ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.116–119

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.116–119

УДК 517.98

Віра Лозинська

ПРО ЗГОРТКОВУ АЛГЕБРУ, ДУАЛЬНУ ДО ПРОСТОРУ ФУНКЦІЙ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

Досліджується спряжений простір до простору функцій експоненціального типу, звуження яких на дійсний підпростір належить L_2. Доведено, що цей простір є згортковою алгеброю і має зображення у вигляді комутанта групи зсувів.

У комплексному гільбертовому просторі $L_2 \equiv L_2(\mathbb{R}^n)$ розглянемо оператори $D^k = D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n}$, де $D_j \equiv -i\partial/\partial t_j$ $(\forall j = 1, \dots, n)$ та $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Область визначення оператора $D_j^{k_j}$ має вигляд $\operatorname{dom}(D_j^{k_j}) \equiv \{\varphi \in \operatorname{dom}(D_j^{k_j-1}) : D_j\varphi \in \operatorname{dom}(D_j^{k_j-1})\}$ при $k_j \geqslant 1$ і $\operatorname{dom}(D_j^0) = L_2$ при $k_j = 0$. Отже, $\operatorname{dom}(D^k) = \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{dom}(D_j^{k_j})$ – область визначення D^k. Будь-якому вектору $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ такому, що $\nu_j > 0$ $(\forall j = 1, \dots, n)$ будемо зіставляти підпростір функцій $E_{2,\nu} \equiv \left\{\varphi \in \bigcap_{|k|=1}^{\infty} \operatorname{dom}(D^k) : \|\varphi\|_{2,\nu} \equiv \sup_{k \in Z_+^n} \nu^{-k} \|D^k\varphi\|_{L_2} < \infty\right\}$ з нормою $\|\cdot\|_{2,\nu}$, де $\nu^{-k} \equiv \nu^{-k_1} \dots \nu^{-k_n}$.

З іншого боку, розглянемо простір $\mathfrak{M}_{2,\nu}$ цілих функцій $\varphi : \mathbb{C}^n \ni t + i\tau \to \varphi(t + i\tau)$ з нормою

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}_{2,\nu}} \equiv \sup_{\tau \in \mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left| \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} -\nu_j |\tau_j|\Big) \varphi(t + i\tau) \right|^2 dt \right]^{1/2}.$$

Простір $\mathfrak{M}_{2,\nu}$ складається з функцій експоненціального типу [3, п.3.1].

Лема 1. (*a*) *Правильні ізометричний ізоморфізм $E_{2,\nu} \simeq \mathfrak{M}_{2,\nu}$ та ізометричне вкладення $E_{2,\nu} \subset L_2$.*

(*b*) *Для будь-яких функційφ $\varphi \in E_{2,\nu}$ та вектора $t \in \mathbb{R}^n$, функція $\psi : \mathbb{R}^n \ni s \to T_s\varphi(t)$, де $T_s\varphi(t) = \varphi(t - s)$, також належить $E_{2,\nu}$.*

Доведення. (*a*) Звуження функції $\varphi \in \mathfrak{M}_{2,\nu}$ на $\mathbb{R}^n$ задовольняє нерівності Бернштейна [3, п.3.2.2]

$$\|D^k\varphi\|_{L_2} \leqslant \nu^k \|\varphi\|_{L_2} \qquad (\forall \varphi \in \mathfrak{M}_{2,\nu}), \tag{1}$$

де $\nu^k \equiv \nu_1^{k_1} \dots \nu_n^{k_n}$. Із (1) одержуємо $\|\varphi\|_{2,\nu} \leqslant \|\varphi\|_{L_2}$. З означення норми простору $\mathfrak{M}_{2,\nu}$ випливає $\|\varphi\|_{L_2} \leqslant \|\varphi\|_{\mathfrak{M}_{2,\nu}}$ $(\forall \varphi \in \mathfrak{M}_{2,\nu})$, тобто $\mathfrak{M}_{2,\nu}{}_{|\mathbb{R}^n} \subset E_{2,\nu}$.

