовий виберемо розв'язок відповідної задачі, сформульованої в рамках статичної лінійної теорії пружності [4]

$$\vec{u_0} = Q\left[\nu\left(\xi^1 \vec{\ni}_1^0 + \xi^2 \vec{\ni}_2^0\right) - \xi^3 \vec{\ni}_3^0\right], \tag{19}$$

де $Q = N_0/Es_0$, $\nu = \lambda/(2(\lambda+\mu))$ – коефіцієнт Пуассона, $E = 2\mu(1+\nu)$ – модуль пружності.

Для спрощення обчислень знехтуємо деформацією базової конфігурації, тобто замість формул (17), (18) приймаємо, що

$$\hat{P}_0 = \hat{T}(\vec{u}_0), \quad \hat{P}_0^\bullet = \hat{T}(\vec{u}) + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \hat{T}(\vec{u}_0).$$

Із (19) знаходимо

$$\hat{T}(\vec{u}_0) = -QE \vec{\ni}_3^0 \otimes \vec{\ni}_3^0.$$

За базу розвинення збурення вектора переміщення виберемо $\left\{\vec{R}_0^n\right\}$ і обмежимося у формулі (14) двома доданками, тобто приймаємо, що $\vec{u} = \hat{u}^{(1)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{u}^{(2)}$. Нехай $\hat{u}^{(1)} = u_k \vec{\ni}_0^k$, $\hat{u}^{(2)} = u_{\alpha k} \vec{\ni}_0^\alpha \otimes \vec{\ni}_0^k$. Для випадку, що розглядається, формули (15), (16) наберуть відповідно вигляду

$$W_1\left[\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}\right] = s_0 \int_0^l \left\{\lambda(u_{11}+u_{22})\left(u_{11}+u_{22}+2\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right) + \frac{\mu J}{s_0}\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left(\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial \xi^3}\right)^2 + \right.$$
$$+\mu\left[(u_{12}+u_{21})^2 + \sum_{\alpha=1}^2\left(2u_{\alpha\alpha}^2 + \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)^2 + 2u_{\alpha 3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)\right] + (\mu - QE)\left(u_{13}^2 + u_{23}^2\right) +$$
$$\left. + (\lambda + 2\mu - QE)\left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right)^2 + \frac{J}{s_0}\sum_{\alpha=1}^2\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\right]\right\} d\xi^3,$$

$$s_0 QE \int_0^l \frac{\partial u_k}{\partial \xi^3}\left(\vec{\ni}_0^k \otimes \vec{\ni}_0^3 - \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^k\right) d\xi^3 = 0. \tag{20}$$

Можна переконатися у такому: коли $N_0 \leqslant s_0 E$, то

$$W_1\left[\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}\right] \geqslant W_2\left[\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}\right] = s_0 \int_0^l \sum_{\alpha=1}^2 \left\{\frac{J}{s_0}(\lambda + 2\mu - QE)\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + (\mu - QE)\, u_{\alpha 3}^2 + \mu\left[\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)^2 + 2u_{\alpha 3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right]\right\} d\xi^3.$$

З необхідної умови екстремуму функціонала W_2 при ізопериметричних умовах (20) одержуємо систему рівнянь Ейлера

$$\frac{J}{s_0}(\lambda+2\mu-QE)\frac{\partial^2 u_{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}-(\mu-QE)\,u_{\alpha 3}-\mu\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}=0,$$
$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial\xi^3}=0.$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд

$$\begin{aligned}u_\alpha &=\frac{1}{s_2}\left(c_{1\alpha}\cos s_2\xi^3-c_{2\alpha}\sin s_2\xi^3\right)+\left(1-\frac{\mu}{QE}\right)c_{3\alpha}\xi^3+c_{4\alpha},\\ u_{\alpha 3}&=c_{1\alpha}\sin s_2\xi^3+c_{2\alpha}\cos s_2\xi^3+\frac{\mu}{QE}c_{3\alpha},\end{aligned}\tag{22}$$

