ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.94–98

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.94–98

УДК 517.95

МИКОЛА ІВАНЧОВ

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З НЕВІДОМИМ ВІЛЬНИМ ЧЛЕНОМ

Відомо, що методи дослідження обернених задач суттєво визначаються тим, від яких змінних залежать невідомі параметри задачі – чи від просторових, чи від часу [1-7]. Особливо цікавою є можливість одночасного визначення параметрів задачі, що залежать від різних аргументів [8,9]. У праці вивчено обернену задачу для рівняння теплопровідності, вільний член якого містить дві невідомі функції, залежні від різних аргументів.

В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу для рівняння

$$u_t = u_{xx} + g_0(x,t) + f_1(x)g_1(x,t) + f_2(t)g_2(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

з невідомими функціями $f_1(x)$ і $f_2(t)$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$u(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$u(x,T_0) = \psi(x), \quad x \in [0,h], \ 0 < T_0 \leqslant T. \tag{5}$$

Під розв'язком задачі (1)-(5) розумітимемо сукупність функцій ($f_1(x)$, $f_2(t)$, $u(x,t)$) з класу $H^{\gamma}[0,h] \times H^{\gamma/2}[0,T] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_T), 0 < \gamma < 1$ [10], що задовольняють умови (1)–(5).

Теорема. *Припустимо, що виконуються умови:*

(A1) $\varphi \in H^{2+\gamma}[0,h], \psi \in H^{2+\gamma}[0,h], \mu_i \in H^{(1+\gamma)/2}[0.T], i = 1,2, \mu_3 \in H^{1+\gamma/2}[0.T]$, $g_i \in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_T), 0 < \gamma < 1, i = 0,1,2$;

(A2) $g_2(0,t) \neq 0, t \in [0,T], \ \int\limits_0^{T_0} g_1(x,t)dt \neq 0, \ x \in [0,h]$;

(A3) $\varphi(0) = \mu_3(0), \ \varphi'(0) = \mu_1(0), \ \varphi'(h) = \mu_2(0), \ \mu_3(T_0) = \psi(0), \ \mu_1(T_0) = \psi'(0), \ \mu_2(T_0) = \psi'(h)$.

Тоді при досить малому числі $T_0, 0 < T_0 \leqslant T$, що визначається вихідними даними, існує єдиний розв'язок задачі (1)–(5).

Доведення. Зведемо задачу (1)–(5) до системи інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій $f_1(x), f_2(t)$. Перше рівняння системи знаходимо, інтегруючи рівняння (1) за t від 0 до T_0 і використовуючи умову перевизначення (5) і початкову умову (2), а друге рівняння – приймаючи в (1) $x = 0$ і враховуючи умову (4). Внаслідок цього приходимо до системи рівнянь

$$f_1(x) = \frac{\psi(x) - \varphi(x) - \int\limits_0^{T_0} g_0(x,t)dt - \int\limits_0^{T_0} u_{xx}(x,t)dt - \int\limits_0^{T_0} f_2(t)g_2(x,t)dt}{\int\limits_0^{T_0} g_1(x,t)dt}, \quad x \in [0,h], \tag{6}$$

$$f_2(t) = \frac{\mu_3'(t) - g_0(0,t) - f_1(0)g_1(0,t) - u_{xx}(0,t)}{g_2(0,t)}, \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

в якій $u(x,t)$ – розв'язок прямої задачі (1)–(3) при відомих функціях $(f_1(x), f_2(t)) \in H^\gamma[0,h] \times H^{\gamma/2}[0,T]$. Для знаходження $u(x,t)$ використаємо функцію Гріна $G(x,t,\xi,\tau)$ задачі (1)–(3)

$$G(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(t-\tau)} \right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(t-\tau)} \right) \right).$$

Тоді

$$u(x,t) = \int\limits_0^h G(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi - \int\limits_0^t G(x,t,0,\tau)\mu_1(\tau)d\tau + \int\limits_0^t G(x,t,h,\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \tag{8}$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G(x,t,\xi,\tau)g_0(\xi,\tau)d\xi d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G(x,t,\xi,\tau)(f_1(\xi)g_1(\xi,\tau) + f_2(\tau)g_2(\xi,\tau))d\xi d\tau.$$

Враховуючи з формули (8) та інтегруючи частинами з використанням очевидних співвідношень

$$G_{xx}(x,t,\xi,\tau) = G_{\xi\xi}(x,t,\xi,\tau) = -G_\tau(x,t,\xi,\tau),$$

знаходимо

$$u_{xx}(x,t) = \int\limits_0^h G(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi - \int\limits_0^t G(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t G(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{xx}(x,t,\xi,\tau)g_0(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{xx}(x,t,\xi,\tau)(f_1(\xi)g_1(\xi,\tau) + f_2(\tau)g_2(\xi,\tau))d\xi d\tau. \tag{9}$$

