УДК 517.956.4

Богдан Копитко, Жаннета Цаповська

МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ У ПАРАБОЛІЧНІЙ КРАЙОВІЙ ЗАДАЧІ З ГРАНИЧНОЮ УМОВОЮ ВЕНТЦЕЛЯ

У праці методом теорії потенціалів доведено теорему про існування (у просторі Гельдера) розв'язку параболічної крайової задачі з граничним параболічним оператором, заданим на гладкій елементарній бічній межі напівобмеженої нециліндричної області.

Задачі з крайовим оператором другого порядку еліптичного та параболічного типів для лінійних параболічних рівнянь другого порядку виникають, зокрема, в теорії випадкових процесів при дослідженні поведінки дифузійного процесу в області з межею (див., наприклад, [5, 8, 10]). У цьому випадку дифузія звично описується оператором другого порядку з крайовим оператором такого ж порядку і типу. Загальний вигляд крайових умов для багатовимірних дифузійних процесів знайшов О.Д. Вентцель [4]. Часткові випадки таких задач вивчалися з використанням методів теорії потенціалів у [8, 10]. За допомогою інших методів параболічні крайові задачі з граничною умовою Вентцеля у найбільш загальних постановках (проте лише для випадку гладких обмежених циліндричних областей) досліджувалися в працях [1, 3, 6].

1. **Основні позначення та деякі означення.** Нехай R^n, $n \geqslant 2$, – n-вимірний евклідів простір; $R_T^{n+1} = R^n \times (0,T)$, $T > 0$ фіксоване; $R_T^n = R^{n-1} \times (0,T)$; $x = (x', x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ – точка в R^n; $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ – точка в R^{n-1}; $(x,t) = (x', x_n, t)$ – точка в R_T^{n+1}; (x',t) – точка в R_T^n; $|x|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$; $|x'|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2$.

Введемо позначення для операторів диференціювання: D_t^r і D_x^s – символи частинної похідної за t з порядком r і будь-якої частинної похідної за x з порядком s, де r і s – цілі, невід'ємні числа; $D_t^1 = D_t$, $D_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $D_{ij} = D_{ji} \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = 1,...,n$, $\nabla' = (D_1, \dots, D_{n-1})$.

Так само, як в [9, с.16] $H_{x,\ t}^{k+\lambda,(k+\lambda)/2}(\overline{B}) \equiv H^{k+\lambda,(k+\lambda)/2}(\overline{B})$ ($k = 0,1,2$, B – область евклідового простору, $\overline{B}$ – замикання області B) означають відповідні функціональні простори Гельдера; $\underset{0}{H}{}^{k+\lambda,(k+\lambda)/2}(\overline{B})$ – множина функцій з $H^{k+\lambda,(k+\lambda)/2}(\overline{B})$, які (у випадку $k = 2$ разом з похідними за t) збігаються з нулем при $t = 0$. Через $||w||_{H^{k+\lambda,(k+\lambda)/2}(\overline{B})}$ позначається норма функції w в $H^{k+\lambda,(k+\lambda)/2}(\overline{B})$.

Розглянемо в $\overline{R}_T^{n+1}$ область $\Omega = \{(x,t) \in R_T^{n+1} \,|\, x_n > g(x',t)\}$ з нижньою основою D_0 на гіперплощині $\{t = 0\}$, верхньою основою D_T на гіперплощині

$\{t = T\}$ та елементарною бічною межею $\Sigma = \{(x,t) \in \overline{R}_T^{n+1} \mid x_n = g(x',t)\}$, де

$$g \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{R}_T^n). \tag{1}$$

Умова (1) означає, що n-вимірна поверхня Σ належить до класу Гельдера $H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}$ ([9, с.19]).

Будемо використовувати також позначення: $\Omega_\tau = \Omega \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in (0,T)$, $\Omega_0 = D_0$, $\Omega_T = D_T$; $S_\tau = \Sigma \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $N(\xi,\tau) = (N_1(\xi,\tau),\ldots,N_n(\xi,\tau))$ – орт внутрішньої (по відношенню до перерізу Ω_τ) нормалі до S_τ у точці $(\xi,\tau) \in S_\tau$; ∂_{ij} $(i,j = 1,\ldots,n)$ – тангенціальний диференціальний оператор другого порядку на Σ, тобто $\partial_{ij} = \partial_{ji} = \sum\limits_{k,l=1}^{n} C_{ik}C_{jl}D_{kl}$, де $C_{ik} = \delta_{ik} - N_iN_k$, δ_{ik} – символ Кронеккера. Значення кожної функції $w(x,t)$ на Σ позначатимемо $\overline{w}(x',t)$. Всюди нижче C, c – додатні сталі, які не залежать від (x,t), конкретні величини яких нас цікавити не будуть.

