УДК 517.927

Юрій Жерновий

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ТА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЧАСТКОВО РОЗВ'ЯЗАНИХ СТОСОВНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ

1. Вступ. Умови розв'язності задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$x' = f(t, x) \tag{1}$$

та крайових задач для рівняння другого порядку

$$x'' = f(t, x, x'), \qquad t \in I = [a, b] \tag{2}$$

добре відомі [1, с.19-22, 491-511; 2, с.191-241; 3, с.109-120; 4-6]. Методи дослідження, які застосовували на початковому етапі розвитку теорії звичайних диференціальних рівнянь, зумовили відсутність старших похідних у правих частинах рівнянь (1), (2). Сучасна математика надала в розпорядження дослідників потужний апарат, який значно розширив можливості вивчення нелінійних задач, зокрема, дав змогу розглядати рівняння, частково розв'язані стосовно старшої похідної. У праці [7] чисельно-аналітичний метод [8] узагальнено на крайову задачу для системи нелінійних диференціальних рівнянь вигляду $x' = f(t, x, x', \Lambda)$ з параметрами $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ та двоточковими крайовими умовами, які також містять параметр.

У цій праці доведено аналоги теорем Пікара-Ліндельофа і Пеано [1,с.19-22] для системи диференціальних рівнянь першого порядку $x' = f(t, x, x')$, а також вивчено питання про розв'язність деяких двоточкових крайових задач для системи рівнянь другого порядку

$$x'' = f(t, x, x', x''), \qquad t \in I, \tag{3}$$

зокрема, доведено аналоги теорем Пікара і Скорца-Драгоні [1, с.497-499] і розглянуто випадок необмежених правих частин у системі (3).

Треба відзначити, що використання теореми про неявну функцію з метою розв'язання рівнянь стосовно старшої похідної і подальшого використання класичних теорем про розв'язність задачі Коші чи крайових задач, не може гарантувати існування розв'язку цих задач для $t \in I$, де I – довільний наперед заданий відрізок, оскільки ця теорема має локальний характер, тобто забезпечує існування функції $y(t, x)$ як розв'язку рівняння $F(t, x, y) = 0$ стосовно y лише в деякому околі точки (t_0, x_0), причому радіус цього околу невідомий і залежить від вибору функції F [9, с.72]. Функція F повинна мати неперервну похідну стосовно y.

Нехай $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – два вектори з дійсними компонентами. Тоді символом (x, y) будемо позначати скалярний добуток векторів x та

y: $(x, y) == x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. Норму вектора x позначимо через $|x|$, так що $|x| = \sqrt{(x,x)} == \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Якщо $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in I$ є неперервною вектор-функцією, яка має k неперервних похідних, то будемо писати $x \in C_n^k(I)$, причому $C_n^0 = C_n$.

2. Задача Коші для системи рівнянь першого порядку. Нехай $x \in \mathbb{R}^n$ і $f \in \mathbb{R}^n$ позначають вектори з дійсними компонентами. Розглянемо систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$x' = f(t, x, x') \tag{4}$$

з початковою умовою

$$x(t_0) = x_0, \tag{5}$$

де $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Єдиний розв'язок рівняння

$$x' = h(t), \tag{6}$$

який задовольняє умову (5), визначається за формулою

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds. \tag{7}$$

Якщо $\alpha > 0$, $t \in I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, то з (7) і (6) випливають оцінки

$$|x(t) - x_0| \leqslant \alpha \max_{s \in I_\alpha} |h(s)|; \quad |x'(t)| \leqslant \max_{t \in I_\alpha} |h(t)|. \tag{8}$$

Теорема 1. *Нехай функція $f(t, x, x')$ неперервна для $(t, x, x') \in I_\alpha \times \mathbb{R}^{2n}$ і задовольняє умову Ліпшиця стосовно x, x'*

$$|f(t, x_1, x_1') - f(t, x_2, x_2')| \leqslant \vartheta_0 |x_1 - x_2| + \vartheta_1 |x_1' - x_2'| \tag{9}$$

зі сталими Ліпшиця ϑ_0, $\vartheta_1 > 0$ настільки малими, що

$$\vartheta_0 \alpha + \vartheta_1 < 1. \tag{10}$$

Тоді рівняння (4) має на відрізку I_α єдиний розв'язок, який задовольняє умову (5).

Зауваження 1. Замість вимоги, щоб f була визначена для значень $t \in I_\alpha$ та всіх (x, x'), досить вважати, що f визначена для $t \in I_\alpha$, $|x - x_0| \leqslant R$, $|x'| \leqslant R/\alpha$, де R задовольняє нерівність

$$m\alpha \leqslant R\big[1 - (\vartheta_0 \alpha + \vartheta_1)\big], \quad m = \max_{t \in I_\alpha} |f(t, 0, 0)| \tag{11}$$

або просто

$$M\alpha \leqslant R, \tag{12}$$

якщо $\quad M = \max |f(t, x, x')| \quad$ для $\quad t \in I_\alpha, \quad |x - x_0| \leqslant R, \quad |x'| \leqslant R/\alpha.$

