ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.120–122

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.120–122

УДК 517.956

Галина Лопушанська

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ В ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ У ПРОСТОРІ ФУНКЦІЙ ІЗ СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ

Нехай $f_\alpha(x) = f_{\alpha_1}(x_1) \times \cdots \times f_{\alpha_n}(x_n)$ – прямий добуток узагальнених функцій [1, 2]

$$f_{\alpha_j}(x_j) = \begin{cases} \dfrac{\theta(x_j)x_j^{\alpha_j-1}}{\Gamma(\alpha_j)}, & \alpha_j > 0 \\ f'_{\alpha_j+1}(x_j), & \alpha_j \leqslant 0. \end{cases}$$

В області $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$, обмеженій замкненою поверхнею Ω_1 класу C^∞ з одиничним вектором зовнішньої нормалі $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, розглядаємо рівняння

$$Lu(x) \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^{2\alpha} u(x)}{\partial x_i^{2\alpha}} \equiv \sum_{i=1}^{3} (f_{(2-2\alpha)h_i} * (\eta u))_{x_i x_i} = 0 \tag{1}$$

при $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1]$. Тут $\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_0 \\ 0, & x \notin \overline{\Omega}_0 \end{cases}$, $h_1 = (1,0,0), h_2 = (0,1,0), h_3 = (0,0,1)$. Нехай $\tilde{u} = \eta u$.

Введемо граничний оператор

$$B_\alpha(x)\varphi = \sum_{i=1}^{3} (f_{(2-2\alpha)h_i} * (\eta\varphi))_{x_i} \nu_i(x).$$

У [3] показано, що при регулярній u $\tilde{u}(x)$ є розв'язком у $D'(\mathbb{R}^3)$ рівняння $L\tilde{u} = -(B_\alpha u)\delta_S + B_\alpha^*(u\delta_S)$, де $(\varphi, B_\alpha^* F) = (B_\alpha * \varphi, F) = < \hat{B}_\alpha \varphi, F >, \varphi \in D(\mathbb{R}^3)$, $< \varphi, F >$– дія узагальненої функції $F \in D'(\Omega_1)$ на $\varphi \in D(\Omega_1) = C^\infty(\Omega_1)$.

Формулювання узагальненої задачі Діріхле. Нехай $F_1 \in D'(S)$. Знайти таку $u \in D'(\overline{\Omega})$, що $\tilde{u}$ задовольняє у $D'(\mathbb{R}^3)$ рівняння

$$L\tilde{u} = -F_2 + B_\alpha^* F_1 \tag{2}$$

F_2 – невідома узагальнена функція.

L, B_α є псевдодиференціальними операторами з символами

$$a(x,\xi) = \sum_{j=1}^{3} (-i\xi_j)^{2\alpha},\ b(x,\xi) = \sum_{j=1}^{3} \nu_j(x)(i\xi_j)^{2\alpha-1}$$

відповідно. Граничні задачі для ПДО у різних функціональних просторах вивчались у працях Аграновича М.С., Вишика М.І ., Ескіна Г.І ., Волевича Л.Р., Хермандера Л. та інших. Вивчаючи властивості розв'язку задачі Коші для параболічного ПДО з негладким символом (у працях Ейдельмана С.Д., Дріня Я.М., Кочубея А.М., Федорюка М.В. та інших), використовували властивості фундаментального розв'язку.

У [3] побудована фундаментальна функція $\omega(x) = O(|x|^{2\alpha-3})$ оператора L та доведена розв'язність узагальнених задач Діріхле та Неймана при заданих функціях із простору $D'(S)$: єдиний розв'язок $u(x)$ узагальненої задачі Діріхле визначається формулою $u(x) =< \hat{B}_\alpha(y)\omega(x-y),\ F_1 > - < \omega(x-y),\ F_2 >, \quad x \in \Omega_0$, а узагальнена функція F_2 визначається перетворенням

$$< g,\ F_2 >=< V_1(y,\varphi_g),\ F_1 >, \quad g \in D(\Omega_1), \tag{3}$$

де φ_g – єдиний розв'язок рівняння

$$\frac{1}{2}\varphi(y) + \int\limits_{\Omega_1} \varphi(x) B_\alpha(x)\omega(x-y)dS = g(y), \tag{4}$$

$V_1(y,\varphi) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \hat{B}_\alpha(y) \int\limits_{\Omega_{1,-\varepsilon}} \varphi(x)B_\alpha(x)\omega(x-y)dS \in D(\Omega_1)$, $B_\alpha(x)\omega(x-y) = \sum\limits_{j=1}^{3}(f_{(1-2\alpha)h_j}(x) * \omega(x-y))\nu_j(x)$, $\hat{B}_\alpha(y)\omega(x-y) = \sum\limits_{j=1}^{3}(f_{(1-2\alpha)h_j}(y) * \omega(x-y))\nu_j(y)$, $\Omega_{1,-\varepsilon}$ – паралельна до Ω_1 поверхня, розміщена всередині Ω на відстані ε від Ω_1.