2. **Параболічні потенціали. Регуляризатор.** У шарі R_T^{n+1} розглянемо рівномірно параболічний оператор другого порядку з дійсними коефіцієнтами

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)D_iu + a_0(x,t)u - D_tu, \quad (x,t) \in R_T^{n+1}. \tag{2}$$

Припускаємо, що коефіцієнти оператора L визначені в $\overline{R}_T^{n+1}$ і виконані умови:

A1) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \delta_0|\xi|^2$, $a_{ij} = a_{ji}$, $\delta_0 > 0$, $\forall(x,t) \in \overline{R}_T^{n+1}$, $\forall\xi \in R^n$;

A2) a_{ij}, a_i, $a_0 \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}_T^{n+1})$, $i,j = 1,\ldots,n$.

Умови A1), A2) забезпечують існування звичайного фундаментального розв'язку (ф.р.) $G(x,t;\xi,\tau)$ для оператора L (див. формулу (11.13) в [9, с.409]):

$$G(x,t;\xi,\tau) = G_{0,n}^{(\xi,\tau)}(x-\xi,t-\tau) + G_1(x,t;\xi,\tau),\ (x,t) \in \overline{R}_T^{n+1},\ (\xi,\tau) \in \overline{R}_T^{n+1}, \tag{3}$$

де

$$G_{0,n}^{(\xi,\tau)}(x-\xi,t-\tau) = G_{0,n}^{(\xi,\tau)}(x'-\xi',x_n-\xi_n,t-\tau) = (2\sqrt{\pi})^{-n}(\det A(\xi,\tau))^{-\frac{1}{2}} \times$$
$$\times (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{4(t-\tau)}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\xi,\tau)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)\right\}, \quad t > \tau, \tag{4}$$

$A(\xi,\tau) = (a_{ij}(\xi,\tau))_{i,j=1}^{n}$, $a^{ij}(\xi,\tau)$, $i,j = 1,\ldots,n$ – елементи матриці $A^{-1}(\xi,\tau)$, оберненої до матриці $A(\xi,\tau)$, G_1 – інтегральний член, який має більш "слабку" особливість, ніж $G_{0,n}^{(\xi,\tau)}$ при $t \to \tau + 0$ і $G \equiv 0$, якщо $t \leqslant \tau$. До того ж існують такі додатні сталі C і c, що для функцій G і G_1 при $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $x,\xi \in R^n$ є правильними оцінки

$$|D_t^rD_x^sG(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s}{2}} \exp\left\{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\},\ 2r+s \leqslant 2, \tag{5}$$

$$|D_t^rD_x^sG_1(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s-\lambda}{2}} \exp\left\{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\},\ 2r+s \leqslant 2. \tag{6}$$

Розглядатимемо інтеграл – параболічний потенціал простого шару:

$$u_1(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{S_\tau} G(x,t;\xi,\tau)V(\xi,\tau)\,d\sigma_\xi(\tau), \quad (x,t) \in R_T^{n+1}, \tag{7}$$

де $d\sigma_\xi(\tau)$ – елемент поверхні Σ у перерізі $\{t=\tau\}$, V – задана на Σ обмежена вимірна функція. Як наслідок з оцінок (5), (6), функція u_1 неперервна в $\overline{R}_T^{n+1}$, задовольняє рівняння $Lu_1 = 0$ в $R_T^{n+1}\backslash\Sigma$ і нульову початкову умову $u_1(x,0)=0$.

Нехай для $(x,t)\in\Sigma$ визначений вектор $\nu(x,t) = (\nu_1(x,t),\ldots,\nu_n(x,t))$, $\nu_i(x,t) = \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}(x,t)N_j(x,t)$, $i=1,\ldots,n$, який має назву конормалі. Тоді, якщо $V \in \underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$, то $u_1 \in \underset{0}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\Omega})$ (див. [2; 11, с.36]), і для конормальної похідної функції u_1 правильна формула (стрибка) ([9, с.459; 2])

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial\nu(x,t)} = \lim_{\substack{(\overline{x},\overline{t})\to(x,t)\\(\overline{x},\overline{t})\in\Omega}} \frac{\partial u_1(\overline{x},\overline{t})}{\partial\nu(x,t)} = -\frac{1}{2}V(x,t) +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{S_\tau}\frac{\partial G(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu(x,t)}V(\xi,\tau)d\sigma_\xi(\tau), \quad (x,t)\in\Sigma. \tag{8}$$