Доведення. Нехай $\mathbb{B}$ – банахів простір функцій $h(t)$, $t \in I_\alpha$, які мають неперервні перші похідні і норму

$$\|h\| = \max\big(\max_{t \in I_\alpha} |h(t)|, \ \alpha \max_{t \in I_\alpha} |h'(t)|\big).$$

Візьмемо в кулі $\|h - x_0\| \leqslant R$ із $\mathbb{B}$ деяку функцію $h(t)$. Нехай $x(t)$ – єдиний розв'язок рівняння $x' = f\big(t, h(t), h'(t)\big)$, який задовольняє умову (5). Визначимо в кулі $\|h - x_0\| \leqslant\leqslant R$ із $\mathbb{B}$ оператор T_0, прийнявши, що $T_0\big(h(t)\big) = x(t)$.

Якщо $x_{(0)} = T_0(0)$ і $|f(t,0,0)| \leqslant m$, то з (8) при $h = f(t,0,0)$ одержуємо

$$|x_{(0)}(t) - x_0| \leqslant \alpha m; \qquad \alpha|x'_{(0)}(t)| \leqslant \alpha m.$$

Це означає, що норма функції $x_{(0)}(t) - x_0 = T_0(0) - x_0$ задовольняє нерівність

$$\|T_0(0) - x_0\| \leqslant \alpha m. \tag{13}$$

Далі, якщо $x_1 = T_0(h_1)$, $x_2 = T_0(h_2)$, то згідно з (6)–(9) маємо $|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant\leqslant \alpha H$, $|x'_1(t) - x'_2(t)| \leqslant H$, де $H = \vartheta_0 \max\limits_{t\in I_\alpha}|h_1 - h_2| + \vartheta_1 \max\limits_{t\in I_\alpha}|h'_1 - h'_2|$. Якщо другу нерівність домножити на α, то отримаємо нерівність

$$\|T_0(h_1) - T_0(h_2)\| \leqslant (\vartheta_0\alpha + \vartheta_1)\|h_1 - h_2\|.$$

Тепер з нерівностей (10), (11) і (13) видно, що можна застосувати принцип стискаючих відображень (теорема 0.1 [1, с.475]), тобто теорема 1 доведена.

Якщо $|f(t,x,x')| \leqslant M$ для $t \in I_\alpha$, $|x - x_0| \leqslant R$, $|x'| \leqslant R/\alpha$, то міркуючи аналогічно, як і при одержанні нерівності (13), можна переконатися, оскільки $\|h - x_0\| \leqslant R$, то $x = T_0(h)$ задовольняє нерівність $\|x - x_0\| \leqslant M\alpha$. Отже, якщо виконується (12), то T_0 відображає кулю $\|h - x_0\| \leqslant R$ в себе і тому, враховуючи (10), можна застосувати зауваження до теореми 0.1 [1, с.475]. Отже, теорема 1 і зауваження 1 повністю доведені.

Зауваження 2. У випадку, коли в рівнянні (4) $f(t,x,y) \equiv f(t,y)$ з теореми 1 випливає, що задача (4), (5) має єдиний розв'язок, якщо f неперервна і задовольняє умову Ліпшиця стосовно y із сталою ϑ_1, $0 < \vartheta_1 < 1$.

Теорема 2. *Нехай функція $f(t,x,y)$ неперервна, обмежена і задовольняє умову Ліпшиця стосовно y, тобто $|f(t,x,y)| \leqslant m$ для $(t,x,y) \in I_\alpha \times \mathbb{R}^{2n}$ і $|f(t,x,y_1) - f(t,x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$, де $0 < L < 1$, для $(t,x,y_i) \in I_\alpha \times \mathbb{R}^{2n}$, $i = 1,2$. Тоді задача (4), (5) має на відрізку I_α хоча б один розв'язок $x(t)$, причому $|x(t) - x_0| \leqslant m\alpha$, $|x'(t)| \leqslant m$.*

Зауваження 3. Досить вимагати, щоб функція $f(t,x,y)$ була визначена лише для $t \in I_\alpha$, $|x - x_0| \leqslant m\alpha$, $|y| \leqslant m$.

Доведення. Нехай $\mathbb{B}$ – банахів простір функцій $h(t) \in C_n(I_\alpha)$ з нормою $\|h(t)\| = \max\limits_{t\in I_\alpha}|h(t)|$. Розглянемо $h(t)$ в кулі $\|h - x_0\| \leqslant m\alpha$. Для цієї функції h приймемо $x = T_0(h)$, де $x(t)$ – розв'язок рівняння $x' = f\big(t, h(t), x'(t)\big)$, який задовольняє умову (5). Цей розв'язок існує і єдиний згідно з зауваженням 2 і для нього, очевидно, правильні оцінки, аналогічні до оцінок (8), тобто $|x(t) - x_0| \leqslant m\alpha$, так що T_0 відображає кулю $\|h - x_0\| \leqslant m\alpha$ в себе.

