ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.129–134

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.129–134

УДК 519.21

Ірина Ніщенко

ПРО ІСНУВАННЯ МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ СІМ'Ї НАПІВМАРКІВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЙ

Об'єктом нашого дослідження є сім'я напівмарківських випадкових еволюцій $N^\varepsilon(t)$, детальному вивченню яких присвячена монографія [1]. При усередненні випадкової еволюції в праці [1] як масштабний множник використовували малий параметр ε. Ми показали існування такого, відмінного від ε, малого параметра ρ^ε, що в масштабі часу t/ρ^ε існує границя умовного математичного сподівання сім'ї напівмарківських випадкових еволюцій.

Нехай $x(t)$ є напівмарківський процес з неперервним часом та скінченною множиною станів $E = \{1, 2, \ldots, m\}$. Процес задається напівмарківською матрицею

$$F(t) = \left[F_{ij}(t) = P\{x(\tau) = j,\, \tau \leqslant t \,|\, x(0) = i\},\;\; i, j \in E,\, t \geqslant 0\right],$$

де τ – момент першого стрибка напівмарківського процесу. Вважаємо, що вкладений у напівмарківський процес ланцюг Маркова $(x_n,\, n \geqslant 0)$ є ергодичним зі стаціонарним розподілом $p_1, p_2, \ldots, p_m$, середні часи перебування в станах є скінченними

$$\int\limits_0^\infty tF_i(dt) < \infty, \quad F_i(t) = \sum_{j=1}^m F_{ij}(t) \tag{1}$$

і функція розподілу $F_i(t) = P_i\{\tau \leqslant t\}$ моменту першого стрибка напівмарківського процесу є неперервною.

На траєкторіях напівмарківського процесу $x(t)$ побудуємо сім'ю випадкових невід'ємних матричнозначних еволюцій [1], залежних від деякого малого параметра $\varepsilon > 0$

$$N^\varepsilon(t) = \begin{cases} \Gamma^\varepsilon_{x_0}(t), & 0 \leqslant t < \tau_1, \\ \Gamma^\varepsilon_{x_0}(\tau_1)\Lambda^\varepsilon_{x_1}\Gamma^\varepsilon_{x_1}(t - \tau_1), & \tau_1 \leqslant t < \tau_2, \\ \ldots & \\ \Gamma^\varepsilon_{x_0}(\tau_1)\Lambda^\varepsilon_{x_1}\Gamma^\varepsilon_{x_1}(\tau_2 - \tau_1)\cdots\Lambda^\varepsilon_{x_n}\Gamma^\varepsilon_{x_n}(t - \tau_n), & \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}, \\ \ldots & \end{cases}$$

де $\{\Gamma^\varepsilon_x(t),\, x \in E,\, t \geqslant 0\}$ – сім'я рівномірно неперервних напівгруп додатних операторів стиску в $\mathbb{R}^d$. Ці оператори визначають неперервну складову еволюції на інтервалах $[\tau_n,\, \tau_{n+1})$ сталості напівмарківського процесу $x(t)$. Сім'я $\{\Lambda^\varepsilon_x,\, x \in E\}$ лінійних операторів стиску в $\mathbb{R}^d$ визначає стрибки еволюції в моменти відновлення τ_n.

Припустимо, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Lambda_x^\varepsilon = I,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma_x^\varepsilon(t) = \Gamma_x(t), \qquad x\in E \tag{2}$$

Розглянемо умовне математичне сподівання $M_i[N^\varepsilon(t),\, x(t)=j]$ випадкової еволюції. Величина $M_i[N^\varepsilon(t),\, x(t)=j]$ є розв'язком матричного рівняння відновлення

$$X^{\varepsilon(ij)}(t) = A^{\varepsilon(ij)}(t) + \sum_{l=1}^{m} K^{\varepsilon(il)} * X^{\varepsilon(lj)}(t), \tag{3}$$

записаного у таких позначеннях

$$X^{\varepsilon(ij)}(t) = M_i[N^\varepsilon(t),\, x(t)=j],$$
$$A^{\varepsilon(ij)}(t) = M_i[N^\varepsilon(t),\, x(t)=j,\, t<\tau] = \delta_{ij}\Gamma_i^\varepsilon(t)\, P_i\{t<\tau\},$$
$$K^{\varepsilon(ij)}(dt) = M_i[N^\varepsilon(t),\, x(\tau)=j,\, \tau\in dt] = \Gamma_i^\varepsilon(t)\Lambda_j^\varepsilon F_{ij}(dt).$$

Співвідношення (3) є формулою повної ймовірності, записаною для умовного математичного сподівання $M_i[N^\varepsilon(t),\, x(t)=j]$ з врахуванням моменту τ першого стрибка напівмарківського процесу.

