

УДК 539.3

ВІКТОР ОПАНАСОВИЧ, АНДРІЙ ШЕЛЕВАЧ

ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙСНЕРА З ПРЯМОЛІНІЙНОЮ ТРІЩИНОЮ, КРУТНИМИ МОМЕНТАМИ ТА ПЕРЕРІЗУВАЛЬНИМИ СИЛАМИ, ПРИКЛАДЕНИМИ ДО ЇЇ БЕРЕГІВ

У праці на основі методів теорії функцій комплексної змінної запропоновано спосіб зведення розв'язку задачі про згин пластини Рейснера з прямолінійною наскрізною тріщиною до системи сингулярних інтегральних рівнянь, коли до її берегів прикладені крутні моменти та перерізувальні сили. В праці [1] розглянуто задачу про кручення пластини з тріщиною рівномірно розподіленими на нескінченності крутними моментами, де розв'язок задачі зведений до парних інтегральних рівнянь, ці результати містить також [2].

1. Формулювання задачі та її розв'язок. Розглянемо безмежну ізотропну пластину постійної товщини h , яка містить наскрізну прямолінійну тріщину завдовжки $2l$. Вважаємо, що до берегів тріщини прикладено самозрівноважене навантаження у вигляді крутних моментів та перерізувальних сил. Крім того, під час деформації пластини береги тріщини не контактують, а згин пластини описується рівняннями теорії Рейснера. В середній площині пластини виберемо декартову систему координат з початком у центрі розрізу, направивши вісь Ox вздовж лінії перетину тріщини з цією площиною.

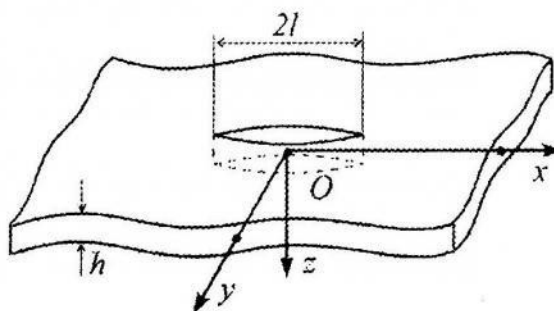


Рис.1.

Граничні умови задачі матимуть вигляд:

$$M_y^\pm = 0, \quad H_{xy}^\pm = 0, 5q_1(x), \quad Q_y^\pm = 0, 5q_2(x), \quad |x| < l. \quad (1)$$

Тут і надалі індексами "+" і "-" позначено граничне значення відповідних функцій при $y \rightarrow \pm 0$; M_y – згинальний момент; H_{xy} – крутний момент; Q_y – перерізувальна сила.

Крайові умови (1) перепишемо так:

$$M_y^+ - M_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ - H_{xy}^- = 0, \quad Q_y^+ - Q_y^- = 0, \quad |x| < l; \quad (2)$$

$$M_y^+ + M_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ + H_{xy}^- = q_1(x), \quad Q_y^+ + Q_y^- = q_2(x), \quad |x| < l. \quad (3)$$

Якщо ввести в розгляд комплексні потенціали $\Phi(z) = \phi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$ та функцію $\Omega(z, \bar{z})$ [2,3], то згинальні та крутні моменти, перерізувальні сили визначимо на підставі формул $M_y + M_x = 2m[\Phi(z) + \bar{\Phi}(z)]$,

$$M_y + iH_{xy} = m[\Phi(z) + \bar{\Phi}(z)] + n[z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z)] + \rho[2\bar{\Phi}''(z) + i\frac{\partial^2 \Omega(z, \bar{z})}{\partial z^2}], \quad (4)$$

$$Q_x - Q_y = -2D[2\Phi'(z) - i\frac{\partial \Omega(z, \bar{z})}{\partial z}], \quad (5)$$

$$det = -D(1 + \nu); \quad n = D(1 - \nu); \quad \rho = \frac{4D}{k^2}; \quad k = \frac{\sqrt{10}}{h}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)};$$

$$z = x + iy; \quad \bar{z} = x - iy; \quad i = \sqrt{-1}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad E, \nu - \text{відповідно}$$

модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Подамо функції $\Phi(z)$ та $\Omega(z, \bar{z})$ у вигляді

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{f(t)dt}{t - z}, \quad (6)$$

$$\Omega(z, \bar{z}) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{-l}^l \mu(t) \frac{WK_1(W)}{t - z} dt \right], \quad (7)$$

де $\mu(t)$, $f(t)$ – невідомі дійсні функції; $W = k\sqrt{(t - x)^2 + y^2}$; $K_j(x)$ – функція Макдональда j -го порядку.