Якщо $\|h_1 - x_0\| \leqslant m\alpha$, $\|h_2 - x_0\| \leqslant m\alpha$ і $x_1 = T_0(h_1)$, $x_2 = T_0(h_2)$, то з (7) випливає, що $|x_1 - x_2| \leqslant \alpha \max\limits_{s\in I_\alpha}\big|f\big(s, h_1(s), x'_1(s)\big) - f\big(s, h_2(s), x'_2(s)\big)\big|$. Оскільки

$$\begin{aligned}|x'_1(t) - x'_2(t)| &\leqslant \big|f\big(t, h_1(t), x'_1(t)\big) - f\big(t, h_2(t), x'_1(t)\big)\big| + \\ &+ \big|f\big(t, h_2(t), x'_1(t)\big) - f\big(t, h_2(t), x'_2(t)\big)\big| \leqslant \\ &\leqslant \big|f\big(t, h_1(t), x'_1(t)\big) - f\big(t, h_2(t), x'_1(t)\big)\big| + L|x'_1(t) - x'_2(t)|,\end{aligned}$$

то
$$(1-L)\big|x_1'(t)-x_2'(t)\big| \leqslant \big|f\big(t,h_1(t),x_1'(t)\big)-f\big(t,h_2(t),x_1'(t)\big)\big|,$$
де $0<L<1$. Оскільки функція f неперервна, то при $\|h_1-h_2\|\to 0$ також $|x_1'-x_2'|\to 0$ і, як наслідок, $\|x_1-x_2\|\to 0$. Це означає, що оператор T_0 неперервний.

Для будь-якої функції $x(t)$ з області значень оператора T_0, тобто для $x=T_0(h)$ з деякою h, з обмеженості функції f маємо $|x'(t)|\leqslant m$. Отже, функції $x(t)$ з області значень $T_0(h)$, $\|h-x_0\|\leqslant m\alpha$ є такі, що $x(t)$ одностайно неперервні, оскільки
$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant m|t_1-t_2|.$$
Тому з теореми Арцела випливає, що область значень оператора $T_0(h)$ має компактне замикання. Отже, можна застосувати теорему Шаудера [10, с.291]; доведення теореми 2 закінчено.

3. Задача Діріхле для системи рівнянь другого порядку. Нехай $x\in\mathbb{R}^n$ і $f\in\mathbb{R}^n$ позначають вектори з дійсними компонентами. Розглянемо систему диференціальних рівнянь другого порядку (3) з крайовими умовами
$$x(a)=c,\quad x(b)=d, \tag{14}$$
де $c,d\in\mathbb{R}^n$. Відомо, що єдиний розв'язок рівняння $x''=h(t)$, який задовольняє умови (14), визначається за формулою
$$x(t)=\frac{c}{p}(b-t)+\frac{d}{p}(t-a)-\int_a^b G(t,s)h(s)\,ds, \tag{15}$$
де $p=b-a$,
$$G(t,s)=\begin{cases}(s-a)(b-t)/p, & a\leqslant s\leqslant t\leqslant b;\\ (b-s)(t-a)/p, & a\leqslant t\leqslant s\leqslant b.\end{cases}$$
Виконуються оцінки
$$\begin{gathered}0\leqslant G(t,s)\leqslant\frac{p}{4};\qquad \int_a^b G(t,s)\,ds=\frac{1}{2}(b-t)(t-a)\leqslant\frac{p^2}{8};\\ |G_t(t,s)|\leqslant 1;\quad \int_a^b|G_t(t,s)|\,ds=\frac{1}{2p}[(t-a)^2+(b-t)^2]\leqslant\frac{p}{2}.\end{gathered} \tag{16}$$
Тому з (15), а також з виразу, який одержуємо диференціюванням цієї рівності, випливає, що
$$\left|x(t)-\frac{c+d}{2}\right|\leqslant\frac{p^2}{8}\max_{s\in I}|h(s)|+\frac{|c-d|}{2};\quad |x'(t)|\leqslant\frac{p}{2}\max_{s\in I}|h(s)|+\frac{|c-d|}{p}. \tag{17}$$
Теорема 3. *Нехай функція $f(t,x,x',x'')$ неперервна для $(t,x,x',x'')\in I\times\mathbb{R}^{3n}$ і задовольняє умову Ліпшиця стосовно x, x', x''*
$$|f(t,x_1,x_1',x_1'')-f(t,x_2,x_2',x_2'')|\leqslant\vartheta_0|x_1-x_2|+\vartheta_1|x_1'-x_2'|+\vartheta_2|x_1''-x_2''| \tag{18}$$
зі сталими Ліпшиця ϑ_0, ϑ_1, $\vartheta_2>0$ настільки малими, що
$$\frac{\vartheta_0p^2}{8}+\frac{\vartheta_1p}{2}+\vartheta_2<1. \tag{19}$$

Тоді рівняння (3) має єдиний розв'язок, який задовольняє умови (14).

