ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.123–128 Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.123–128

УДК 517.98

Андрій Лопушанський

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ОЦІНКИ АНАЛІТИЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗБУРЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ЗМІШАНИХ ЗАДАЧ

Для наближення розв'язків збурених еволюційних рівнянь здебільшого використовують так звані апроксиманти Іосіди [1], [8]. Однак у випадку параболічних задач, коли розв'язки породжуються аналітичними півгрупами, можна побудувати інші наближення, які суттєво спираються на аналітичну залежність розв'язків від збурюючого оператора. Такі наближення мають точніші оцінки збіжності. У цій праці наведено один з можливих варіантів аналітичного наближення розв'язків збуреної параболічної змішаної задачі за допомогою скінченних ітерацій резольвенти еліптичного оператора. Метод оцінок наближень ґрунтується на техніці побудови збурень областей визначення еліптичних операторів шляхом інтерполяції, викладеної, наприклад у [2], та теорії аналітичних функцій операторного аргумента (див. [3]). Інтерполяційна шкала просторів Бєсова, яку ми використали, дає змогу включити у клас збурюючих операторів всі дробові степені заданого еліптичного оператора, а також всі замкнені оператори з областю визначення цих дробових степенів.

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ класу C^∞ розглядаємо сильно еліптичний лінійний оператор $\ell_{2m}(x, D) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$, де $D^\alpha \equiv \dfrac{1}{i^{|\alpha|}} \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $a_\alpha(x) \in L^\infty(\Omega)$. Без обмеження загальності вважаємо, що $\Re a(x,\xi) > 0$ для всіх $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ та $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\Omega}$. Припускаємо, що коефіцієнти $a_\alpha(x)$ при $|\alpha| = 2m$ неперервні в замиканні $\overline{\Omega}$. Тут $a(x,\xi) \equiv \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\alpha_n}$, числа m та n натуральні.

Нехай на границі області $\partial\Omega$ задано оператори $b_j(x, D) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant k_j} b_{j,\alpha}(x) D^\alpha$, $(j = \overline{1,m})$, де $b_{j,\alpha}(x) \in C^\infty(\partial\Omega)$. Припускаємо, що система $\{b_j(x,D)\}_{j=1}^m$ нормальна, тобто $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ і для кожного нормального вектора ν_x в точці $x \in \partial\Omega$ виконується умова $b_j(x, \nu_x) \equiv \sum_{|\alpha|=k_j} b_{j,\alpha}(x) \nu_x^\alpha \neq 0$ для всіх $j = \overline{1,m}$

Тоді оператор $(Au)(x) = \ell_{2m}(x,D)u(x)$, заданий у банаховому просторі $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ на щільному підпросторі $W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega) \equiv \left\{ u(x) \in W^{2m}_p(\Omega) : b_j(x,D)u_{\,|\,\partial\Omega} = 0;\ j = \overline{1,m} \right\}$, замкнений. Тут $W^{2m}_p(\Omega)$ – простір Соболєва. Підпростір $W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)$ замкнений в $W^{2m}_p(\Omega)$.

Нехай далі $E : W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega) \to L_p(\Omega)$ – оператор вкладення, $\rho(A)$ – множина чисел $\lambda \in \mathbb{C}$ для яких резольвента $(\lambda E - A)^{-1} : L_p(\Omega) \to W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)$ є ізоморфізмом банахових просторів.

Зафіксуємо деяке число θ, $(0 < \theta < 1)$. У просторі $L_p(\Omega)$ розглянемо довільний лінійний замкнений оператор Θ, заданий на щільному підпросторі функцій $B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega) \equiv \left\{ g(x) \in B^{2m\theta}_{p,q}(\Omega) : b_j(x,D)g_{\,|\,\partial\Omega} = 0;\ j = \overline{1,m} \right\}$ із нормою простору Бєсова $B^{2m\theta}_{p,q}(\Omega)$ порядку $2m\theta$, де $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Підпростір $B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega)$ замкнений в $B^{2m\theta}_{p,q}(\Omega)$.