де $c_{k\alpha}(k=1,4;\alpha=1,2)$ – довільні функції від часу,

$$s_2^2=\frac{s_0QE}{J(\lambda+2\mu-QE)}.$$

Якщо підставити функції (22) у вираз (21) для функціонала W_2, провести інтегрування і врахувати ізопериметричні умови (20), які можна записати у вигляді $u_\alpha(l,\tau)--u_\alpha(0,\tau)=0$, то одержимо

$$\begin{aligned}W_2=&\frac{s_0}{s_2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{c_{1\alpha}^2\left[A\sin 2s_2l+C(1-\cos s_2l)^2\right]+c_{2\alpha}^2\left(C\sin^2 s_2l-\right.\right.\\ &\left.\left.-A\sin 2s_2l\right)+2c_{1\alpha}c_{2\alpha}\left[C\sin s_2l(1-\cos s_2l)-A(1-\cos 2s_2l)\right]\right\},\end{aligned}\tag{23}$$

де

$$A=\frac{QE}{2}=\frac{s_2^2J(\lambda+2\mu)}{2(s_0+s_2^2J)},\quad C=\frac{\mu QE}{s_2l(\mu-QE)}=\frac{\mu(\lambda+2\mu)s_2^2J}{s_2l[\mu s_0-(\lambda+\mu)s_2^2J]}.$$

З умов додатної знакосталості квадратичної форми (23) випливає така оцінка безпечного навантаження:

$$N_0\leqslant(\lambda+2\mu)M,\qquad M=\pi^2J/\left(l^2\left(1+\pi^2J/l^2s_0\right)\right).\tag{24}$$

Якщо замість формули (21) врахувати грубшу оцінку

$$W_1\left[\left\{\hat u^{(i)}\right\}\right]\geqslant W_2\left[\left\{\hat u^{(i)}\right\}\right]\geqslant W_2\left[\left\{\hat u^{(i)}\right\}\right]|_{\lambda=0},$$

то аналогічно можна отримати

$$N_0\leqslant 2\mu M.\tag{25}$$

Приймемо в першій з формул (24) і у формулі (25), що $\nu=0$. Тоді в обох випадках максимальне значення безпечного навантаження становитиме $N_б=EM$.

Порівняємо одержаний вираз з ейлеровою критичною силою $N_E=4E\pi^2J/l^2$ для стержня, краї якого защемлені. Оскільки довжина l стержня набагато більша від характерного розміру поперечного перерізу, то наближено $N_E/N_б=4$.

Оцінка безпечного навантаження, що одержана при використанні нерівностей Корна, Холдена, Бітті, наводиться в монографії [4]

$$N_0 \leqslant 2\mu s_0/(k+1), \tag{26}$$

де k – стала Корна. Формули (25) і (26) збігаються, якщо

$$k = s_0 l^2/\pi^2 J. \tag{27}$$

Зокрема, наближене значення сталої Корна для стержня, в поперечному перерізі якого є квадрат із стороною a, згідно з (27) становитиме

$$k = 12l^2/\pi^2 a^2,$$

а для стержня з круговим поперечним перерізом радіуса r має вигляд

$$k = 4l^2/\pi^2 r^2.$$

---

1. *Holden J.T.* Estimation of critical loads in elastic stability theory// Arch. Rational Mech. and Anal. – 1964. – Vol.17. – P.171-183.
2. *Beatty M.F.* Estimation of ultimate safe loads in elastic stability theory // J. Elasticity. – 1971. – Vol. – N2. – P.95-129.
3. *Доманський П.П.* Метод розкладу за тензорними функціями в побудові рівнянь стійкості руху пружних циліндричних тіл //Доп. НАН України. – 1997. – N6. – С.53-59.
4. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости.– М., 1980.
5. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределёнными параметрами. – Новосибирск, 1987.
6. *Мовчан А.А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // Прикл. мат. и мех. – 1960. – Т. XXIX. – С.3-20.
7. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчётах. – Л., 1986.

P. Domans'kyj

ESTIMATIONS OF SAFE WITH RESPECT TO TWO MEASURES LOAD OF ELASTIC CYLINDRICAL SOLIDS

Elastic solids safe loading problem definitions with respect to two measures are suggested. The safe load parameters deriving method for cylindrical solids is prepared and such parameters for special loading case are determined. It is done the comparative analysis for these results.

Стаття надійшла до редколегії 10.11.98