Введемо у розгляд функцію

$$V(z) = q\bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z) + n_1\bar{q}(z), \quad (8)$$

причому

$$\bar{q}(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{\tilde{s}(t)dt}{(t - z)^3}, \quad \bar{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}, \quad \tilde{s}(t) = -2f(t) + \mu(t),$$

$$q = -\frac{1 + \nu}{1 - \nu}, \quad n_1 = \frac{2h^2}{5(1 - \nu)}.$$

Враховуючи (8), формулу (4) подамо у вигляді

$$M_y + iH_{xy} = n[q\Phi(z) + V(\bar{z}) + (z - \bar{z})\bar{\Phi}'(z) + in_1\bar{\Omega}_1(z, \bar{z})], \quad (9)$$

де

$$\bar{\Omega}_1(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{W[2\bar{K}_1(W) + WK_0(W)]\mu(t)}{(t - z)^3} dt +$$

$$+\frac{k^2}{4\pi}Re\left[\int_{-l}^l\frac{WK_1(W)\mu(t)}{t-z}dt\right]+\frac{k^6}{2\pi}\int_{-l}^l\frac{(x-t)^2}{W^3}K_1(W)(\bar{z}-t)\mu(t)dt,$$

$$\tilde{K}_1(W)=K_1(W)-\frac{1}{W}.$$

Враховуючи (6) і (7), формулу (5) перепишемо так:

$$Q_x-iQ_y=2D[P(z)+i\tilde{\Omega}(z,\bar{z})], \quad P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-l}^l\frac{\delta(t)dt}{(t-z)^2}, \quad (10)$$

$$\tilde{\Omega}(z,\bar{z})=\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^l\left[\frac{W^2\tilde{K}'_1(W)}{(t-z)^2}+\frac{ik^4y(t-\bar{z})K_0(W)}{W^2}\right]\mu(t)dt,$$

де $\delta(t)$ – невідома дійсна функція.

Функцію $V(z)$ шукатимемо у вигляді

$$V(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^l\frac{g(t)dt}{t-z}, \quad (11)$$

де $g(t)$ – невідома дійсна функція. Використовуючи граничні умови (2) та враховуючи (6), (9) – (11), матимемо

$$g(t)=qf(t), \quad t\in[-l,l], \quad (12)$$

при цьому вважаємо, що $\delta(\pm l)=0$.

Задовольняючи крайові умови (3) та враховуючи (6), (9) – (12), одержимо систему сингулярних інтегральних рівнянь для знаходження невідомих функцій $f(t)$ і $\delta(t)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-l}^l\frac{2q-k^2n_1W\tilde{K}'_2(W)}{t-x}f(t)dt+\frac{n_1k^2}{2\pi}\int_{-l}^l\tilde{K}'_2(W)\delta'(t)dt &= -\frac{1}{n}q_1(x), \\ \frac{2kD}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\int_{-l}^l\frac{WK_1(W)}{t-x}\delta'(t)dt+2k\int_{-l}^l\tilde{K}'_1(W)f(t)dt\right] &= -q_2(x), \quad (x\in[-l,l]), \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\tilde{K}_2(W)=K_2(W)-\frac{2}{W^2}, \quad W=k|t-x|.$$

Систему рівнянь (13) доповнюємо додатковими залежностями

$$\int_{-l}^lf(t)dt=0, \quad m_1\int_{-l}^ltf(t)dt-n_1\int_{-l}^l\delta'(t)dt=0, \quad m_1=\frac{4}{1-\nu}, \quad (14)$$

які відображають однозначність прогину і кутів повороту [4].

2. Числовий аналіз задачі. Розв'язок системи рівнянь (13), (14) шукатимемо за допомогою методу механічних квадратур [5,6]. Для прикладу розглянемо

два випадки прикладання навантаження до берегів тріщини. У першому до берегів тріщини прикладені сталі крутні моменти H і тому розв'язок системи рівнянь (13), (14) подамо у вигляді

$$f(lt) = -\frac{2H}{n} \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \delta'(lt) = -\frac{2H}{nl} \frac{v(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad |t| < 1;$$

у другому випадку до берегів тріщини прикладені сталі перерізувальні сили Q і розв'язок системи рівнянь (13), (14) доцільно подати у вигляді

$$f(lt) = -\frac{Q}{kD} \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \delta'(lt) = -\frac{Q}{lkD} \frac{v(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad |t| < 1.$$