Зауваження 4. Замість вимоги, щоб f була визначена для значень $t \in I$ та всіх (x, x', x''), досить вважати, що f визначена для $t \in I$, $|x - (c+d)/2| \leqslant R$, $|x'| \leqslant (4R - |c-d|)/p$, $|x''| \leqslant 4(2R - |c-d|)/p^2$, де R задовольняє нерівність

$$\frac{mp^2}{8} + \frac{|c-d|}{2} \leqslant R\left[1 - \left(\frac{\vartheta_0 p^2}{8} + \frac{\vartheta_1 p}{2} + \vartheta_2\right)\right], \quad m \doteq \max_{t\in I}|f(t,0,0,0)| \tag{20}$$

або просто

$$\frac{1}{2}|c-d| + \frac{M}{8}p^2 \leqslant R, \tag{21}$$

якщо $M = \max|f(t,x,x',x'')|$ для $t \in I$, $|x - (c+d)/2| \leqslant R$, $|x'| \leqslant (4R - |c-d|)/p$, $|x''| \leqslant 4(2R - |c-d|)/p^2$.

Доведення. Нехай $\mathbb{B}$ – банахів простір функцій $h(t)$, $t \in I$, які мають неперервні другі похідні та норму

$$\|h\| = \max\left(\max_{t\in I}|h(t)|,\ \frac{p}{4}\max_{t\in I}|h'(t)|,\ \frac{p^2}{8}\max_{t\in I}|h''(t)|\right).$$

Візьмемо в кулі $\|h - (c+d)/2\| \leqslant R$ із $\mathbb{B}$ деяку функцію $h(t)$. Нехай $x(t)$ – єдиний розв'язок рівняння $x'' = f\big(t, h(t), h'(t), h''(t)\big)$, який задовольняє умови (14). Визначимо в кулі $\|h - (c+d)/2\| \leqslant R$ із $\mathbb{B}$ оператор T_0, прийнявши, що $T_0\big(h(t)\big) = x(t)$.

Далі доведення проводиться за схемою доведення теореми 1 з використанням оцінок (17) і умов (18)–(21).

Теорема 4. *Нехай функція $f(t,x,y,z)$ неперервна, обмежена і задовольняє умову Ліпшиця стосовно z, тобто $|f(t,x,y,z)| \leqslant m$ для $(t,x,y,z) \in I \times \mathbb{R}^{3n}$ і $|f(t,x,y,z_1) - -f(t,x,y,z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|$, де $0 < L < 1$, для $(t,x,y,z_i) \in I \times \mathbb{R}^{3n}$, $i = 1,2$. Тоді задача (3), (14) має хоча б один розв'язок $x(t)$, причому*

$$\left|x(t) - \frac{c+d}{2}\right| \leqslant \frac{mp^2}{8} + \frac{|c-d|}{2}; \qquad |x'(t)| \leqslant \frac{mp}{2} + \frac{|c-d|}{p}.$$

Зауваження 5. Досить вимагати, щоб функція $f(t,x,y,z)$ була визначена лише для

$$t \in I; \quad \left|x - \frac{c+d}{2}\right| \leqslant \frac{mp^2}{8} + \frac{|c-d|}{2}; \quad |y| \leqslant \frac{mp}{2} + \frac{|c-d|}{p}; \quad |z| \leqslant m.$$

Зауваження 6. У випадку, коли $f(t,x,y,z) \equiv f(z)$, з теореми Боля-Брауера про нерухому точку [11, c.233] випливає, що задача (3), (14) має розв'язок, якщо $f(z)$ неперервна і відображає кулю $|z| \leqslant m$ деякого радіуса $m > 0$ в себе. Те саме стосується і задачі Коші (4), (5) за умови, що $f(t,x,y) \equiv f(y)$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 2 з використанням оцінок (15)–(17). Розглядаємо банахів простір функцій $h(t) \in C_n^1(I)$ з нормою

$$\|h\| = \max\left(\max_{t\in I}|h(t)|,\ \frac{p}{4}\max_{t\in I}|h'(t)|\right).$$

Для функцій $h(t)$ з кулі

$$\left\|h - \frac{c+d}{2}\right\| \leqslant \frac{mp^2}{8} + \frac{|c-d|}{2}$$

розглядаємо оператор $T_0(h) = x$, де $x(t)$ – єдиний розв'язок рівняння $x'' = f\big(t, h(t), h'(t), x''(t)\big)$, який задовольняє умови (14).

4. Третя крайова задача. Для скалярного рівняння

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad t \in I \tag{22}$$

з неперервною функцією f розглянемо крайові умови

$$x(a) = Ax'(a) + c, \qquad x(b) = -Bx'(b) + d, \tag{23}$$

де A, B, c, $d \in \mathbb{R}$; A, $B \geqslant 0$.