Розв'язок рівняння відновлення (3) подається у вигляді згортки

$$X^{\varepsilon(ij)}(t) = \sum_{l=1}^{m} H^{\varepsilon(il)} * A^{\varepsilon(lj)}(t),$$

де $H^\varepsilon(t) = [H^{\varepsilon(ij)}(t),\, i,j\in E]$ – матриця відновлення, побудована за матрицею $K^\varepsilon(t) = [K^{\varepsilon(ij)}(t),\, i,j\in E]$.

Зауважимо, що зі зроблених вище припущень випливають такі умови.

(A) Елементи матриць $K^{\varepsilon(ij)}(t)$ є невід'ємними монотонними за t функціями, і

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K^{\varepsilon(ij)}(du) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma_i^\varepsilon(u)\Lambda_j^\varepsilon F_{ij}(du) = \Gamma_i(u)F_{ij}(du) = K^{(ij)}(du).$$

$$(B)\qquad \sup_\varepsilon \sum_j \left\| K^{\varepsilon(ij)}(\infty)\right\| = \sup_\varepsilon\sum_j \left\|\int_0^\infty \Gamma_i^\varepsilon(u)\Lambda_j^\varepsilon F_{ij}(du)\right\| \leqslant \sum_j\int_0^\infty F_{ij}(du) = 1.$$

$$(C)\qquad \lim_{t\to\infty}\sup_\varepsilon \left\|\int_t^\infty yK^{\varepsilon(ij)}(dy)\right\| \leqslant \lim_{t\to\infty}\int_t^\infty yF_{ij}(dy) = 0.$$

(D) Сім'я матриць $\{A^{\varepsilon(ij)}(t) = \delta_{ij}\Gamma_i^\varepsilon(t)P_i\{t<\tau\},\ i,j\in E\}$ є рівномірно безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$. Це випливає з того, що $A^{\varepsilon(ij)}(t)$ має безпосередньо інтегровну за Ріманом мажоранту і є рівномірно неперервною на довільному відрізку $[0,T]$. Справді,

$$\sup_\varepsilon \left\|A^{\varepsilon(ij)}(t)\right\| \leqslant P_i\{t<\tau\},$$

функція $P_i\{t<\tau\}$ є обмеженою монотонною і

$$\int_0^\infty P_i\{t<\tau\}dt = \int_0^\infty tF_i(dt) < \infty,$$

отже, вона є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$. Далі, якщо $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ і $h = t_2 - t_1$, то

$$\sup_{\varepsilon}\left\|A^{\varepsilon(ij)}(t_2) - A^{\varepsilon(ij)}(t_1)\right\| = \sup_{\varepsilon}\left\|\Gamma_i^{\varepsilon}(t_2)P_i\{t_2 < \tau\} - \Gamma_i^{\varepsilon}(t_1)P_i\{t_1 < \tau\}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\varepsilon}\left\|\Gamma_i^{\varepsilon}(h)P_i\{t_1 < \tau\} - I \cdot P_i\{t_1 < \tau\}\right\| \leqslant \sup_{\varepsilon}\left\|\Gamma_i^{\varepsilon}(h) - I\right\| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

згідно з рівномірною неперервністю операторів $\Gamma_i^{\varepsilon}(t)$.

Нехай виконуються такі умови:

$$\int_0^{\infty}\left[\Gamma_i(u) - I\right]F_i(du) = (0) \quad \text{або, що те саме} \quad \sum_{j=1}^{m} K^{(ij)}(\infty) = I \tag{4}$$

та

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \int_0^{\infty}\left[\Gamma_i(u) - I\right]F_{ij}(du) = (0) \quad \text{або, що те саме} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i K^{(ij)}(\infty) = p_j \cdot I \tag{5}$$

Теорема. *Нехай виконуються умови (1), (2), (4), (5). Якщо всі матриці* $\{K^{(ij)}(du),\, i,j \in E\}$ *не гратчасті, то є така послідовність* $\rho^{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, *що в масштабі часу* t/ρ^{ε} *існує нетривіальна границя умовного математичного сподівання* $M_i[N^{\varepsilon}(t),\, x(t) = j]$ *випадкової еволюції.*

Доведення. Оскільки розв'язок рівняння відновлення (3) виражається через матрицю відновлення $H^{\varepsilon}(t)$, то нам потрібно знайти її асимптотику при $t \to \infty$, $\varepsilon \to 0$.