Тут $u(t)$ і $v(t)$ – невідомі функції, для знаходження вузлових значень яких матимемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M [u(t_m) K_{j1}(t_m, x_r) + v(t_m) K_{j2}(t_m, x_r)] = C_j, \quad j = 1, 2, \quad r = \overline{1, M-1},$$

$$\sum_{m=1}^M u(t_m) = 0, \quad m_1 \sum_{m=1}^M t_m u(t_m) - n^* \sum_{m=1}^M v(t_m) = 0, \quad (15)$$

де $C_1 = 1, C_2 = 0$ для першого випадку; $C_1 = 0, C_2 = 1$ для другого випадку навантаження тріщини;

$$t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad x_r = \cos \frac{\pi r}{M},$$

$$K_{11}(t, x) = \frac{2q + m_1 [2\tilde{K}_2(W) - |x-t| K_1(W)]}{t-x},$$

$$K_{12}(t, x) = n_2 \tilde{K}_2(W), \quad K_{21}(t, x) = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{W} \tilde{K}_1(W) - \tilde{K}_2(W) \right),$$

$$K_{22}(t, x) = -\lambda \frac{W K_1(W)}{t-x}, \quad K_1(W) = \frac{1}{W} + \tilde{K}_1(W),$$

$$n^* = \lambda^2 m_1, \quad n_2 = 2m_1, \quad W = \frac{1}{\lambda} |t-x|, \quad \lambda = \frac{h}{l\sqrt{10}}.$$

Згідно з [7] функції $\tilde{K}_1(W)$ і $\tilde{K}_2(W)$ мають вигляд

$$\tilde{K}_1(W) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2(n+1)} + C + \ln \frac{W}{2} \right] \frac{\left(\frac{W}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!},$$

$$\tilde{K}_2(W) = -\frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+2)!} \left(\frac{W}{2}\right)^{2(k+1)} \left[\ln \frac{W}{2} + C - \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} - \frac{2k+3}{2(k+1)(k+2)} \right],$$

де C – стала Ейлера.

Розподіл силових і моментних чинників поблизу вістря тріщини має вигляд [8]

$$M_x - M_y - 2iH_{xy} = \frac{0,5(K_M^{(p)} - iK_H^{(p)})\bar{z}_j}{\sqrt{2z_j^3}} - \frac{0,5(K_M^{(p)} + 3iK_H^{(p)})}{\sqrt{2z_j}} + O(1),$$

$$M_x + M_y = 2\operatorname{Re}[(K_M^{(p)} - iK_H^{(p)})/\sqrt{2z_j}] + O(1),$$

$$Q_x - iQ_y = -\frac{iK_Q^{(p)}}{\sqrt{2z_j}} + O(1),$$

де $z_j = re^{i\theta}$; r, θ – полярні координати точки з початком у вершині тріщини; $K_M^{(p)}, K_H^{(p)}, K_Q^{(p)}$ – коефіцієнти інтенсивності моментів та перерізувальних сил, які для першого випадку визначаємо за формулами

$$K_M^{(p)} = 0, \quad K_H^{(p)} = h\sqrt{l}F_2(\lambda, \nu), \quad K_Q^{(p)} = \frac{\sqrt{10}H\sqrt{l}}{h(1+\nu)}F_3(\lambda, \nu),$$

і для другого випадку навантаження тріщини

$$K_M^{(p)} = 0, \quad K_H^{(p)} = \frac{1}{2} \frac{(1-\nu)Qh\sqrt{l}}{\sqrt{10}} F_2(\lambda, \nu), \quad K_Q^{(p)} = \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} Q\sqrt{l} F_3(\lambda, \nu).$$

У попередніх формулах введено позначення

$$F_2(\lambda, \nu) = -2 \frac{1+\nu}{1-\nu} u(1), \quad F_3(\lambda, \nu) = 2\lambda \frac{1+\nu}{1-\nu} v(1), \quad (16)$$

де

$$\begin{pmatrix} u(1) \\ v(1) \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} \begin{pmatrix} u(t_m) \\ v(t_m) \end{pmatrix} \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi.$$

Для чисельного розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (15) та для обчислення перехідних функцій $F_2(\lambda, \nu)$, $F_3(\lambda, \nu)$ (16) і приведених коефіцієнтів інтенсивності напружень

$$K_H^* = \frac{K_H^{(p)}}{Q\sqrt{l^3}}, \quad K_Q^* = \frac{K_Q^{(p)}}{Q\sqrt{l}}$$

було використано пакет прикладних програм "Delphi". Результати аналізу подано в табл. та на рис. 2 і 3. У таблиці наведено значення функцій $2F_2(\lambda, \nu)$, $F_3(\lambda, \nu)$ залежно від параметра $\lambda = \frac{h}{l\sqrt{10}}$ та коефіцієнта Пуассона ν для різної розмірності M матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (15) і постійному крутному моменту на її берегах. Друга стрічка для кожної функції відповідає $M=30$, третя $M=100$, збільшення M у два рази вже не призводить до покращення числових значень. Жирним шрифтом (перша стрічка) наведено результати праці [1]. Як видно з табл., деякі результати цієї праці збігаються з результатами публікації [1], а деякі відрізняються, що зумовлено недостатньою точністю виконаних у ній обчислень. Крім того, при $\lambda > 0.2$ для функції $F_2(\lambda, \nu)$ можна обмежитись, наприклад, $M=30$, а от для малих λ потрібно M збільшувати, це ж стосується до значень функції $F_3(\lambda, \nu)$ при різних параметрах λ і ν .