Лема 1. *[5] Якщо для нормальної системи граничних операторів $\{b_j(x,D)\}_{j=1}^m$ для всіх $j = \overline{1,m}$ виконуються нерівності $k_j < 2m\theta - 1/p$, то реалізується ізоморфізм банахових просторів $B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega) \simeq \left(L_p(\Omega), W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)\right)_{\theta,q}$, у якому праворуч проміжний простір з показником θ, породжений одним з еквівалентних методів дійсної інтерполяції банахової пари $V \equiv \left\{L_p(\Omega),\, W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)\right\}$.*

Задамо деяку функцію $f(t,x)$ з простору $C\left([0,T]; B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega)\right)$ – неперервних векторнозначних функцій на відрізку $[0,T]$, де $0 < T < \infty$. Нехай також задана деяка скалярна функція $w(0,x) \in L_p(\Omega)$. Згідно з лемою 1 існує вкладення $J : W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega) \to B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega)$, тому в просторі $C^1\left((0,T]; W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)\right)$ – гладких векторнозначних функцій $(0,T] \ni t \to w(t,x) \in W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)$ можна розглянути змішану задачу

$$\frac{dw(t,x)}{dt} = -(A + \Theta J)\, w(t,x) + f(t,x), \quad \lim_{t\to+0} \|w(t,x) - w(0,x)\|_{L_p(\Omega)} = 0\,. \qquad (1)$$

Сукупність обмежених лінійних операторів $S \in \mathfrak{L}(L_p(\Omega))$ таких, що $S\left(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)\right) \subset W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)$, утворює банахову алгебру $\mathfrak{L}(V)$ – обмежених лінійних операторів над банаховою парою V стосовно норми $\|S\|_{\mathfrak{L}(V)} \equiv \max\left\{\|S\|_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega))}; \|S\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))}\right\}$. Використаємо далі цю норму для оцінок резольвент операторів. Через $l_\omega \equiv \left\{re^{i\omega} : r > 0\right\}$ позначаємо промінь, відповідний деякому куту ω, $(0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi)$.

Лема 2. *Нехай при $\omega_0 \in (0,\pi/2)$ для будь-якого кута $\omega \in [\omega_0,\, 2\pi - \omega_0]$ і ненульового вектора μ_x, дотичного в точці $x \in \partial\Omega$, кожен поліном $\mathbb{C} \ni z \to a(x,\mu_x + z\,\nu_x) - \lambda$, де $\lambda \in l_\omega$, має m коренів $z_1(\lambda,\mu_x), \ldots, z_m(\lambda,\mu_x)$ з додатною уявною частиною і поліноми $\{b_j\,(x,\,\mu_x + z\,\nu_x)\}_{j=1}^m$ є лінійно незалежними за модулем $\prod_{j=1}^m \left[z - z_j(\lambda,\mu_x)\right]$. Тоді:*

(i) існує число $\beta \in \mathbb{R}$ таке, що сектор $\Lambda \equiv \bigcup \left\{l_\omega : \omega \in [\omega_0,\, 2\pi - \omega_0]\right\}$ належить резольвентній множині $\rho(A + \beta E)$ оператора $A + \beta E$ і виконуються умови

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda\in\Lambda} \|[(\lambda - \beta)E - A]^{-1}\|_{\mathfrak{L}(V)} &\equiv M < \infty, \\ \sup_{\lambda\in\Lambda} \|(\lambda - \beta)E[(\lambda - \beta)E - A]^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))} &\equiv C < \infty; \end{aligned} \qquad (2)$$

(ii) якщо для оператора Θ виконується умова

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|\Theta J[(\lambda - \beta)E - A]^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))} \equiv \delta < 1, \qquad (3)$$

то сектор Λ *належить резольвентній множині* $\rho(A + \Theta J + \beta E)$ *оператора* $A + \Theta J + \beta E$ *і справджується нерівність*

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_1} \|(\lambda - \beta)E[(\lambda - \beta)E - A - \Theta J]^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))} \leqslant \frac{C}{1-\delta}. \tag{4}$$

Доведення. Першу з оцінок (2) для операторної норми $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega)); W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega))}$ одержано у праці [7] на підставі однієї теореми Агмона [4] та леми 1. Резольвента $[(\lambda - \beta)E - A]^{-1}$ залишає інваріантним підпростір $W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)$. Одностайна неперервність множин $\{\lambda \in \Lambda : [(\lambda - \beta)E - A]^{-1}\}$ над $W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)$ є наслідком цієї оцінки та неперервності вкладення $E : W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega) \to L_p(\Omega)$. Тому існування сталої M випливає з теореми Банаха-Штейнгауза.