Інтеграл у правій частині (8) називається прямим значенням конормальної похідної потенціалу простого шару. Його існування випливає з нерівності ($(x,t)\in\Sigma\cap\{0<t\leqslant T\}$, $(\xi,\tau)\in S_\tau$, $\tau<t$)

$$\left|\frac{\partial G(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu(x,t)}\right| \leqslant C(t-\tau)^{-\frac{n+1-\lambda}{2}}\exp\left\{-c\,\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}. \tag{9}$$

Далі, враховуючи (1), потенціал u_1 можна подати у вигляді

$$u_1(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} G(x,t;\xi,\tau)|_{\xi_n=g(\xi',\tau)}\hat{V}(\xi',\tau)\,d\xi', \quad (x,t)\in R_T^{n+1}, \tag{10}$$

де приймемо, що $\hat{V}(\xi',\tau) = \overline{V}(\xi',\tau)(1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(D_i g(\xi',\tau))^2)^{1/2}$.

При цьому в інтегралі (10) для фундаментального розв'язку (ф.р.) G використовуватимемо зображення:

$$G(x,t;\xi,\tau)|_{\xi_n=g(\xi',\tau)} = \tilde{G}_{0,n}^{(\xi',\tau)}(x'-\xi',x_n-g(x',t),t-\tau) +$$

$$+\tilde{G}_{0,n}^{(\xi',\tau)}(x'-\xi',x_n-g(x',t),t-\tau)\left[\exp\left\{-\frac{R(x',t;\xi',\tau)}{4(t-\tau)}\right\}-1\right] +$$

$$+G_1(x,t;\xi,\tau)|_{\xi_n=g(\xi',\tau)}, \quad (x,t)\in R_T^{n+1}, \quad (\xi',\tau)\in R_T^n, \quad t>\tau, \tag{11}$$

де

$$\tilde{G}_{0,n}^{(\xi',\tau)}(x'-\xi',x_n-g(x',t),t-\tau) = (2\sqrt{\pi})^{-n}(\det\tilde{A}_n(\xi',\tau))^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{4(t-\tau)}\sum_{i,j=1}^n\tilde{a}^{ij}(\xi',\tau)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)\right\}\Bigg|_{x_n-\xi_n=x_n-g(x',t)}, \tag{12}$$

$$\tilde{a}^{ij} = \tilde{a}^{ji} = \overline{a}^{ij} + \overline{a}^{nj} D_i g + \overline{a}^{in} D_j g + \overline{a}^{nn} D_i g D_j g, \qquad i,j = 1,\dots,n-1, \tag{13}$$

$$\tilde{a}^{in} = \tilde{a}^{ni} = \overline{a}^{in} + \overline{a}^{nn} D_i g, \quad i = 1,\dots,n-1, \quad \tilde{a}^{nn} = \overline{a}^{nn},$$

$$\tilde{A}_n = (\tilde{a}^{ij})_{i,j=1}^n, \qquad \det \tilde{A}_n = \det \overline{A}^{-1},$$

$$R(x,t;\xi',\tau) = 2\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}^{in}(\xi',\tau)(x_i - \xi_i)(g(x',t) - g(\xi',\tau) - \\ - (\nabla' g(\xi',\tau), x' - \xi'))|_{x_n - \xi_n = x_n - g(x',t)} + \\ + \tilde{a}^{nn}(\xi',\tau)(g(x',t) - g(\xi',\tau) - (\nabla' g(\xi',\tau), x' - \xi'))^2.$$

Для того щоб обґрунтувати правильність рівності (11), достатньо зауважити, що квадратичну форму, яка входить у експоненту в (4), можна записати у вигляді

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\xi,\tau)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)\Big|_{\xi_n = g(\xi',\tau)} = \sum_{i,j=1}^{n-1} \overline{a}^{ij}(\xi',\tau)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j) + \\ + 2\sum_{i=1}^{n-1} \overline{a}^{in}(\xi',\tau)(x_i - \xi_i)[(x_n - g(x',t) + (\nabla' g(\xi',\tau), x' - \xi') + (g(x',t) - g(\xi',\tau) - \\ - (\nabla' g(\xi',\tau), x' - \xi'))] + \overline{a}^{nn}(\xi',\tau)[(x_n - g(x',t) + (\nabla' g(\xi',\tau), x' - \xi') + (g(x',t) - \\ - g(\xi',\tau) - (\nabla' g(\xi',\tau), x' - \xi'))]^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}^{ij}(\xi',\tau)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)\Big|_{x_n - \xi_n = x_n - g(x',t)} + \\ + R(x,t;\xi',\tau).$$

До того ж легко перевірити, що матриці $\overline{A}^{-1}$ та $\tilde{A}_n$ пов'язані між собою співвідношенням

$$\tilde{A}_n = T' \overline{A}^{-1} T, \tag{14}$$

де $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$, $t_{ii} = 1$, $i = 1,\dots,n$, $t_{ij} = 0$, $i \neq j$, $i \neq n$, $t_{nj} = D_j g$, $j = 1,\dots,n-1$, T' – матриця, транспонована до матриці T. З (1), (14) та властивостей матриці $\overline{A}^{-1}$ випливає, що $\det \tilde{A}_n = \det \overline{A}^{-1}$, і для елементів матриці $\tilde{A}_n$ з очевидними змінами виконуються умови A1), A2).