Введемо послідовність матриць $\{L_k^{\varepsilon(ij)}(t),\ i,j \in E,\ k = 0,1,\dots\}$, які визначаються зі співвідношень

$$L_0^{\varepsilon(ij)}(t) = K^{\varepsilon(ij)}(t),$$
$$L_{k+1}^{\varepsilon(ij)}(t) = K^{\varepsilon(ij)}(t) + \sum_{n\neq j} K^{\varepsilon(in)} * L_k^{\varepsilon(nj)}(t). \tag{6}$$

Використовуючи математичну індукцію та нерівність (В), переконуємося, що

$$L_{k+1}^{\varepsilon(ij)}(t) \geqslant L_k^{\varepsilon(ij)}(t)$$

і, що

$$\sup_{\varepsilon}\left\|L_k^{\varepsilon(ij)}(t)\right\| \leqslant 1 \quad \forall k = 0,1,\dots$$

Позначимо $L^{\varepsilon(ij)}(t) = \lim\limits_{k\to\infty} L_k^{\varepsilon(ij)}(t)$. Перейшовши у (6) до границі при $k \to \infty$, бачимо, що $L^{\varepsilon(ij)}(t)$ є розв'язком рівняння

$$L^{\varepsilon(ij)}(t) = K^{\varepsilon(ij)}(t) + \sum_{n\neq j} K^{\varepsilon(in)} * L^{\varepsilon(nj)}(t).$$

Далі, перейшовши у цьому рівнянні до границі при $t \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, одержуємо рівняння для знаходження $L^{(ij)}(\infty)$

$$L^{(ij)}(\infty) = K^{(ij)}(\infty) + \sum_{n\neq j} K^{(in)}(\infty) \cdot L^{(nj)}(\infty).$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося: якщо виконується умова (4), то $L^{(ij)}(\infty) = I$ є розв'язком останнього рівняння при довільних $i, j \in E$.

Введемо ще послідовність матриць $H_k^\varepsilon(t) = \{H_k^{\varepsilon(ij)}(t),\ i,j \in E,\ k = 0,1,\ldots\}$, які наближають матрицю відновлення $H^\varepsilon(t)$ при $k \to \infty$

$$
\begin{gathered}
H_0^{\varepsilon(ij)}(t) = I^{(ij)} + K^{\varepsilon(ij)} * H^{\varepsilon(jj)}(t),\\
H_{k+1}^{\varepsilon(ij)}(t) = H_0^{\varepsilon(ij)}(t) + \sum_{n \neq j} K^{\varepsilon(in)} * H_k^{\varepsilon(nj)}(t),
\end{gathered}
\tag{7}
$$

$$
\text{де} \quad I^{(ij)} = \begin{cases} I, & i = j \\ (0), & i \neq j \end{cases}
$$

Покажемо за індукцією, що правильне таке співвідношення

$$
H_k^{\varepsilon(ij)}(t) = I^{(ij)} + H^{\varepsilon(jj)} * L_k^{\varepsilon(ij)}(t). \tag{8}
$$

Справді, при $k = 0$ одержуємо означення $H_0^{\varepsilon(ij)}(t)$. Якщо (8) доведено для всіх $n \leqslant k$, то

$$
\begin{aligned}
H_{k+1}^{\varepsilon(ij)}(t) &= H_0^{\varepsilon(ij)}(t) + \sum_{n \neq j} K^{\varepsilon(in)} * \left[I^{(nj)} + H^{\varepsilon(jj)} * L_k^{\varepsilon(nj)} \right](t) = \\
&= I^{(ij)} + K^{\varepsilon(ij)} * H^{\varepsilon(jj)}(t) + H^{\varepsilon(jj)} * \left[L_{k+1}^{\varepsilon(ij)} - K^{\varepsilon(ij)} \right](t) = \\
&= I^{(ij)} + H^{\varepsilon(jj)} * L_{k+1}^{\varepsilon(ij)}(t),
\end{aligned}
$$

що і треба було довести.