Навпаки, якщо $\varphi \in E_{2,\nu}$, то ряд вигляду $\varphi(t+i\tau) = \sum\limits_{|k|=0}^{\infty} \dfrac{\tau^k D^k \varphi}{k!}$ на підставі нерівності

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(t+i\tau)|^2 dt\Big)^{1/2} \leqslant \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{|\tau^k| \, \|D^k\varphi\|_{L_2}}{k!} \leqslant \|\varphi\|_{L_2} \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} \nu_j |\tau_j|\Big),$$

або $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}_{2,\nu}} \leqslant \|\varphi\|_{L_2}$, є збіжним для всіх $t+i\tau \in \mathbb{C}$. Зокрема, $\varphi(t+i\tau)$ є цілою функцією класу $\mathfrak{M}_{2,\nu}$. Тому $E_{2,\nu} \subset \mathfrak{M}_{2,\nu}{}_{|\mathbb{R}^n}$ і маємо рівність $E_{2,\nu} = \mathfrak{M}_{2,\nu}{}_{|\mathbb{R}^n}$.

Оскільки, $\|\varphi\|_{L_2} \leqslant \|\varphi\|_{2,\nu}$, то $\|\varphi\|_{L_2} \leqslant \|\varphi\|_{2,\nu} \leqslant \|\varphi\|_{L_2} \leqslant \|\varphi\|_{\mathfrak{M}_{2,\nu}} \leqslant \|\varphi\|_{L_2}$ ($\forall \varphi \in E_{2,\nu}$), то потрібний ізометричний ізоморфізм реалізується звуженням $E_{2,\nu} = \mathfrak{M}_{2,\nu}{}_{|\mathbb{R}^n}$. Зокрема, $E_{2,\nu} \subset L_2$.

(*b*) Приймемо, що $\check{\varphi}(t) \equiv \varphi(-t)$. Для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n$ та $s \in \mathbb{R}^n$ правильні рівності $\|D^k\varphi\|_{L_2} = \|D^k\check{\varphi}\|_{L_2}$, $\|T_s D^k \varphi\|_{L_2} = \|D^k\varphi\|_{L_2}$. З тотожності $D^k\psi(s) = T_t D^k \check{\varphi}(s)$, одержуємо $\|D^k\psi(s)\|_{L_2} = \|D^k\check{\varphi}(s)\|_{L_2} = \|D^k\varphi(s)\|_{L_2}$. Тому нерівність (1) переписуємо у вигляді $\|D^k\psi\|_{L_2} \leqslant \nu^k \|\varphi\|_{L_2}$. Звідки маємо нерівність $\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(t+i\tau)|^2 dt\Big)^{1/2} \leqslant \|\varphi\|_{L_2} \exp\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} \nu_j |\tau_j|\Big)$, тому $\psi \in \mathfrak{M}_{2,\nu}$. Лема доведена.

Із леми 1 та нерівності (1) випливає наслідок.

Наслідок 1. *Простір $E_{2,\nu}$ інваріантний щодо операторів D_j і кожен із операторів D_j над $E_{2,\nu}$ є обмеженим з нормою $\leqslant \nu_j$.*

Утворимо об'єднання $E_2 = \bigcup_\nu E_{2,\nu}$. На множині індексів $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ співвідношення $\nu_1 \geqslant \mu_1, \dots, \nu_n \geqslant \mu_n$ визначають напівпорядок $\nu \succeq \mu$. Виберемо деяку злічену підпослідовність вигляду $\big\{\nu(m) = (\nu_1(m), \dots, \nu_n(m))\big\}_{m\in\mathbb{N}}$, де $\nu(m+1) \succeq \nu(m)$ та $\lim\limits_{m\to\infty} \nu_j(m) = \infty$ ($\forall j = 1, \dots, n$). Тоді $E_2 = \bigcup\limits_m E_{2,\nu(m)}$ і вкладення $E_{2,\nu(m)} \subset E_{2,\nu(m+1)}$ неперервні. Отже, на об'єднанні E_2 можна задати топологію індуктивної границі $E_2 = \liminf\limits_{m\to+\infty} E_{2,\nu(m)}$. Такий локально опуклий простір E_2 далі виконує роль простору основних функцій.

Сильно спряжений простір антилінійних неперервних функціоналів до простору E_2 позначимо через E_2'. Відомо [2], що дуальна пара $\langle E_2', E_2\rangle$ визначається ермітовою формою $\langle f, \varphi\rangle \equiv \lim\limits_{m\to\infty} \big\langle f_{\nu(m)}, \varphi_{\nu(m)}\big\rangle$, де $\varphi_{\nu(m)} \in E_{2,\nu(m)}$, $f_{\nu(m)} \in E'_{2,\nu(m)}$ та $E'_{2,\nu(m)}$ – спряжений до гільбертового простору $E_{2,\nu(m)}$. Із міркувань двоїстості [2] випливає топологічний ізоморфізм проективній границі $E_2' = \lim\limits_{m\to+\infty}\mathrm{pr}\, E'_{2,\nu(m)}$ стосовно неперервних проекцій $E'_{2,\nu(m+1)} \ni f_{\nu(m+1)} \to f_{\nu(m)} \in E'_{2,\nu(m)}$, де $f_{\nu(m)} \equiv f_{|E_{2,\nu(m)}}$ – звуження функціонала $f \in E_2'$. Довільний функціонал $f \in E_2'$ має вигляд послідовності $f = \{ f_{\nu(m)} \}$. Користуючись побудованою двоїстістю, можна визначити диференціювання функціоналів так.