Відзначимо також, що для другого доданка у правій частині (11) правильна нерівність (6), у якій замість $x_n - \xi_n$ треба прийняти, що $x_n - g(x',t)$. У цьому неважко переконатися, якщо до $\tilde{G}_{0,n}^{(\xi',\tau)}$ застосувати оцінку (5), беручи до уваги таку очевидну нерівність:

$$\left| \exp\left\{ -\frac{R(x,t;\xi',\tau)}{4(t-\tau)} \right\} - 1 \right| \leqslant \frac{|R(x,t;\xi',\tau)|}{4(t-\tau)}, \\ (x,t) \in R_T^{n+1}, \quad (\xi',\tau) \in R_T^n, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T.$$

Визначимо тепер крайовий оператор $\mathcal{E}$, який потім використаємо як регуляризатор інтегрального рівняння Вольтерри першого роду, еквівалентного у деякому сенсі для сформульованої у п.3 крайової задачі.

Розглянемо в R^n_T параболічний оператор такого вигляду:

$$L_{n-1} \equiv \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}(x',t)D_{ij} - D_t, \quad (x',t) \in R^n_T,$$

коефіцієнти якого h_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n-1$, утворюють матрицю $(n-1)$-го порядку, обернену до матриці $\tilde{A}_{n-1} = (\tilde{a}^{ij})_{i,j=1}^{n-1}$, де $\tilde{a}^{ij}$, $i,j = 1,\ldots,n-1$, визначаються за формулами (13). З відзначених нами властивостей матриці $\tilde{A}_n$, яка входить у формулу (12), випливає, що оператор L_{n-1} – рівномірно параболічний і для нього існує ф.р.

$$H(x',t;\xi',\tau) = H_{0,n-1}^{(\xi',\tau)}(x'-\xi',t-\tau) + H_1(x',t;\xi',\tau), \quad (x',t) \in \overline{R}^n_T, \quad (\xi',\tau) \in \overline{R}^n_T.$$

У цьому зображенні, як і в (3) $H_{0,n-1}^{(\xi',\tau)}$ та H_1 означають відповідно головний та додатковий (інтегральний) члени для ф.р. H. До того ж для функцій H і H_1 при $x',\xi' \in R^{n-1}$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ правильними є оцінки (5), (6), в яких замість n і $|x-\xi|^2$ треба прийняти, що відповідно $n-1$ і $|x'-\xi'|^2$. Серед інших властивостей ф.р. H ми використаємо таку формулу типу згортки ([7; 10, с.71]): для всіх $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $x',\xi' \in R^{n-1}$

$$\int\limits_{R^{n-1}} H(x',t;v',s)H(v',s;\xi',\tau)\,dv' = H(x',t;\xi',\tau). \tag{15}$$

Звернемо ще увагу на зв'язок між функцією

$$\overline{G}(x',t;\xi',\tau) = G(x,t;\xi,\tau)\Big|_{\substack{x_n=g(x',t)\\ \xi_n=g(\xi',\tau)}}$$

та ф.р. $H(x',t;\xi',\tau)$. Використовуючи формулу (11) для G і означення ф.р. H, легко одержати співвідношення

$$\overline{G}(x',t;\xi',\tau) = (4\pi(t-\tau))^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\det\tilde{A}_n(\xi',\tau)}{\det\tilde{A}_{n-1}(\xi',\tau)}\right)^{\frac{1}{2}} \Bigg[H(x',t;\xi',\tau)+$$
$$+H_{0,n-1}^{(\xi',\tau)}(x'-\xi',t-\tau)\left(\exp\left\{-\frac{\overline{R}(x',t;\xi',\tau)}{4(t-\tau)}\right\}-1\right) - H_1(x',t;\xi',\tau)\Bigg]+$$
$$+\overline{G}_1(x',t;\xi',\tau), \quad (x',t)\in\overline{R}^n_T, \quad (\xi',\tau)\in\overline{R}^n_T, \tag{16}$$

і для першого та наступних трьох доданків у (16) правильними є оцінки відповідно (5) та (6).