Приймемо, що $C \equiv \sup_{\lambda\in\Lambda} \|I_{L_p(\Omega)} + A[(\lambda - \beta)E - A]^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))}$, де $I_{L_p(\Omega)}$ – одиниця алгебри $\mathfrak{L}\Big(L_p(\Omega)\Big)$. Оскільки $A \in \mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega); L_p(\Omega)\Big)$, то $C < \infty$. Потрібний вираз для сталої C випливає з тотожності $(\lambda-\beta)E[(\lambda-\beta)E - A]^{-1} = I_{L_p(\Omega)} + A[(\lambda - \beta)E - A]^{-1}$, правильної при $\lambda \in \Lambda$.

Ряд $E[(\lambda-\beta)E - A - \Theta J]^{-1} = E[(\lambda-\beta)E - A]^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\{\Theta J[(\lambda-\beta)E - A]^{-1}\}^k$ за умови (3) збіжний. Звідси приходимо до (4).

Зауваження. *З леми 2 випливає, що задача (1) при* $\Theta = 0$ *параболічна ([8], п.3.8). Крім того, з неї випливає, що оператори* $-A$ *та* $-(A + \Theta J)$ *генерують над простором* $L_p(\Omega)$ *аналітичні півгрупи обмежених лінійних операторів відповідно* $0 \leqslant t \to e^{-tA}$ *та* $0 \leqslant t \to e^{-t(A+\Theta J)}$. *Нарешті, оскільки число* β *далі не використовується, то для скорочення записів замінимо* $\beta E + A$ *знову на* A.

Лема 3. *Існує єдиний розв'язок задачі (1) і його можна подати у вигляді* $w(t, x) = e^{-t(A+\Theta J)}w(0, x) + \int_0^t e^{(\tau-t)(A+\Theta J)} f(\tau, x)\, d\tau$, *де півгрупа має зображення* $e^{-t(A+\Theta J)} = \int_\Gamma e^{-t\lambda}E(\lambda E - A - \Theta J)^{-1}\, d\lambda$.

Доведення. Оскільки півгрупа $e^{-t(A+\Theta J)}$ аналітична, то до неї можна застосувати відомий результат роботи [6] (див. також [8], п.6), згідно з яким за умови $f \in C\Big([0, T]; B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega)\Big)$ отримуємо твердження леми. Лема доведена.

Для оцінок норм введемо банахів простір $\mathfrak{L}^k\Big(\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega); L_p(\Omega)\Big); \mathfrak{L}(V)\Big) \equiv$ $\mathfrak{L}\Big(\overbrace{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega); L_p(\Omega)) \times \ldots \times \mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega); L_p(\Omega))}^{k}; \mathfrak{L}(V)\Big)$, обмежених k-лінійних операторів $F : \mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega); L_p(\Omega)\Big) \times \ldots \times \mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega); L_p(\Omega)\Big) \ni [X_1, \ldots X_k] \to F[X_1, \ldots X_k] \in \mathfrak{L}(V)$ з нормою $\|F\|_{\mathfrak{L}^k(\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega); L_p(\Omega)); \mathfrak{L}(V))}$ $= \sup_{\iota=\overline{1,k}} \sup\Big\{\|F[X_1, \ldots X_k]\|_{\mathfrak{L}(V)} : \|X_\iota\|_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega); L_p(\Omega))} \leqslant 1\Big\}$. Далі позначимо через $\mathfrak{L}^k_s\Big(\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega); L_p(\Omega)\Big); \mathfrak{L}(V)\Big)$ підпростір симетричних k-лінійних операторів, для яких правильна рівність $F[X_1, \ldots X_k] = F[X_{s_1}, \ldots X_{s_k}]$ при будь-якій перестановці індексів $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & k \\ s_1 & \ldots & s_k \end{pmatrix}$.

Лема 4. *Припустимо, що виконується умова (3) і позначимо через* Γ *границю області* $\Lambda\bigcup\{\lambda : |\lambda|\leqslant\gamma\}$, *де* $\gamma>0$.