Перейшовши у (8) до границі при $k \to \infty$, отримуємо

$$
H^{\varepsilon(ij)}(t) = I^{(ij)} + H^{\varepsilon(jj)} * L^{\varepsilon(ij)}(t), \tag{9}
$$

а для матриць $H^{\varepsilon(jj)}(t)$ маємо рівняння відновлення

$$
H^{\varepsilon(jj)}(t) = I + H^{\varepsilon(jj)} * L^{\varepsilon(jj)}(t), \tag{10}
$$

в якому матриця $L^{\varepsilon(jj)}(\infty)$ є близькою до одиничної.

Позначимо

$$
M^{(ij)} = \int_0^\infty t L^{(ij)}(dt)
$$

і покажемо, що з умови

$$
R^{(ij)} = \int_0^\infty t K^{(ij)}(dt) < \infty,
$$

яка виконується згідно з умовою (C), випливає скінченність матриці $M^{(jj)}$. Застосувавши перетворення Лапласа до рівняння

$$
L^{(ij)}(t) = K^{(ij)}(t) + \sum_{n \neq j} K^{(in)} * L^{(nj)}(t),
$$

одержимо

$$
\widehat{L}^{(ij)}(p) = \widehat{K}^{(ij)}(p) + \sum_{n \neq j} \widehat{K}^{(in)}(p) \cdot \widehat{L}^{(nj)}(p),
$$

де ми використали такі позначення:

$$\widehat{L}^{(ij)}(p) = \int\limits_0^\infty e^{pt} L^{(ij)}(dt), \qquad \widehat{K}^{(ij)}(p) = \int\limits_0^\infty e^{pt} K^{(ij)}(dt).$$

Беручи до уваги те, що

$$\widehat{L}^{(ij)}(0) = L^{(ij)}(\infty) = I, \quad \widehat{K}^{(ij)}(0) = K^{(ij)}(\infty),$$

ми можемо записати

$$\frac{1}{p}\left[\widehat{L}^{(ij)}(p) - \widehat{L}^{(ij)}(0)\right] = \frac{1}{p}\left[\widehat{K}^{(ij)}(p) - \widehat{K}^{(ij)}(0)\right] +$$

$$+\sum_{n\neq j} \frac{1}{p}\left[\widehat{K}^{(in)}(p) - \widehat{K}^{(in)}(0)\right] \cdot \widehat{L}^{(nj)}(p) + \sum_{n\neq j} \frac{1}{p}\widehat{K}^{(in)}(0) \cdot \left[\widehat{L}^{(nj)}(p) - \widehat{L}^{(nj)}(0)\right].$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $p \to 0$ і врахувавши, що

$$\left(\widehat{L}^{(ij)}(0)\right)' = \int\limits_0^\infty tL^{(ij)}(dt) = M^{(ij)}, \quad \left(\widehat{K}^{(ij)}(0)\right)' = \int\limits_0^\infty tK^{(ij)}(dt) = R^{(ij)},$$

одержуємо

$$M^{(ij)} = \sum_{n=1}^{m} R^{(in)} + \sum_{n\neq j} K^{(in)}(\infty) M^{(nj)}.$$

Домножимо останню рівність на p_i та підсумуємо за всіма $i = \overline{1,m}$, використавши умову (5)

$$\sum_i p_i M^{(ij)} = \sum_{i,n} p_i R^{(in)} + \sum_{n\neq j} p_n M^{(nj)}.$$

Тоді

$$M^{(jj)} = \frac{1}{p_j} \sum_{i,n} p_i R^{(in)}.$$

Оскільки $R^{(ij)}$ є діагональною матрицею зі скінченними додатними діагональними елементами, то такою ж є і матриця $M^{(jj)}$. А тому існує обернена до неї матриця $[M^{(jj)}]^{-1}$.