Нехай функція $\overline{u}_1(x',t)$ визначена за формулою (10), і ψ – функція задана в $\overline{R}^n_T$. Введемо до розгляду інтегро-диференціальний оператор $\mathcal{E}$, який діє за правилом

$$\mathcal{E}(x',t)\,\psi = 2(\pi)^{-\frac{1}{2}} \left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau \int\limits_{R^{n-1}} H(x',\hat{t};\xi',\tau)\psi(\xi',\tau)\,d\xi'\right\}\Bigg|_{\hat{t}=t},$$
$$(x',t)\in R^n_T. \tag{17}$$

З результатів одержаних у працях [2; 11, с.13] випливає, що $\mathcal{E}$ – лінійний обмежений оператор, який діє з $\underset{0}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{R}^n_T)$ в $\underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}^n_T)$, для якого існує обернений оператор $\mathcal{E}^{-1}$. Крім того, $\mathcal{E}$ – регуляризатор у випадку першої крайової задачі [2; 11, с.17], а саме на підставі співвідношень (15), (16) та нерівностей (5), (6) маємо

$$\mathcal{E}(x',t)\overline{u}_1 = \tilde{V}(x',t) + \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} R(x',t;\xi',\tau)\tilde{V}(\xi',\tau)\,d\xi', \quad \forall\, \tilde{V} \in \underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}^n_T), \tag{18}$$

де

$\tilde{V}(x',t) = \left(\dfrac{\det \tilde{A}_n(x',t)}{\det \tilde{A}_{n-1}(x',t)}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{V}(x',t)$, а для ядра R правильна оцінка (9), у правій частині якої вираз $|x-\xi|^2$ треба замінити на вираз $|x'-\xi'|^2$.

За допомогою ф.р. G з (3) можна визначити ще два параболічні потенціали, які застосовують, розв'язуючи задачі Коші для загального параболічного рівняння другого порядку. Це – потенціал Пуассона

$$u_2(x,t) = \int_{R^n} G(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi, \qquad (x,t) \in R^{n+1}_T, \tag{19}$$

і об'ємний потенціал

$$u_3(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{R^n} G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi, \qquad (x,t) \in R^{n+1}_T, \tag{20}$$

де $\varphi(\xi)$, $\xi \in R^n$ і $f(\xi,\tau)$, $(\xi,\tau) \in R^{n+1}_T$ – задані функції. Припускаємо, що φ – обмежена і неперервна в R^n, а $f \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}^{n+1}_T)$. Тоді можна стверджувати (див. [9, р. IV, § 14; 7]), що функції u_i, $i = 2,3$, неперервні в $\overline{R}^{n+1}_T$, задовольняють рівняння $Lu_2 = 0$, $Lu_3 = -f$ в $\overline{R}^{n+1}_T$ і початкові умови $u_2(x,0) = \varphi(x)$, $u_3(x,0) = 0$, $x \in R^n$. Крім того, $u_3 \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{R}^{n+1}_T)$, а у випадку, коли $\varphi \in H^{2+\lambda}(R^n)$, то і $u_2 \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{R}^{n+1}_T)$.

3. Постановка крайової задачі та її розв'язування. Розглянемо оператор L, визначений у (2), і граничний оператор типу Вентцеля [1]

$$L_0 u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\,\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,t)D_i u + \beta_0(x,t)u - D_t u, \quad (x,t) \in \Sigma\backslash S_0. \tag{21}$$

Припускаємо, що коефіцієнти оператора L_0 визначені на Σ і виконані умови:

B1) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \mu_0|\xi|^2$, $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, $\mu_0 > 0$, $\forall(x,t) \in \Sigma$, $\forall\xi \in R^n$, $\xi \perp N(x,t)$;

B2) β_{ij}, β_i, $\beta_0 \in H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$, $i,j = 1,\dots,n$; $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i(x,t)N_i(x,t) \geqslant 0$, $\forall(x,t) \in \Sigma$.

Постановка крайової задачі: шукаємо розв'язок (у класичному сенсі) параболічного рівняння

$$Lu(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{22}$$

що задовольняє початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad (x,0) \in D_0, \tag{23}$$

крайову умову

$$L_0 u(x,t) = \Theta(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma \backslash S_0, \tag{24}$$

при виконанні умови узгодження

$$\sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,0)\, \partial_{ij}\varphi + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,0) D_i\varphi + \beta_0(x,0)\varphi - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,0)\, D_{ij}\varphi -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} a_i(x,0) D_i\varphi - a_0(x,0)\varphi + f(x,0) = \Theta(x,0), \quad (x,0) \in S_0. \tag{25}$$

Основним результатом статті є така теорема.