Рівняння $x'' = h(t)$ має єдиний розв'язок, який задовольняє умови (23) і задається формулою

$$x(t) = \frac{1}{P}\big[c(B + b - t) + d(A + t - a)\big] - \int_a^b G(t,s)h(s)\,ds,$$

де $P = p + A + B$, $p = b - a$,

$$G(t,s) = \begin{cases} (A + s - a)(B + b - t)/P, & a \leqslant s \leqslant t \leqslant b; \\ (B + b - s)(A + t - a)/P, & a \leqslant t \leqslant s \leqslant b. \end{cases}$$

Як наслідок, правильні оцінки

$$0 \leqslant G(t,s) \leqslant G_1, \quad \int_a^b G(t,s)\,ds = \frac{1}{2P}\big[(B + b - t)(2A + t - a)(t - a) +$$

$$+ (A + t - a)(2B + b - t)(b - t)\big] \leqslant c_0; \qquad |G_t(t,s)| < 1;$$

$$\int_a^b |G_t(t,s)|\,ds = \frac{1}{2P}\big[(t - a)(2A + t - a) + (b - t)(2B + b - t)\big] \leqslant c_1;$$

$$\left|x(t) - \frac{c+d}{2}\right| \leqslant \frac{|c-d|}{2} + c_0 \max_{s\in I}|h(s)|; \quad |x'(t)| \leqslant \frac{|c-d|}{P} + c_1 \max_{s\in I}|h(s)|,$$

де

$$G_1 = \begin{cases} P/4, & \text{якщо } p + A - B > 0; \\ \max\big((A+p)B;\ (B+p)A\big)\big/P, & \text{якщо } p + A - B \leqslant 0; \end{cases}$$

$$c_0 = \frac{p}{16P^4}\big[(p^2 + 2pA + 2PB)(p^2 + 2pB + 4PA)(p + 2B) +$$

$$+ (p^2 + 2pB + 2PA)(p^2 + 2pA + 4PB)(p + 2A)\big]; \quad c_1 = \frac{p}{2P}\max\big(2A + p;\ 2B + p\big).$$

Використовуючи одержані оцінки, приходимо до умов розв'язності, аналогічних до теорем 3 і 4.

Теорема 5. *Нехай функція $f(t, x, x', x'')$ неперервна для $(t, x, x', x'') \in I \times \mathbb{R}^3$ і задовольняє умову Ліпшиця (18) зі сталими Ліпшиця ϑ_0, ϑ_1, $\vartheta_2 > 0$ настільки малими, що $c_0\vartheta_0 + c_1\vartheta_1 + \vartheta_2 < 1$. Тоді крайова задача (22), (23) має єдиний розв'язок.*

Теорема 6. *Нехай функція $f(t,x,y,z)$ неперервна, обмежена і задовольняє умову Ліпшиця стосовно z, тобто $|f(t,x,y,z)| \leqslant m$ для $(t,x,y,z) \in I \times \mathbb{R}^3$ і $|f(t,x,y,z_1) - -f(t,x,y,z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|$, де $0 < L < 1$, для $(t,x,y,z_i) \in I \times \mathbb{R}^3$, $i = 1,2$. Тоді задача (22), (23) має хоча б один розв'язок $x(t)$, причому*

$$\left|x(t) - \frac{c+d}{2}\right| \leqslant mc_0 + \frac{|c-d|}{2}; \qquad |x'(t)| \leqslant mc_1 + \frac{|c-d|}{P}.$$

Єдиний розв'язок системи рівнянь другого порядку $x'' = h(t)$, який задовольняє крайові умови

$$x(a) - Ax'(a) = c, \qquad x(b) + Bx'(b) = d, \tag{24}$$

де $h(t) \in C_n(I)$, c, $d \in \mathbb{R}^n$, A, B – невід'ємно визначені $n \times n$-матриці, записується у вигляді

$$x(t) = P^{-1}\big[(B+b-t)c + (A+t-a)d\big] - \int\limits_a^b G(t,s)h(s)\,ds,$$

де $P = p + A + B$, P^{-1} – обернена матриця до P,

$$G(t,s) = \begin{cases} (B+b-t)P^{-1}(A+s-a), & a \leqslant s \leqslant t \leqslant b; \\ (A+t-a)P^{-1}(B+b-s), & a \leqslant t \leqslant s \leqslant b. \end{cases}$$

Звідси, використовуючи ідею доведень теорем 4 і 6, одержимо теорему існування розв'язку крайової задачі (3), (24), де $f \in C_n(I \times \mathbb{R}^{3n})$.

Теорема 7. *Якщо функція $f(t,x,y,z)$ неперервна, обмежена і задовольняє умову Ліпшиця за z зі сталою Ліпшиця L, $0 < L < 1$, то крайова задача (3), (24), де A, B – невід'ємно визначені матриці, має хоча б один розв'язок $x(t)$.*

5. Випадок необмежених правих частин. Розглянемо крайову задачу (3), (24), де $f \in C_n(I \times \mathbb{R}^{3n})$, c, $d \in \mathbb{R}^n$, A, B – $n \times n$-матриці.