Підставляючи (9) в (6) і (7), приходимо до системи інтегральних рівнянь

$$f_1(x) = f_{01}(x) - \frac{1}{\int\limits_0^{T_0} g_1(x,t)dt} \int\limits_0^{T_0} dt \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{xx}(x,t,\xi,\tau)(f_1(\xi)g_1(\xi,\tau)+$$

$$+f_2(\tau)g_2(\xi,\tau))d\xi d\tau - \frac{1}{\int\limits_0^{T_0} g_1(x,t)dt} \int\limits_0^{T_0} f_2(t)g_2(x,t)dt, \quad x \in [0,h], \tag{10}$$

$$f_2(t) = f_{02}(t) - \frac{g_1(0,t)}{g_2(0,t)} f_1(0) - \frac{1}{g_2(0,t)} \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{xx}(0,t,\xi,\tau)(f_1(\xi)g_1(\xi,\tau)+$$

$$+f_2(\tau)g_2(\xi,\tau))d\xi d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{11}$$

з відомими функціями $f_{01}(x), f_{02}(t)$, в якій перше рівняння є рівнянням Фредгольма, а друге – рівнянням Вольтерри.

Покажемо, що при досить малому $T_0, 0 < T_0 \leqslant T$, однорідне рівняння Фредгольма

$$f(x) = -\frac{1}{\int\limits_0^{T_0} g_1(x,t)dt} \int\limits_0^{T_0} dt \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{xx}(x,t,\xi,\tau) f(\xi) g_1(\xi,\tau) d\xi d\tau, \quad x \in [0,h], \tag{12}$$

має тільки тривіальний розв'язок $f(x) \equiv 0$.

З вигляду функції Гріна легко визначити оцінку

$$|G_{xx}(x,t,\xi,\tau)| \leqslant C_1 + \frac{C_2}{(t-\tau)^{3/2}}, \quad x,\xi \in [0,h],\ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \tag{13}$$

з відомими сталими $C_i > 0, i = 1,2$. Застосовуючи її до рівняння (12), одержуємо нерівність

$$|f(x)| \leqslant C_3\sqrt{T_0} \int\limits_0^h |f(\xi)| d\xi, \tag{14}$$

в якій стала $C_3 > 0$ очевидно виражається через відомі величини та сталі C_1, C_2. Інтегруючи (14) від 0 до h і вважаючи $0 < T_0 \leqslant T$ настільки малим, що $C_3 h\sqrt{T_0} < 1$, отримуємо $f(x) \equiv 0$. Це означає, що для рівняння (12), а, отже, і рівняння (10) виконується перший випадок альтернативи Фредгольма – існування єдиного розв'язку. Подамо розв'язок рівняння (10) за допомогою резольвенти $R(x,\eta)$:

$$f_1(x) = \int\limits_0^h R(x,\eta) \left(f_{01}(\eta) - \frac{1}{\int\limits_0^{T_0} g_1(\eta,t)dt} \int\limits_0^{T_0} f_2(t) g_2(\eta,t) dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\int\limits_0^{T_0} g_1(\eta,t)dt} \int\limits_0^{T_0} dt \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{\eta\eta}(\eta,t,\xi,\tau) f_2(\tau) g_2(\xi,\tau) d\xi d\tau \right) d\eta, \quad x \in [0,h]. \tag{15}$$

Зауважимо, що з оцінки (13) випливає неперервність ядра інтегрального рівняння (12), а тому його резольвента $R(x,\eta)$ є неперервною функцією при $x,\xi \in [0,h]$.

Підставляючи (15) в (11), приходимо до інтегрального рівняння стосовно невідомої функції $f_2(t)$:

$$f_2(t) = \tilde{f}_{02}(t) + \int_0^{T_0} K_1(t,\tau) f_2(\tau) d\tau + \int_0^t K_2(t,\tau) f_2(\tau) d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{16}$$

в якому $\tilde{f}_{02}(t)$ – відома функція з класу $H^{\gamma/2}[0,T]$, ядро $K_1(t,\tau)$ очевидно виражається через відомі функції і належить до класу $H^{\gamma/2}[0,T] \times [0,T_0]$, а для ядра

$$K_2(t,\tau) = -\frac{1}{g_2(0,t)} \int_0^h G_{xx}(0,t,\xi,\tau) g_2(\xi,\tau) d\xi \tag{17}$$

