ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.91–93

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.91–93

УДК 517.988.5

Андрій Загороднюк

ПРО ДОДАТНІ ПОЛІНОМИ НА ДІЙСНИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Нехай X – дійсний банахів простір. Нагадаймо, що відображення $P : X \to \mathbb{R}$ називається однорідним (неперервним) поліномом степеня n на X, якщо існує n-лінійне симетричне неперервне відображення на n-ому декартовому степені простору X, $\bar{P} : X \times \cdots \times X \to \mathbb{R}$, таке що $P(x) = \bar{P}(x, \ldots, x)$. Поліномом степеня m на X називається сума n-однорідних поліномів при $n = 0, \ldots, m$ (детальніше див. [1]). Говоритимемо, що однорідний поліном P парного степеня є додатним, якщо $P(X) > 0$ для всякого $x \neq 0$.

Нехай $X^{\otimes k}$ симетричний k-ий проективний тензорний степінь простору X. Позначимо Δ_{n-1} замкнений підпростір простору $\sum_{k=1}^{n-1} X^{\otimes k}$, породжений елементами $\sum_{k=1}^{n-1} \overbrace{\lambda x \otimes \cdots \otimes \lambda x}^{k}$, де $x \in X$ $\lambda \in \mathbb{R}$. Нехай $\widehat{x} := x + \cdots + \overbrace{x \otimes \cdots \otimes x}^{n-1}$.

Твердження 1. *Для всякого n-однорідного полінома P на X, де $n > 1$, існує білінійна форма B_P на Δ_{n-1}, така що $B_P(\widehat{x}, \widehat{x}) = P(x)$.*

Доведення. Приймемо, що

$$B_P(\widehat{x}, \widehat{y}) := \frac{P(x+y) - P(x) - P(y)}{2^n - 2}. \tag{1}$$

Оскільки

$$P(x+y) - P(x) - P(y) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{n-k} \bar{P}(\overbrace{x, \ldots, x}^{k}\overbrace{y, \ldots, y}^{n-k})$$

і кожен доданок у сумі праворуч є білінійною формою на елементах вигляду $\overbrace{x \otimes \cdots \otimes x}^{k}$, $\overbrace{y \otimes \cdots \otimes y}^{n-k}$, то B_P є білінійною формою на просторі Δ_{n-1}. Крім того,

$$B_P(\widehat{x}, \widehat{x}) = \frac{P(2x) - 2P(x)}{2^n - 2} = P(x).$$

Твердження доведено.

Зауважимо, що білінійна форма B на Δ_{n-1} породжує n-однорідний поліном P на X за формулою $P(x) = B(\widehat{x}, \widehat{x})$ тоді й тільки тоді, коли для будь-яких фіксованих $x, h \in X$, функція $f(t) := B(\widehat{x+th}, \widehat{x+th})$ є поліномом від $t \in \mathbb{R}$ степеня не більшого за n і для деякого h є поліномом степеня n.

Скажемо, що вектор x є P-ортогональний до вектора y (при заданому однорідному поліномі P), якщо $P(t_1x + t_2y) = P(t_1x) + P(t_2y)$ для довільних чисел t_1, t_2.

Зв'язок між P-ортогональністю та ортогональністю стосовно білінійної форми B_P доводить таке твердження.

Твердження 2. *Вектор x є P-ортогональний до y тоді й тільки тоді, коли $B_P(\widehat{t_1x}, \widehat{t_2y}) = 0$ для довільних чисел t_1, t_2.*

Доведення. Справді,

$$P(t_1x + t_2y) = (2^n - 2)B_P(\widehat{t_1x}, \widehat{t_2y}) + P(t_1x) + P(t_2y) = P(t_1x) + P(t_2y)$$

для будь-яких чисел t_1, t_2 тоді й тільки тоді, коли $B_P(\widehat{t_1x}, \widehat{t_2y}) \equiv 0$. Твердження доведено.

Властивості банахових просторів, на яких існують додатні поліноми другого або четвертого стененя, досліджували у праці [2].

Якщо у просторі X існує щільна P-ортогональна послідовність і $\operatorname{ess\,ker} P := \{z \in X : P(x + z) = P(x)\ \forall x \in X\} = 0$, то простір X щільно вкладається в простір сумовних у степені n послідовностей ℓ_n. Теорема виявляє деякі властивості додатних поліномів та банахових просторів, на яких існують такі поліноми.

Теорема. *Нехай на сепарабельному просторі X з базисом Шаудера заданий додатний n-однорідний поліном P (парного) степеня $n \geqslant 4$. Припустимо, що множина P-ортогональних векторів щільна в X. Тоді правильні такі твердження.*

(i) Простір Δ_{n-1} розкладається на пряму суму трьох нетривіальних підпросторів U_1, U_2, U_3 таких, що форма B_P додатно визначена на U_1, вироджена на U_2 і від'ємно визначена на U_3.

(ii) На Δ_{n-1} існує підпростір (нескінченновимірний, якщо X нескінченновимірний), який ін'єктивно і щільно вкладається в гільбертів.

(iii) На просторі $\mathcal{P}_{n-1}$ поліномів степеня не більшого за $n-1$ на X існує замкнений підпростір V, такий що $\mathcal{P}_{n-1}/V$ є поповненням операторного образу гільбертового простору.