(i) *Оператор* $D_s^k e^{-tA}$, *визначений на будь-якому наборі* $[X_1J,\dots,X_kJ]$, *де* $X_\iota\in\mathfrak{L}\Big(B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big)$ *при* $\iota=\overline{1,k}$, *формулою* $D_s^k e^{-tA}[X_1J,\dots,X_kJ]\equiv$

$$\frac{1}{2\pi ik!}\int_\Gamma e^{-t\lambda}E(\lambda E-A)^{-1}\sum\nolimits_s\big[X_{s_1}J(\lambda E-A)^{-1}\big]\dots\big[X_{s_k}J(\lambda E-A)^{-1}\big]\,d\lambda,$$

у якій підсумовування відбудеться за всіма підстановками $\begin{pmatrix}1&\dots&k\\ s_1&\dots&s_k\end{pmatrix}$, *належить простору* $\mathfrak{L}_s^k\Big(\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big);\,\mathfrak{L}(V)\Big)$. *При цьому правильна нерівність*

$$\|D_s^k e^{-tA}\|_{\mathfrak{L}_s^k(\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega));\mathfrak{L}(V))}\leqslant CC_\Gamma M^k, \tag{5}$$

де $C_\Gamma\equiv\dfrac{1}{\pi}\Big(\displaystyle\int_\gamma^T r^{-1}e^{-r\gamma\cos\omega_0}\,dr+\frac12\int_{\omega_0}^{2\pi-\omega_0}e^{-r\gamma\cos\omega}\,d\omega\Big)$;

(ii) *оператор* $\Delta_\Theta\cdot D_s^k e^{-tA}$, *визначений над прямими добутками просторів* $\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big)\times\dots\times\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big)$ *формулою*

$$\Delta_\Theta\cdot D^k e^{-tA}[X_1J,\dots,X_kJ]\equiv$$
$$\frac{1}{2\pi ik!}\int_\Gamma e^{-t\lambda}E(\lambda E-A-\Theta J)^{-1}\sum\nolimits_s\big[X_{s_1}J(\lambda E-A)^{-1}\big]\dots\big[X_{s_k}J(\lambda E-A)^{-1}\big]\,d\lambda$$

належить простору $\mathfrak{L}_s^k\Big(\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big);\,\mathfrak{L}(V)\Big)$ *і має оцінку*

$$\|\Delta_\Theta\cdot D_s^k e^{-tA}\|_{\mathfrak{L}_s^k(\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega));\,\mathfrak{L}(V))}\leqslant\frac{CC_\Gamma M^k}{1-\delta}. \tag{6}$$

Доведення. З леми 2 випливає нерівність $\|E(\lambda E-A)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))}\leqslant C|\lambda|^{-1}$. Тому з $\|X_{s_\iota}J(\lambda E-A)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))}\leqslant\|X_{s_\iota}J\|_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);\,L_p(\Omega))}\|(\lambda E-A)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(V)}=M\|X_{s_\iota}J\|_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);\,L_p(\Omega))}$ при $\lambda\in\Lambda$, одержуємо

$$\|D_s^k e^{-tA}[X_1J,\dots,X_kJ]\|_{\mathfrak{L}(V)}\leqslant CC_\Gamma M^k(k!)^{-1}\sum_s\prod_\iota\|X_{s_\iota}J\|_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);\,L_p(\Omega))}.$$

Для одержання нерівності (5) залишилося скористатися означенням норми k-лінійного оператора. Нерівність (6) доводиться аналогічно, треба тільки використати нерівність (4) леми 2.

Лема 5. *Для будь-якого числа* $t\geqslant0$ *в алгебрі* $\mathfrak{L}(V)$ *правильна тотожність*

$$e^{-t(A+\Theta J)}=\sum_{k=0}^{K-1}D_s^k e^{-tA}[\overbrace{\Theta J,\dots,\Theta J}^{k}]+\Delta_\Theta\cdot D_s^K e^{-tA}[\overbrace{\Theta J,\dots,\Theta J}^{K}]. \tag{7}$$

Доведення. Достатньо застосувати контурний інтеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma e^{-t\lambda}\dots d\lambda$ до резольвентної тотожності

$$(\lambda E-A-\Theta J)^{-1}=\sum_{k=0}^{K-1}(\lambda E-A)^{-1}[\Theta J(\lambda E-A)^{-1}]^k+(\lambda E-A-\Theta J)^{-1}[\Theta J(\lambda E-A)^{-1}]^K,$$

правильної при $\lambda\in\Lambda$ і скористатися оцінками (5)-(6), які забезпечують існування невласних інтегралів. Лему доведено.