є оцінка [11]

$$|K_2(t,\tau)| \leqslant \frac{C_4}{(t-\tau)^{\gamma/2}}. \tag{18}$$

Застосовуючи до рівняння (16) метод послідовних наближень, легко доводимо існування єдиного неперервного розв'язку цього рівняння на деякому проміжку $[0,T_1]$, де число $T_1, 0 < T_1 \leqslant T$ визначається відомими величинами. Крім того, з умов теореми і властивостей теплових об'ємних потенціалів [11] випливає, що $f_2(t) \in H^{\gamma/2}[0,T_1]$. Вважаючи число $T_0 > 0$ настільки малим, що $T_0 \leqslant T_1$, і підставляючи $f_2(t)$ в (15), одержуємо $f_1(x) \in H^{\gamma}[0,h]$. Отже, при $x \in [0,h], t \in [0,T_1]$ доведено існування єдиного розв'язку системи рівнянь (10), (11).

Покажемо, що розв'язок оберненої задачі (1)–(5) існує на всьому проміжку часу $[0,T]$. Як видно з попереднього при досить малому T_0 однозначно визначається невідома функція $f_1(x)$. Підставляючи її в рівняння (1), обернену задачу (1)–(5) з невідомими функціями $(f_1(x), f_2(t), u(x,t))$ зводимо до оберненої задачі (1)–(4) з невідомими $(f_2(t), u(x,t))$, яка еквівалентна інтегральному рівнянню Вольтерра другого роду

$$f_2(t) = F_2(t) - \frac{1}{g_2(0,t)} \int_0^t \int_0^h G_{xx}(0,t,\xi,\tau) g_2(\xi,\tau) f_2(\tau) d\xi d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{19}$$

де $F_2(t) \in H^{\gamma/2}[0,T]$ – відома функція. Враховуючи (17), (18), доводимо існування єдиного розв'язку $f_2(t) \in H^{\gamma/2}[0,T]$, а звідси – і єдиного розв'язку $(f_2(t), u(x,t))$ задачі (1)–(4) з класу $H^{\gamma/2}[0,T] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_T)$. Тоді сукупність знайдених функцій $(f_1(x), f_2(t), u(x,t))$ утворює єдиний розв'язок оберненої задачі (1)–(5). Теорему доведено.

Зауважимо, що доведена теорема може бути використана при дослідженні єдиності розв'язку обернених задач для параболічного рівняння з двома невідомими коефіцієнтами, що залежать від різних аргументів [8].

1. *Прилепко А.И., Костин А.Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. I// Сиб. мат. журн. – 1992. – Т. 33. – N 3. – С. 146–155.

2. *Прилепко А.И., Костин А.Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II// Сиб. мат. журн. – 1993. – Т. 34. – N 5. – С. 147–162.

3. *Прилепко А.И., Соловьев В.В.* Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. II// Дифференциальные уравнения – 1987. – Т. 23. – N 11. – С. 1971–1980.

4. *Прилепко А.И., Соловьев В.В.* Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. I// Дифференциальные уравнения – 1987. – Т. 23. – N 10. – С. 1791–1799.

5. *Majchrowski M.* On inverse problem with nonlocal condition for parabolic systems of partial differential equations and pseudoparabolic equations// Demonstr. Math. – 1993. – Vol. 26. – N 1. – P. 255–275.

6. *Іванчов М.І.* Обернена задача визначення потужності джерел тепла для параболічного рівняння при довільних крайових умовах// Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – Вип. 40. – N 1. – С. 125–129.

7. *Смирнов Г.П., Фатыхов М.А.* О задаче определения правой части уравнения теплопроводности// Дифференциальные уравнения – 1988. – Т. 24. – N 4. – С. 711–716.

8. *Ivantchov M.I.* Détermination simultanée de deux coefficients aux variables diverses dans une équation parabolique// Мат. студії. – 1998. – Т.10. – N 2. – С. 173–187

9. *Саватеев Е.Г.* О задаче идентификации коэффициента в параболическом уравнении// Сиб. мат. журн. – 1995. – Т. 36. – N 1. – С. 177–185.

10. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М., 1968.

M. Ivanchov

AN INVERSE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION WITH THE UNKNOWN FREE TERM

Existence and uniqueness conditions for solution of the inverse problem for finding of the free term $f(x,t) = g_0(x,t) + f_1(x)g_1(x,t) + f_2(t)g_2(x,t)$ in the one-dimensional nonhomogeneous heat equation with unknown functions $f_1(x), f_2(t)$ are established.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99