Теорема. *Нехай коефіцієнти операторів L і L_0 з (2) і (25) задовольняють відповідно умови A1), A2) і B1), B2), елементарна поверхня Σ належить до класу $H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}$, а для функцій f, φ і Θ з (22)-(24) виконуються умови $f \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}_T^{n+1})$, $\varphi \in H^{2+\lambda}(R^n)$, $\Theta \in H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$. Тоді задача (22)-(24) має єдиний розв'язок*

$$u \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega}), \tag{26}$$

для якого виконується умова (25), і є правильною оцінка

$$\|u\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega})} \leqslant C\,[\, \|f\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}_T^{n+1})} + \|\varphi\|_{H^{2+\lambda}(R^n)} + \|\Theta\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)}\,]. \tag{27}$$

Доведення. Шукатимемо розв'язок задачі (22)–(24) у вигляді

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{28}$$

де функції u_1, u_2, u_3 визначаються за формулами відповідно (7), (19) і (20), причому щільність V, яка входить до потенціалу простого шару в (7) – невідома. З властивостей параболічних потенціалів, описаних нами в п.2 випливає, що для будь-якої обмеженої і неперервної функції V, що визначена на Σ, функція u з (28) задовольняє рівняння (22), початкову умову (23) і для u_i, $i = 2,3$, виконується (26). Отже, для розв'язання задачі нам треба підібрати V у такий спосіб, щоб для u виконувалася крайова умова (24), а при виконанні (25) були правильними умова (26) та нерівність (27).

Припустимо a priori, що шукана щільність V з (7) належить до класу $\underset{0}{H}{}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$, і займемося вивченням крайової умови (25). З цією метою введемо таке перетворення змінних:

$$(x,t) \to (\tilde{x},\tilde{t}), \qquad \tilde{x}_i = x_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \qquad \tilde{x}_n = x_n - g(x',t), \qquad \tilde{t} = t.$$

Це перетворення переводить область Ω в область $\Omega_1 = \{(\tilde{x},\tilde{t}) \in R_T^{n+1} \,|\, \tilde{x}_n > 0\}$, а межу Σ в межу $\Sigma_1 = \{(\tilde{x},\tilde{t}) \in R_T^{n+1} \,|\, \tilde{x}_n = 0\}$.

Виразимо тепер крайову умову (25) за допомогою нових змінних. Після нескладних перетворень одержимо рівність

$$\tilde{L}_0 \overline{u} \equiv \sum_{k,l=1}^{n-1} \tilde{\beta}_{kl}(\tilde{x}\,',\tilde{t})\, D_{kl}\overline{u} + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\beta}_k(\tilde{x}\,',\tilde{t}) D_k\overline{u} + \tilde{\beta}_0(\tilde{x}\,',\tilde{t})\overline{u} - D_t\overline{u} =$$

$$= \overline{\Theta}(\tilde{x}\,',\tilde{t}) - \tilde{\beta}_n(\tilde{x}\,',\tilde{t})\, \frac{\partial \overline{u}(\tilde{x}\,',\tilde{t})}{\partial \tilde{\nu}(\tilde{x}\,',\tilde{t})}, \quad (\tilde{x}\,',\tilde{t}) \in R_T^n. \tag{29}$$

Тут через $\tilde{\nu}(\tilde{x}\,',\tilde{t}) = (\tilde{a}_{in}(\tilde{x}\,',\tilde{t}))_{i=1}^{n}$ позначено вектор конормалі до поверхні Σ_1 в точці $(\tilde{x}\,',\tilde{t})$, який віднесений до матриці $\tilde{A}_n^{-1}(\tilde{x}\,',\tilde{t})$, а коефіцієнти $\tilde{\beta}_{kl}$, $k,l = 1,\ldots,n-1$, та $\tilde{\beta}_k$, $k = 1,\ldots,n$, визначаються за формулами

$$\tilde{\beta}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\beta}_{ij}\overline{C}_{ik}\overline{C}_{jl}, \qquad k,l = 1,\ldots,n-1;$$

$$\tilde{\beta}_k = \overline{\beta}_k - \tilde{\beta}_n\tilde{a}_{kn}, \qquad k = 1,\ldots,n-1;$$

$$\tilde{\beta}_n = \tilde{a}_{nn}^{-1}\left[\overline{\beta}_n - \sum_{k=1}^{n-1}\overline{\beta}_k D_k g - \sum_{k,l=1}^{n-1}\tilde{\beta}_{kl}D_{kl}g + D_t g\right]. \tag{30}$$