Лема 1. *Нехай для будь-якого $M > 0$ існує число $p \geqslant 0$ і неперервні додатні функції $\alpha(s) > 0$, $\beta(s) > 0$, $(0 \leqslant s < \infty)$ такі, що $\alpha(s) \to 0$, $\beta(s) \to 0$ при $s \to \infty$, $s^2\alpha(s)$ і $s\beta(s)$ є неспадні функції s, причому виконується одна з умов*

$$\begin{gathered} |f(t,x,y,z)| \leqslant p\big(1 + |y|^2\alpha(|y|) + |z|\beta(|z|)\big), \\ |f(t,x,y,z)| \leqslant p\big(1 + |y|^2\alpha(|y|)\big), \quad |f(t,x,y,z)| \leqslant p\big(1 + |z|\beta(|z|)\big), \end{gathered} \tag{25}$$

для $|x| \leqslant M$ і всіх $t \in I$, y, $z \in \mathbb{R}^n$. Нехай $x(t)$, $t \in I$ є розв'язок системи (3), для якої виконується одна з умов (25). Тоді для будь-якого $M > 0$ можна знайти такі числа $N > 0$ і $K > 0$, якщо $|x(t)| \leqslant M$ для всіх $t \in I$, то

$$|x'(t)| \leqslant N, \qquad |x''(t)| \leqslant K \qquad \forall t \in I. \tag{26}$$

Доведення. Нехай $x(t) \in C_n^2(I)$, $M_k = \max\limits_{t\in I}|x^{(k)}(t)|$, $k = 0,1,2$. Тоді [5, с.76]

$$M_1^2 \leqslant q(rM_0 + M_2), \tag{27}$$

де q и r – деякі додатні сталі. Нехай $M > 0$ задане і $x(t) \in C_n^2(I)$ – розв'язок системи (3), який задовольняє умову $|x(t)| \leqslant M$ для всіх $t \in I$. Тоді з (3) і першої умови (25) одержуємо $|x''(t)| = \big|f\big(x(t), x'(t), x''(t)\big)\big| \leqslant p\big(1 + |x'(t)|^2\alpha(|x'(t)|) +$

$|x''(t)|\beta(|x''(t)|)\big)$. Взявши значення t, при якому в лівій частині досягається максимум, і використовуючи нерівність (27), де, очевидно, треба взяти $M = M_0$, одержимо

$$M_2 \leqslant p\big(1 + q(rM + M_2)\alpha\big((q(rM + M_2))^{1/2}\big) + M_2\beta(M_2)\big). \tag{28}$$

Оскільки зі збільшенням M_2 функції $\alpha(s)$ і $\beta(s)$ прямують до нуля, то з нерівності (28) випливає обмеженість M_2. Лему доведено.

Лема 2. *Якщо функція $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{R}^n$ задовольняє умову Ліпшиця стосовно z з деякою сталою $L > 0$, то функція $F(z) = \varphi(z\sigma(|z|/K))$, де $K > 0$, $\sigma(s)$ – функція, задана для $s \geqslant 0$,*

$$\sigma(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant s \leqslant 1; \\ 1/s, & 1 < s < \infty, \end{cases}$$

задовольняє умову Ліпшиця стосовно z з тою самою сталою L.

Доведення. Для будь-яких z_1, $z_2 \in \mathbb{R}^n$

$$F(z_1) - F(z_2) = \begin{cases} \varphi(z_1) - \varphi(z_2), & |z_i| \leqslant K, \ i = 1,2; \\ \varphi(z_1') - \varphi(z_2'), & |z_i| > K, \ i = 1,2; \\ \varphi(z_1) - \varphi(z_2'), & |z_1| \leqslant K, \ |z_2| > K; \\ \varphi(z_1') - \varphi(z_2), & |z_1| > K, \ |z_2| \leqslant K, \end{cases}$$

де $z_i' = z_iK/|z_i|$, $|z_i'| = K$, $i = 1,2$. Для доведення леми досить показати, що $|z_1' - z_2'| \leqslant\leqslant |z_1 - z_2|$, $|z_1 - z_2'| \leqslant |z_1 - z_2|$ і $|z_1' - z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$. У випадку $z \in \mathbb{R}$ ці нерівності очевидні, а для $z \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, в їхній правильності легко переконатися, якщо врахувати, що для кожної точки z_i, яка є зовні кулі радіуса K ($|z_i| > K$), точка z_i' лежить на поверхні кулі і на відрізку, який з'єднує центр цієї кулі з точкою z_i.

Якщо $|z_i| > K$, тобто точки z_1, z_2 знаходяться зовні кулі, то відстань між такими двома точками, що містяться на фіксованих променях, які виходять з центра кулі, буде найменшою в тому випадку, коли дві прямі, що проходять відповідно через точки z_1, z_2 і z_1', z_2', паралельні. Тоді, очевидно, чотирикутник $z_1z_1'z_2'z_2$ – це трапеція, більша основа якої має довжину $|z_1 - z_2|$, а менша – $|z_1' - z_2'|$, тобто $|z_1' - z_2'| \leqslant |z_1 - z_2|$.

Якщо $|z_1| \leqslant K$, а $|z_2| > K$, то $|z_1 - z_2'| \leqslant |z_1 - z_2|$, оскільки в трикутнику $z_1z_2'z_2$ сторона z_1z_2 завжди лежить проти тупого кута, а сторона z_1z_2' – проти гострого. Лему доведено.