Доведення. (i). З існування базису в X можна вивести існування базису в Δ_{n-1}, використовуючи техніку [3]. Нехай $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ – базис в Δ_{n-1}. Застосовуючи процедуру ортогоналізації Грама-Шмідта до $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ побудуємо базис $(v_k)_{k=1}^{\infty}$, ортогональний стосовно білінійної форми B_P і такий, що $B_P(\widehat{v}_k, \widehat{v}_k) = \pm 1$ або 0.

Нехай U_1 – замкнена лінійна оболонка таких v_k, що $B_P(\widehat{v}_k, \widehat{v}_k) = 1$. Аналогічно U_2 (відповідно U_3) – замкнена лінійна оболонка таких v_k, що $B_P(v_k, v_k) = 0$ (відповідно -1).

Доведемо, що всі три простори нетривіальні. Нехай $x_1, \ldots, x_m, \ldots$ – P-ортогональна лінійно незалежна послідовність. Оскільки $B_P(\widehat{x}_k, \widehat{x}_k) = P(x_k) > 0$ і $(\widehat{x}_k)$ можна доповнити до ортогонального стосовно B_P базису в Δ_{n-1}, то ми можемо вважати, що простір U_1 вибрано так, щоб $(x_k) \subset U_1$. Отже, простір U_1 є непорожнім. Більше того, $\dim U_1 = \infty$, коли $\dim X = \infty$.

Нехай $i \neq j$. Доведемо, що $\widehat{x_i + x_j} - \widehat{x}_i - \widehat{x}_j \in U_2$. Перевіримо, що для довільного $z \in X$

$$B_P(\widehat{x_i + x_j} - \widehat{x}_i - \widehat{x}_j, \widehat{z}) = 0. \tag{2}$$

Оскільки лінійна оболонка векторів x_k щільна в X, то ми можемо перевірити рівність (2) на елементах вигляду $z = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k$. Справді, за формулою (1)

$$B_P(\widehat{x_i + x_j} - \widehat{x}_i - \widehat{x}_j, \widehat{z}) = \frac{1}{2^n - 2}(P(x_i + x_j + z) - P(z) - P(x_i + z) - P(x_j + z) + 2P(z)) =$$

$$\frac{1}{2^n - 2}(P(x_i + x_j + \sum_{k=1}^{m} a_k x_k) - P(x_i + \sum_{k=1}^{m} a_k x_k) - P(x_j + \sum_{k=1}^{m} a_k x_k) + P(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k)) = 0$$

згідно з P-ортогональністю елементів x_k. Отже, білінійна форма B_P не залежить від підпростору, що є лінійною оболонкою векторів $\widehat{x_i + x_j} - \widehat{x}_i - \widehat{x}_j$. Тому $\widehat{x_i + x_j} - \widehat{x}_i - \widehat{x}_j \in U_2$.

Покажемо тепер, що для кожного x_i існують числа t, λ такі, що $w_i := t\widehat{x}_i + \widehat{\lambda x_i} \in U_3$. З прямих обчислень випливає, що

$$B_P(w_i, w_i) = P(x_i)[t^2 + \frac{2}{2^n - 2}((\lambda + 1)^n - \lambda^n - 1) + \lambda^n]. \tag{3}$$

Оскільки $P(x) > 0$, то вираз (3) може бути від'ємним тоді і тільки тоді, коли дискримінант

$$D(\lambda) = 4\left(\frac{(\lambda + 1)^n - \lambda^n - 1}{2^n - 2}\right)^2 - 4\lambda^n$$

квадратного тричлена $f(t) = t^2 + \frac{2}{2^n - 2}((\lambda + 1)^n - \lambda^n - 1) + \lambda^n$ стосовно t додатний для деякого λ. Легко бачити, що $D(\lambda) > 0$ при $n \geqslant 4$ і при досить великих λ.

(ii). Очевидно, що підпростір U_1 ін'єктивно і щільно вкладається в поповнення U_1 щодо гільбертової норми, яка задається скалярним добутком, що є звуженням B_P на $U_1 \times U_1$.

(iii). Зауважимо, що $\mathcal{P}_{n-1} = (\Delta_{n-1})^*$. Приймемо, що $V = (U_1)^{\perp}$. Тоді $\mathcal{P}_{n-1} = U_1^*$. З пункту *(ii)* цієї теореми випливає існування ін'єктивного оператора $A : U_1 \to H$ зі щільним образом, де H – гільбертів простір. Тоді $A^* : H^* \to U_1^*$ є ін'єктивним оператором зі щільним образом, який задає шукане відображення. Теорему доведено.

---

1. *Dineen S.* Complex Analysis on Locally Convex Spaces. – North Holland, Amsterdam : Math Studies, 57, 1981.
2. *Aron R, Boyd C, Ryan R. A., Zalduendo I.* Zeros of Polynomials on Banach spaces – The Real Story // preprint.
3. *Gelbaum B. R., Gil de Lamadrid J.* Bases of tensor products of Banach spaces // Pacific J. Math. – 1961. – Vol. 11. – P.1281-1286.

A. Zagorodnyuk

ON POSITVE POLYNOMIALS ON REAL BANACH SPACES

Some properties of Banach spases which admist positive polinomials of even degree are investigated.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99