Щодо функції $\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \tilde{\nu}}$ з (29), то для неї на підставі формул (8) і (10) можна записати співвідношення

$$\frac{\partial \overline{u}\,(\tilde{x}\,',\tilde{t})}{\partial \tilde{\nu}(\tilde{x}\,',\tilde{t})} = \frac{\partial \overline{u}_2(\tilde{x}\,',\tilde{t})}{\partial \tilde{\nu}(\tilde{x}\,',\tilde{t})} + \frac{\partial \overline{u}_3(\tilde{x}\,',\tilde{t})}{\partial \tilde{\nu}(\tilde{x}\,',\tilde{t})} - \frac{1}{2}\hat{V}(\tilde{x}\,',\tilde{t}) +$$

$$+ \int_0^{\tilde{t}} d\tau \int_{R^{n-1}} \frac{\partial \overline{G}(\tilde{x}\,',\tilde{t};\tilde{\xi}\,',\tau)}{\partial \tilde{\nu}(\tilde{x}\,',\tilde{t})}\hat{V}(\tilde{\xi}\,',\tau)d\tilde{\xi}\,', \quad (\tilde{x}\,',\tilde{t}) \in R_T^n, \tag{31}$$

причому для ядра в останньому інтегралі правильна оцінка (9).

Далі розглядатимемо крайову умову (29) як автономне параболічне рівняння в R_T^n стосовно функції $\overline{u}\,(\tilde{x}\,',\tilde{t})$. У цьому рівнянні, як випливає з умов теореми, додаткового припущення щодо V, формул (30), (31) та властивостей потенціалів (див. п.2), його коефіцієнти та права частина (позначимо її через $\tilde{\Theta}$) належать до класу $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}_T^{\,n})$. Звідси робимо висновок, що існує єдиний класичний розв'язок рівняння (29), який задовольняє початкову умову

$$\overline{u}\,(\tilde{x}\,',0) = \overline{\varphi}\,(\tilde{x}\,') \quad \text{в} \quad R^{n-1}.$$

Крім того,

$$\overline{u} \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{R}_T^{\,n}), \tag{32}$$

для норми $\|\,\overline{u}\,\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{R}_T^{\,n})}$ правильна нерівність

$$\|\,\overline{u}\,\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{R}_T^{\,n})} \leqslant C\left[\|\,\tilde{\Theta}\,\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}_T^{\,n})} + \|\,\overline{\varphi}\,\|_{H^{2+\lambda}(R^{n-1})}\right], \tag{33}$$

і цей розв'язок записується у вигляді

$$\overline{u}(\tilde{x}\,',\tilde{t}) = \int_{R^{n-1}} \Gamma(\tilde{x}\,',\tilde{t};\tilde{\xi}\,',0)\,\overline{\varphi}(\tilde{\xi}\,')\,d\tilde{\xi}\,' - \int_0^{\tilde{t}} d\tau \int_{R^{n-1}} \Gamma(\tilde{x}\,',\tilde{t};\tilde{\xi}\,',\tau)\,\tilde{\Theta}(\tilde{\xi}\,',\tau)\,d\tilde{\xi}\,',$$

$$(\tilde{x}',\tilde{t}) \in R_T^n, \tag{34}$$

де Γ – ф.р. рівномірно параболічного оператора $\tilde{L}_0$.

Отже, маємо два різних вирази для функції $\overline{u}$: співвідношення (28), де треба прийняти, що $(x,t) \in \Sigma$, та співвідношення (34), у якому треба замінити $(\tilde{x}\,',\tilde{t})$

на (x', t) і $\tilde{\xi}'$ на ξ'. Прирівнюючи між собою їхні праві частини, враховуючи при цьому (10) і (31), одержимо таке інтегральне рівняння стосовно $\hat{V}$:

$$\int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \overline{G}(x',t;\xi',\tau)\hat{V}(\xi',\tau)\,d\xi' + \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} K(x',t;\xi',\tau)\hat{V}(\xi',\tau)\,d\xi' = \psi(x',t),$$
$$(x',t) \in R^n_T, \quad (35)$$

де

$$\psi(x',t) = \int_{R^{n-1}} \Gamma(x',t;\xi',0)\,\overline{\varphi}(\xi')\,d\xi' - \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \Gamma(x',t;\xi',\tau)\,\overline{\Theta}(\xi',\tau)\,d\xi' - \overline{u}_2(x',t) -$$
$$- \overline{u}_3(x',t) + \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \Gamma(x',t;\xi',\tau)\,\tilde{\beta}_n(\xi',\tau)\left[\frac{\partial \overline{u}_2(\xi',\tau)}{\partial \tilde{\nu}(\xi,',\tau)} + \frac{\partial \overline{u}_3(\xi',\tau)}{\partial \tilde{\nu}(\xi,',\tau)}\right] d\xi',$$
$$(x',t) \in R^n_T, \quad (36)$$

а для ядра K, явний вираз для якого легко виписати, при $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $x', \xi' \in R^{n-1}$, правильна оцінка (5), де треба прийняти, що $r = s = 0$, і n та $|x-\xi|^2$ замінити відповідно на $n-1$ та $|x'-\xi'|^2$. На підставі (36) та властивостей параболічних потенціалів (див. п.2) робимо висновок, що $\psi \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{R}^n_T)$, і також $\psi \in \underset{0}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{R}^n_T)$.