Лема 2. *Для будь-якого функціонала $f \in E_2'$ правильне співвідношення $\langle \mathfrak{D}_j f, \varphi\rangle = \langle f, D_j\varphi\rangle$, де $\mathfrak{D}_j$ – спряжений оператор до D_j стосовно пари $\langle E_2', E_2\rangle$ та $\varphi \in E_2$.*

Розглянемо над простором E_2 групу зсувів $T_s : \varphi(t) \to \varphi(t-s)$ від векторної змінної $s \in \mathbb{R}^n$. Для будь-якого функціонала $f \in E_2'$ та функції $\varphi(t) \in E_2$ згортку визначаємо співвідношенням

$$(f * \varphi)(t) = \langle f(s)\,,\, T_s\,\varphi(t)\rangle,$$

де $f(s)$ позначає дію функціонала f на функцію $T_s\,\varphi(t)$ за змінною s. Із леми(a) випливає коректність такого визначення згортки. Правильне таке узагальнення теореми Шварца [4, п.6.3].

Теорема 1. *Для кожного функціонала $f \in E_2'$ оператор згортки*

$$F:\, E_2 \ni \varphi \longrightarrow f * \varphi \tag{2}$$

належить простору неперервних лінійних відображень $\mathfrak{L}(E_2)$ та задовольняє співвідношенню

$$FT_s\varphi = T_s F\varphi \qquad\qquad (\forall\,\varphi \in E_2,\ s \in \mathbb{R}^n). \tag{3}$$

Навпаки, якщо оператор $F \in \mathfrak{L}(E_2)$ задовольняє умову (2), то існує єдиний функціонал $f \in E_2'$ такий, що оператор F має вигляд (1).

Доведення. Нехай $f \in E_2'$ і $\varphi \in E_{2,\nu}$. Із означення згортки та леми 1 одержуємо $\|f * \varphi\|_{2,\nu} \leqslant \|f\|_{2,\nu}\|\varphi\|_{L_2}$, де $\|f\|_{2,\nu}$ – норма звуження функціонала f на $E_{2,\nu}$. Тому з рівності $D^k(f * \varphi)(t) = \langle f(s)\,,\, T_s\, D^k\varphi(t)\rangle = (f * D^k\varphi)(t)$ випливає

$$\|f * \varphi\|_{2,\nu} = \sup_k \nu^{-k}\|f * D^k\varphi\|_{L_2} \leqslant \|f\|_{2,\nu}\|\varphi\|_{2,\nu}\,.$$

Вкладення $E_{2,\nu} \subset E_2$ неперервні, тому $F \in \mathfrak{L}(E_{2,\nu})$ і, отже, $F \in \mathfrak{L}(E_2)$. Співвідношення (3) випливає з рівностей $(f * T_s\varphi)(t) = (f * \varphi)(t-s) = T_s(f * \varphi)(t)$.

Навпаки, відображення $E_2 \ni \varphi \to \check{\varphi} \in E_2$ є ізоморфізмом. Тому відображення $f\,:\,\check{\varphi} \to (F\varphi)(0)$ визначає функціонал $f \in E_2'$. Звідки $(F\varphi)(0) = \langle f\,,\,\check{\varphi}\rangle = (f * \varphi)(0)$. Замінюючи φ на $T_t\varphi$ і користуючись (3), одержуємо (2).

Наслідок 2. (a) *Для будь-яких $f, g \in E_2'$ згортка $g * f$ визначається співвідношенням*

$$(g * f) * \varphi = g * (f * \varphi)\,, \qquad (\forall\,\varphi \in E_2),$$

зокрема E_2' згорткова алгебра.