Теорема 8. *Нехай $f \in C_n(I \times \mathbb{R}^{3n})$, функція $f(t,x,y,z)$ задовольняє одну з умов (25) і умову Ліпшиця стосовно змінної z із сталою Ліпшиця L, $0 < L < 1$. Припустимо, що існують додатні функції p, q, $r \in C(I)$, такі, що*

$$\begin{gathered} \big(x, f(t,0,0,z) - f(t,0,0,0)\big) \geqslant -p(t)|x|, \\ \big(x, f(t,0,y,z) - f(t,0,0,z)\big) \geqslant -q(t)|x|, \\ \big(x, f(t,x,y,z) - f(t,0,y,z)\big) \geqslant -r(t)|x|, \quad \forall (t,x,y,z) \in I \times \mathbb{R}^{3n}. \end{gathered} \tag{29}$$

Тоді розв'язок задачі (3), (24), де A, B – додатно визначені матриці, існує.

Доведення. Нехай $u(t)$, $t \in I$ є розв'язок задачі

$$u'' = -p(t) - q(t) - r(t) - |f(t,0,0,0)|, \quad u(a) = u(b) = 0.$$

Очевидно, що $u(t)$ має один додатний максимум, так що $u(t) > 0$ $\forall t \in (a, b)$.

Оскільки A, B – додатно визначені матриці, то обернені до них матриці A^{-1}, B^{-1} – також додатно визначені. Тому квадратичні форми $\big(x, A^{-1}(x - c)\big)$ і $\big(x, B^{-1}(x - d)\big)$ додатно визначені.

Виберемо сталу $M_a > 0$ так, щоб для $|x| > M_a$ виконувалась нерівність

$$\big(x, A^{-1}(x - c)\big)/|x| - u'(a) > 0. \tag{30}$$

Аналогічно через $M_b > 0$ позначимо сталу таку, щоб при $|x| > M_b$ було

$$\big(x, B^{-1}(x - d)\big)/|x| + u'(b) > 0. \tag{31}$$

Нехай $M = M_a + M_b + \max\limits_{t\in I} u(t)$, а N і K – сталі, які відповідають числу M за лемою 1. Для чисел M, N і K визначимо функцію

$$F(t, x, x', x'') = f\big(t, x\sigma(|x|/M), x'\sigma(|x'|/N), x''\sigma(|x''|/K)\big).$$

Оскільки F неперервна, обмежена для $(t, x, x', x'') \in I \times \mathbb{R}^{3n}$ і згідно з лемою 2 задовольняє умову Ліпшиця стосовно x'' із сталою $0 < L < 1$, то з теореми 7 випливає, що рівняння $x'' = F(t, x, x', x'')$ має розв'язок, який задовольняє умови (24). Позначимо його через $x(t)$. Легко бачити, що F задовольняє умови (29) теореми 8 і ту з умов (25) леми 1, яку задовольняє функція f.

Доведемо, що

$$|x(t)| \leqslant M \quad \forall t \in I. \tag{32}$$

Для цього візьмемо функцію

$$v(t) = \sqrt{\big(x(t), x(t)\big)} - u(t). \tag{33}$$

Двічі диференціюючи, одержимо

$$v'(t) = \frac{\big(x(t), x'(t)\big)}{\sqrt{\big(x(t), x(t)\big)}} - u'(t), \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
v''(t) &= \frac{\big(x(t), x''(t)\big) + x'^2(t)}{\sqrt{\big(x(t), x(t)\big)}} - \frac{\big(x(t), x'(t)\big)^2}{\big(\sqrt{x^2(t)}\big)^3} - u''(t) = \\
&= \left[\frac{\big(x(t), F(t,0,0,0)\big)}{|x(t)|} + |F(t,0,0,0)|\right] + \\
&= \left[\frac{\big(x(t), F(t, x(t), x'(t), x''(t)) - F(t, 0, x'(t), x''(t))\big)}{|x(t)|} + r(t)\right] + \\
&= \left[\frac{\big(x(t), F(t, 0, x'(t), x''(t)) - F(t, 0, 0, x''(t))\big)}{|x(t)|} + q(t)\right] + \\
&= \left[\frac{\big(x(t), F(t, 0, 0, x''(t)) - F(t, 0, 0, 0)\big)}{|x(t)|} + p(t)\right] + \\
&\quad + \left[\frac{|x'(t)|^2}{|x(t)|} - \frac{\big(x(t), x'(t)\big)^2}{|x(t)|^3}\right].
\end{aligned} \tag{35}$$

Оскільки кожна квадратна дужка в (35) невід'ємна, то $v''(t) \geqslant 0$, тому функція $v(t)$ не може мати додатних максимумів.

Покажемо тепер, що

$$v(a) \leqslant M_a + M_b. \tag{36}$$

Припускаючи протилежне, з (33) знайдемо, що $|x(a)| > M_a$, а з (34) при $t = a$ і крайових умов (24) одержимо

$$v'(a) = \big(x(a), A^{-1}(x(a) - c)\big)/|x(a)| - u'(a) > 0$$

(останнє з (30)). Оскільки $v''(t) \geqslant 0$, то $v'(t) > 0$ $\forall t \in I$ і, отже, $v(b) > M_a + M_b$. Але це можливе лише, якщо $|x(b)| > M_b$. Тепер з (34) при $t = b$ і крайових умов (24), враховуючи (31), одержимо, що

$$v'(b) = -\big(x(b), B^{-1}(x(b) - d)\big)/|x(b)| - u'(b) < 0.$$

Але це суперечить одержаній нерівності $v'(t) > 0$ $\forall t \in I$. Отже, нерівність (36) доведена. Аналогічно доводиться нерівність

$$v(b) \leqslant M_a + M_b. \tag{37}$$

Оскільки функція $v(t)$ не може мати додатних максимумів, то з (36) і (37) випливає, що

$$v(t) \leqslant M_a + M_b \quad \forall t \in I. \tag{38}$$

З (33) і (38) і означення числа M отримуємо нерівність (32), а з леми 1 випливають оцінки (26), при виконанні яких $F \equiv f$, тому $x(t)$ є розв'язок задачі (3), (24). Отже, теорему 8 доведено.