Позначимо $G_{K-1}(t,\Theta)\equiv$

$$\sum_{k=0}^{K-1}D_s^k e^{-tA}[\overbrace{\Theta J,\dots,\Theta J}^{k}]=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-t\lambda}E(\lambda E-A)^{-1}\sum_{k=0}^{K-1}\left[\Theta J(\lambda E-A)^{-1}\right]^k d\lambda.$$

Функції вигляду $v_K(t,x)\equiv G_{K-1}(t,\Theta)w(0,x)+\displaystyle\int_0^t G_{K-1}(t-\tau,\Theta)f(t,x)\,d\tau$, які залежать від резольвенти незбуреного оператора $(\lambda E-A)^{-1}$ та збурюючого оператора Θ поліноміально, використаємо для наближення розв'язку задачі (1).

Теорема. *Нехай* $w(t,x)$ *– розв'язок задачі (1) та* θ $(0<\theta<1)$. *Якщо функція* f *належить простору* $C\Big([0,T];B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega)\Big)$, *то для будь-якого оператора* $\Theta\in\mathfrak{L}\Big(B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big)$ *для якого виконується умова*

$$\|\Theta J(\lambda E-A)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))}=\delta<1,$$

правильна нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|w(t,x)-v_K(t,x)\right\|_{L_p(\Omega)}\leqslant \tag{8}$$
$$\leqslant\frac{CC_\Gamma M^K}{1-\delta}\|\Theta J\|^K_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega))}\left(\|w(0,x)\|_{L_p(\Omega)}+\int_0^T\|f(t,x)\|_{L_p(\Omega)}\,dt\right).$$

Доведення. З тотожності (7) та оцінки (5) одержуємо таку нерівність

$$\left\|[e^{-t(A+\Theta J)}-G_{K-1}(t,\Theta)]w(0,x)\right\|_{L_p(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{CC_\Gamma M^K}{1-\delta}\|\Theta J\|^K_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega))}\|w(0,x)\|_{L_p(\Omega)}.$$

З неперервного вкладення $B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega)\subset L_p(\Omega)$ випливає існування інтеграла $\displaystyle\int_0^T\|f(t,x)\|_{L_p(\Omega)}\,dt$. Отже, з властивостей інтеграла Бохнера, тотожності (7) та оцінки (6) маємо

$$\left\|\int_0^t\left[e^{-(t-\tau)(A+\Theta J)}-G_{K-1}(t-\tau,\Theta)\right]f(\tau,x)\,d\tau\right\|_{L_p(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{CC_\Gamma M^K}{1-\delta}\|\Theta J\|^K_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega))}\int_0^T\|f(t,x)\|_{Lp(\Omega)}\,dt.$$

Користуючись зображенням розв'язку w задачі (1), наведеного у лемі 3, приходимо до нерівності (8).

---

1. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы. – М., 1992.
2. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М., 1980.
3. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М., 1962.
4. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of elliptic boundary value problems// Comm. Pure Appl. Math. – 1962. – Vol. 15. – P. 119-147.
5. *Grisvard P.* Équations operationnelles abstraites et problémes aux limites dans des domaines non réguliers// Actes. Congrés Intern. Math. (1970) – 1971. – Vol. 2. – P. 731-736.
6. *Da Prato G., Grisvard P.* Equations d'évolotion abstraites non linéaire de type parabolique// Ann. Mat. Pure Appl. – 1979. – Vol. 120. – N 4. – P. 329-396.
7. *Lopushansky A. O.* On the analyticity of the solutions of evolutionary equations generated by elliptic operators pertubations // Matematychni Studii. – 1999. – Vol. 12. – N 2. – P. 135-138.
8. *Tanabe H.* Equations of evolution. – Pitman, 1979.

A. Lopushansky

INTERPOLATIC ESTIMATE FOR THE ANALYTIC APPROXIMATIONS OF THE PERTURBED PARABOLIC MIXED PROBLEMS

The estimate of analytic approximation of perturbed parabolic mixed problem solutions by means of the coresponding elliptic problem resolvent is established.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99