(b) *Для будь-яких $f, g \in E_2'$ правильні співвідношення $\mathfrak{D}^k(g * f) = g * \mathfrak{D}^k f$.*

Визначимо над простором E_2 перетворення Фур'є $\mathfrak{F}:\ \varphi \to \widehat{\varphi}$ та обернене до нього $\mathfrak{F}^{-1}$. Фур'є-образ $\widehat{E}_2 \equiv \mathfrak{F}(E_2)$, як відомо [3], складається з фінітних функцій на $\mathbb{R}^n$. Топологізуємо простір $\widehat{E}_2$ індуктивною топологією стосовно відображення $\mathfrak{F}$. Спряжене відображення до $\mathfrak{F}^{-1}$ щодо дуальних пар $\langle E_2'\,,\, E_2\rangle$ та $\langle \widehat{E}_2'\,,\, \widehat{E}_2\rangle$, де $\widehat{E}_2'$ – спряжений гільбертів простір до $\widehat{E}_2$, діє так: $\mathfrak{F}^{\#} \equiv (\mathfrak{F}^{-1})' :\, E_2' \ni f \longrightarrow \widehat{f} \in \widehat{E}_2'$ і є неперервним.

Лема 3. *Правильні неперервні щільні вкладення гільбертових просторів*

$$E_2 \subset L_2 \subset E_2', \qquad \widehat{E}_2 \subset L_2 \subset \widehat{E}_2'.$$

Доведення леми 3 випливає з [2, теорема 4(b)] та ізометрії $\mathfrak{F}:\ L_2 \to L_2$. Як видно з леми, відображення $\mathfrak{F}^{\#}$ є розширенням перетворення Фур'є $\mathfrak{F}:\ L_2 \to L_2$ на простір E_2'.

Теорема 2. *Для будь-яких $f, g \in E_2'$ та $\varphi \in E_2$ правильні рівності*

$$\widehat{f * \breve{\varphi}} = (2\pi)^{n/2} \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}, \qquad \widehat{g * f} = (2\pi)^{n/2} \widehat{g} \cdot \widehat{f}.$$

Доведення. Дуальні пари $\langle E_2', E_2 \rangle$ і $\langle \widehat{E}_2', \widehat{E}_2 \rangle$ зв'язані співвідношенням $\langle \widehat{f}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ для всіх $f \in E_2'$, $\varphi \in E_2$. З них випливає рівність $\langle \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}, \widehat{\chi} \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\chi} \rangle$, де $\chi \in S(\mathbb{R}^n)$. Справді, для будь-яких $\varphi \in E_2, \chi \in S(\mathbb{R}^n)$, маємо $\widehat{\varphi * \chi} = (2\pi)^{n/2} \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\chi}$. Тому $\widehat{\varphi} \cdot \widehat{\chi} \in \widehat{E}_2$. Звідси, користуючись означенням згортки, одержуємо

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f * \breve{\varphi}}, \widehat{\chi} \rangle &= \langle f * \breve{\varphi}, \chi \rangle = \left[(f * \breve{\varphi}) * \breve{\chi} \right](0) \\ &= \left[f * (\breve{\varphi} * \breve{\chi}) \right](0) = \langle f, \varphi * \chi \rangle \\ &= \langle \widehat{f}, \widehat{\varphi * \chi} \rangle = (2\pi)^{n/2} \langle \widehat{f}, \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\chi} \rangle = (2\pi)^{n/2} \langle \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}, \widehat{\chi} \rangle. \end{aligned}$$

Для довільних $g \in E_2'$ та $\varphi \in E_2$ приймемо $\langle g, \breve{\varphi} \rangle = \langle \breve{g}, \varphi \rangle$. Тоді

$$\begin{aligned} \langle \widehat{g * f}, \widehat{\varphi} \rangle &= \langle g * f, \varphi \rangle = \left[(g * f) * \breve{\varphi} \right](0) \\ &= \left[g * (f * \breve{\varphi}) \right](0) = \langle g, f * \varphi \rangle \\ &= \langle \widehat{g}, \widehat{f * \varphi} \rangle = (2\pi)^{n/2} \langle \widehat{g}, \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi} \rangle = (2\pi)^{n/2} \langle \widehat{g} \cdot \widehat{f}, \widehat{\varphi} \rangle. \end{aligned}$$

1. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М., 1967.
2. *Лозинська В.Я., Лопушанський О.В.* Аналітичні розподіли експоненціального типу // Мат. методи і фіз.-мат. поля. – 1999. – Т. 42. – N. 4. – С. 45-55.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М., 1977.
4. *Шеффер Х.* Топологические векторные пространства. – М., 1971.

V. Lozynska

ON THE CONVOLUTION ALGEBRA AJOINTED TO SPACE OF THE EXPONENTIAL TYPE FUNCTIONS

It is proved that an ajoint space to some exponential type functions space coincide with a convolution algebra and can be represented by group of translation.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99