6. Приклад виконання умов теореми 8. Розглянемо крайову задачу (3), (24) у випадку $n = 1$. Покажемо, що функція

$$f(t, x, y, z) = \frac{xy^2}{(x^2+1)(y^2+1)} \ln\big(|z| + \sqrt{z^2+\lambda}\big), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 1,$$

задана і неперервна для $(t, x, y, z) \in I \times \mathbb{R}^3$, задовольняє умови теореми 8.

Оскільки

$$f(t,0,0,z) - f(t,0,0,0) = f(t,0,y,z) - f(t,0,0,z) \equiv 0,$$

$$x\big(f(t,x,y,z) - f(t,0,y,z)\big) = \frac{x^2y^2}{(x^2+1)(y^2+1)} \ln\big(|z| + \sqrt{z^2+\lambda}\big) \geqslant 0$$

для всіх $(t, x, y, z) \in I \times \mathbb{R}^3$, то умови (29) виконуються.

Для всіх $z \in \mathbb{R}$ при $\lambda > 1$ виконується оцінка

$$|z| + \sqrt{z^2+\lambda} = \sqrt{\lambda}\left(\frac{|z|}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\frac{z^2}{\lambda} + 1}\right) \leqslant \sqrt{\lambda}\big(|z| + \sqrt{z^2+1}\big),$$

з якої випливає, що $\ln\big(|z| + \sqrt{z^2+\lambda}\big) \leqslant \ln\sqrt{\lambda} + \ln\big(|z| + \sqrt{z^2+1}\big)$. Тому $|f(t,x,y,z)| \leqslant\leqslant \ln\sqrt{\lambda}\big(1 + |z|\beta(|z|)\big)$, де $\beta(s) = \ln(s + \sqrt{s^2+1})/(s\ln\sqrt{\lambda})$, так що функція $s\beta(s)$ зростає для всіх додатних s, $\beta(s) > 0$ $(0 \leqslant s < \infty)$ і $\beta(s) \to 0$ при $s \to \infty$, тобто виконується третя з умов (25).

Оскільки $|\partial f/\partial z| < 1/\sqrt{z^2+\lambda} < 1$ як для $z < 0$, так і для $z > 0$, то умова Ліпшиця $|f(t,x,y,z_1) - f(t,x,y,z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|$, $0 < L < 1$ виконується для z_1,

$z_2 > 0$ і для z_1, $z_2 < 0$. Якщо ж $z_1 > 0$, а $z_2 < 0$, то, позначивши $-z_2 = \tilde{z}_2 > 0$, одержимо

$$|f(t,x,y,z_1) - f(t,x,y,z_2)| = |f(t,x,y,z_1) - f(t,x,y,\tilde{z}_2)| \leqslant L|z_1 - \tilde{z}_2| < L|z_1 - z_2|.$$

Умову Ліпшиця для випадку $z_1 > 0$, $z_2 = 0$ одержимо, переходячи до границі при $\varepsilon \to +0$ в лівій частині нерівності

$$|f(t,x,y,z_1) - f(t,x,y,\varepsilon)| \leqslant L|z_1 - \varepsilon| < L|z_1 - 0|.$$

---

1. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., 1970.
2. *Бернштейн С.Н.* Собрание сочинений. – М., 1960. – Т.3.
3. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., 1954. – Т.2.
4. *Гудков В. В., Клоков Ю.А., Лепин А.Я., Пономарев В.Д.* Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Рига, 1973.
5. *Васильев Н.И., Клоков Ю.А.* Основы теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Рига, 1978.
6. *Лепин А. Я., Лепин Л.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. – Рига, 1988.
7. *Король І.І.* Чисельно-аналітичні методи дослідження розв'язків двоточкових крайових задач з параметрами: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Ужгород, 1996.
8. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К., 1992.
9. *Шилов Г.Е.* Математический ананлиз (функции нескольких вещественных переменных). – М., 1972.
10. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М., 1965.
11. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1970.

Yu. Zhernovyi

ABOUT SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM AND THE BOUNDARY PROBLEMS FOR THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS PARTIALLY SOLVED WITH RESPECT TO THE HIGHER DERIVATIVE

There are obtained conditions of existence and conditions of existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem for the system $x' = f(t,x,x')$ and the two-point boundary problems for the system $x'' = f(t,x,x',x'')$ with continuous function f and linear boundary conditions.

Стаття надійшла до редколегії 08.09.99