Розглядаємо задачу Діріхле у припущенні, що $F_1 \in Z'_k(\Omega_1, x_0)$, $x_0 \in \Omega_1$, $k \in \mathbb{R}^1$ (ці простори узагальнених функцій, до яких належать функції з сильними степеневими особливостями, введені в [4]).

Лема. *Нехай* $\mathcal{K}(x,y) \in Z_q(\overline{\Omega}_i, y)$. *При* $k > 3 - i$ *інтегральний оператор*

$$K\varphi = \int\limits_{\Omega_i} \varphi(x)\mathcal{K}(x,y)dx$$

діє з $Z_k(\overline{\Omega}_i, x_0)$ *у* $Z_{k+q+3-i}(\overline{\Omega}_j, x_0)$, $i,j = 0,1$.

Ця лема доводиться аналогічно як лема 1 в [4].

За лемою одержуємо, що $B_\alpha(x)\omega(x-y) \in Z_{-2}(\overline{\Omega}_0, y)$, $\int\limits_{\Omega_1} \varphi(x)B_\alpha(x)\omega(x-y)dS \in Z_k(\Omega_1, x_0)$, $V_1(y,\varphi) \in Z_{k+1-2\alpha}(\Omega_1, x_0)$ для довільної $\varphi \in Z_k(\overline{\Omega}_0, x_0)$ при $k > -3$. Тоді $\frac{1}{2}\varphi(y) + \int\limits_{\Omega_1} \varphi(x)B_\alpha(x)\omega(x-y)dS \in Z_k(\Omega_1, x_0)$. Резольвента ядра рівняння (4) має таку саму особливість, як саме ядро, тому розв'язок цього рівняння $\varphi_g \in Z_k(\Omega_1, x_0)$ для $g \in Z_k(\Omega_1, x_0)$. Отже, перетворенням (3) для довільної $F_1 \in Z'_p(\Omega_1, x_0)$ визначена узагальнена функція $F_2 \in Z'_{p+2\alpha-1}(\Omega_1, x_0)$. Знову за лемою $\int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)\hat{B}_\alpha(y)\omega(x-y)dx \in Z_{k+1}(S, x_0)$ для довільної $\varphi \in Z_k(\overline{\Omega}_0, x_0)$ при $k > -3$, тому формулою

$$(\varphi, u) =< \int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)\hat{B}_\alpha(y)\omega(x-y)dx, F_1 > - < \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\omega(x-y)dx, F_2 >, \tag{5}$$

$\varphi \in Z_{p-1}(\overline{\Omega}_0, x_0)$, при $p > -2$ визначена узагальнена функція $u \in Z'_{p-1}(\overline{\Omega}, x_0)$. Можна безпосередньо перевірити, що вона задовольняє у $D'(\mathbb{R}^3)$ рівняння (2). Єдиність розв'язку випливає з теореми 1 [5].

Теорема. *Нехай* $x_0 \in \Omega_1$, $F_1 \in Z'_p(\Omega_1, x_0)$. *Існує єдиний розв'язок узагальненої задачі Діріхле* $u \in Z'_{p-1}(\overline{\Omega}_0, x_0)$. *Він визначається формулою (5),* $F_2 \in Z'_{p+2\alpha-1}(\Omega_1, x_0)$ *і визначається згідно з (3),(4).*

Подібний результат правильний для узагальненої задачі типу Неймана.

---

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М., 1981.
2. *Гельфанд И.И., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – М., 1958.
3. *Лопушанська Г.П.* Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних//Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51. – N 1. – С.48-59.
4. *Лопушанська Г.П.* Розв'язки узагальнених еліптичних граничних задач із сильними степеневими особливостями//Мат. студії. – 1998. – Т.9. – N 1. – С.29-41.
5. *Лопушанська Г.П.* Про один підхід до вивчення крайових задач у просторах розподілів і граничні інтегральні рівняння//Укр. мат. журн. – 1991. – Т.43. – N 5. – С.632-639.

H. Lopushanska

DIRICHLET PROBLEM FOR THE EQUATION IN FRACTIONAL DERIVATIVES IN THE SPACE OF FUNCTIONS WITH POWER SINGULARITIES

The solvabilitiy of Dirichlet problem for the equation $\sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial^{2\alpha} u(x)}{\partial x^{2\alpha}} = 0$, $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1]$, when the given function on the boundary has strong power singularity at some point is established.

Стаття надійшла до редколегії 25.01.2000