Визначимо послідовність ρ^ε так:

$$\rho^\varepsilon = \sum_{s=1}^{d} \sum_{j=1}^{m} \rho_s^{\varepsilon(j)}, \quad \text{де} \quad \rho_s^{\varepsilon(j)} = \frac{1 - L_{ss}^{\varepsilon(jj)}(\infty)}{M_{ss}^{(jj)}}, \quad s = \overline{1,d};\ j = \overline{1,m}.$$

Зрозуміло, що $\rho^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Введемо сім'ю матриць $\{C^{\varepsilon(j)},\ j \in E\}$ з елементами

$$C_{ss}^{\varepsilon(j)} = -\frac{\rho_s^{\varepsilon(j)}}{\rho^\varepsilon}; \quad C_{sk}^{\varepsilon(j)} = \frac{L_{sk}^{\varepsilon(jj)}(\infty)}{\rho^\varepsilon M_{ss}^{(jj)}},\ s \neq k.$$

Оскільки

$$\left|C_{ss}^{\varepsilon(j)}\right| \leqslant 1, \quad C_{sk}^{\varepsilon(j)} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad s \neq k$$

і виконується нерівність

$$\sum_{k\neq s} C_{s\,k}^{\varepsilon(j)} = \frac{\sum\limits_{k\neq s} L_{s\,k}^{\varepsilon(jj)}(\infty)}{\rho^{\varepsilon}\, M_{ss}^{(jj)}} \leqslant \frac{1 - L_{s\,s}^{\varepsilon(jj)}(\infty)}{\rho^{\varepsilon}\, M_{ss}^{(jj)}} = \frac{\rho_s^{\varepsilon(j)}}{\rho^{\varepsilon}} \leqslant 1,$$

то існує границя $C^{(j)} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} C^{\varepsilon(j)}$. Отже, правильне таке зображення матриці $L^{\varepsilon(jj)}(\infty)$

$$L^{\varepsilon(jj)}(\infty) = I + \rho^{\varepsilon} M^{(jj)} C^{(j)} + o(\rho^{\varepsilon}), \quad \varepsilon \to 0.$$

Використовуючи результат праці [2], можемо стверджувати, що

$$\left[H^{\varepsilon(jj)}\left(\frac{t}{\rho^{\varepsilon}} + y\right) - H^{\varepsilon(jj)}\left(\frac{t}{\rho^{\varepsilon}}\right)\right] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} y \cdot e^{tC^{(j)}} \cdot [M^{(jj)}]^{-1}.$$

Зі співвідношення (9) випливає, що для довільних $i, j \in E$

$$\left[H^{\varepsilon(ij)}\left(\frac{t}{\rho^{\varepsilon}} + y\right) - H^{\varepsilon(ij)}\left(\frac{t}{\rho^{\varepsilon}}\right)\right] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} y \cdot e^{tC^{(j)}} \cdot [M^{(jj)}]^{-1}. \tag{11}$$

Сім'я $\{A^{\varepsilon(ij)}(t),\ i, j \in E\}$, як вже зазначалося, є рівномірно безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$ і існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty} A^{\varepsilon(ij)}(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty} \delta_{ij}\Gamma_i^{\varepsilon}(t) P_i\{t < \tau\}dt =$$

$$= \delta_{ij} \cdot \int_0^{\infty} \Gamma_i(t) P_i\{t < \tau\}dt = \delta_{ij} \cdot M_i \int_0^{\tau} \Gamma_i(t)dt.$$

Отож, у масштабі часу t/ρ^{ε} ми одержуємо таку асимптотику умовного математичного сподівання випадкової еволюції

$$X^{\varepsilon(ij)}\left(\frac{t}{\rho^{\varepsilon}}\right) = \sum_{l=1}^{m} H^{\varepsilon(il)} * A^{\varepsilon(lj)}\left(\frac{t}{\rho^{\varepsilon}}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} e^{tC^{(j)}} \cdot [M^{(jj)}]^{-1} \cdot M_j \int_0^{\tau} \Gamma_j(u)du.$$

Теорему доведено.

1. *Королюк В.С., Свищук А.В.* Полумарковские случайные эволюции. – К., 1992.
2. *Куцяя П.П.* Одна теорема многомерного восстановления// Изв. АН УССР. – 1989. – Т. 135. – N 3. – С.463–466.

I. Nishchenko

ON THE EXISTENCE OF A SMALL PARAMETER FOR A FAMILY OF SEMIMARKOV PROCESS

On the trajectories of a semimarkov process with a finit set state and continuous time we consider a family of random evolutions $N^{\varepsilon}(t)$. We have found such a scale of time in which asymptotic representation of the mean value of random evolution exist as $\varepsilon \to 0$.

Стаття надійшла до редколегії 20.01.2000