Рівняння (35) є інтегральним рівнянням Вольтерри першого роду. Порівнюючи оцінки для ядер цього рівняння, бачимо, що функція K має більш "слабку" особливість, ніж функція $\overline{G}$ при $t \to \tau + 0$. Враховуючи цей факт, а також формулу (18), переконуємося в тому, що після застосування оператора $\mathcal{E}$ з (17) до обох частин рівняння (35), останнє можна замінити еквівалентним інтегральним рівнянням Вольтерри другого роду вигляду

$$\tilde{V}(x',t) + \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \tilde{K}(x',t,\xi',\tau)\,\tilde{V}(\xi',\tau)\,d\xi' = \tilde{\psi}(x',t), \qquad (x',t) \in R^n_T, \quad (37)$$

де функція $\tilde{V}$ така, як у (18), $\tilde{\psi}(x',t) = \mathcal{E}(x',t)\psi$, причому $\tilde{\psi} \in \underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}^n_T)$, а для ядра $\tilde{K}$ правильна оцінка (9).

Розв'язуючи рівняння (37) методом послідовних наближень, знаходимо $\tilde{V}$, а отже, і V. Крім того, перевіряємо, що $V \in \underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$, і що для норми $\|V\|_{\underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)}$ правильна нерівність (27). Це підтверджує наше припущення a priori щодо функції V.

Залишилося перевірити умову (26) та обґрунтувати твердження теореми про єдиність розв'язку. Для цього зауважимо, що побудований за формулою (28) розв'язок задачі (22)–(24), можна розглядати як розв'язок наступної першої параболічної крайової задачі:

$$L\,u(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad (x,0) \in D_0,$$
$$u(x,t) = v(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma \backslash S_0,$$

при виконанні умов узгодження

$$\varphi(x) = v(x,0), \quad D_t u(x,t)|_{t=0} = D_t v(x,t)|_{t=0}, \qquad x \in S_0,$$

де функція $v(x,t)$, $(x,t) \in \Sigma$, є визначеною за допомогою співвідношення (34). Тоді (див., наприклад, [9, p.IY, §5]) умови теореми разом з умовами (25) і (32) гарантують нам існування єдиного розв'язку цієї задачі, що належить до класу $H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega})$, і для якого є правильною нерівність (27). Теорему доведено.

1. *Апушкинская Е.А., Назаров А.И.* Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболичных уравнений// РАН, Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6. – Вып. 6. – С. 1-29.
2. *Бадерко Е.А.* О решении первой краевой задачи для параболического уравнения с помощью потенциала простого слоя// Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 283. – N 1. – С. 11-13.
3. *Базалий Б.В., Казмин С.Н.* Об одной краевой задаче со старшей производной в граничном условии для параболического уравнения второго порядка // РАН, Санкт-Петербург. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Записки научных семинаров ПОМИ. – 1997. – Т. 249. – С. 40-54.
4. *Вентцель А.Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов// Теория вероятности и ее применения. – 1959. – Т. 4. – N 2. – С. 172-185.
5. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – М., 1963.
6. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – К., 1990.
7. *Камынин Л.И.* Приложения параболических потенциалов Паньи к краевым задачам математической физики. I// Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т.26. – N 5. – С. 829-841.
8. *Копитко Б.І.* Напівгрупи операторів, що описують дифузійний процес в області із загальними граничними умовами// Доп. НАН України. Математика. – 1995. – N 9. – С. 15-18.
9. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.
10. *Портенко Н.И.* Обобщенные диффузионные процессы. – К., 1982.
11. *Черепова М.Ф.* Решение методом потенциала первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области// М., 1985. – Деп. в ВИНИТИ 11.01.85. – N 361 - 85 Деп.

B. Kopytko, Zh. Tsapovska

THE POTENTIAL METHOD IN A PARABOLIC BOUNDARY PROBLEM WITH BOUNDARY WENTSEL CONDITION

A boundary problem for a linear parabolic equation of the second order is solved by of the method of the potential theory. A boundary Wentsel condition is given on a smooth elementary lateral boundary.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.99