Графіки зміни приведених коефіцієнтів інтенсивності напружень K_H^* і K_Q^* залежно від параметра λ при різних значеннях ν зображено на рис. 2 і 3 при дії

ν		λ					
		0,05	0,2	1	1,5	2	2,5
0	$-F_3$	0,1051	0,1167	0,02824	-	-	-
		0,14768	0,11506	0,01065	0,00415	0,00207	0,00119
		0,12294	0,10565	0,00924	0,00340	0,00159	0,00092
	$2F_2$	0,1471	0,3576	0,7692	-	-	-
		0,14494	0,39440	0,42532	0,35227	0,29886	0,25931
		0,15868	0,39480	0,42532	0,35227	0,29886	0,25931
0,25	$-F_3$	0,1312	0,1382	0,02995	-	-	-
		0,18146	0,13673	0,01263	0,00497	0,00249	0,00145
		0,15170	0,12557	0,01119	0,00420	0,00200	0,00111
	$2F_2$	0,1647	0,3983	0,8050	-	-	-
		0,17720	0,47032	0,50478	0,42175	0,36011	0,31395
		0,19232	0,47073	0,50478	0,42175	0,36011	0,31395
0,5	$-F_3$	0,1567	0,1575	0,0302	-	-	-
		0,21417	0,15637	0,01440	0,00572	0,00288	0,00168
		0,17966	0,14363	0,01277	0,00483	0,00231	0,00129
	$2F_2$	0,1807	0,4336	0,8313	-	-	-
		0,20815	0,53950	0,57659	0,48560	0,41711	0,36528
		0,22428	0,53990	0,57659	0,48561	0,41711	0,36528

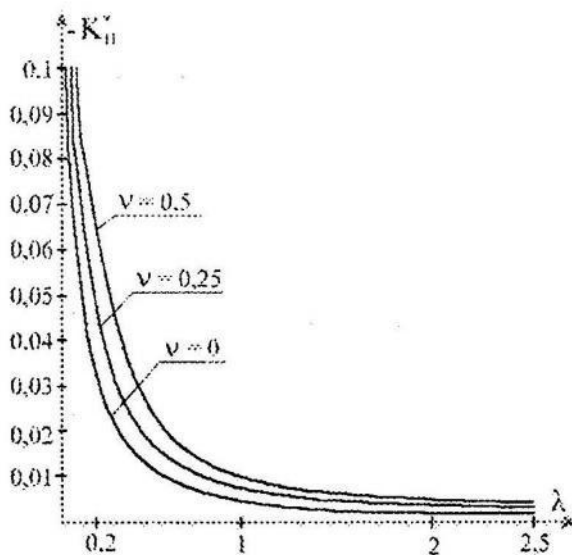


Рис. 2.

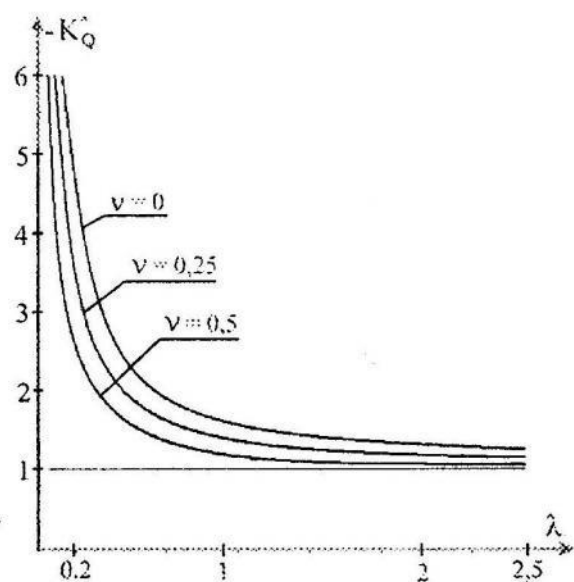


Рис. 3.

сталої на берегах тріщини перерізуювальної сили Q . Як видно з графіків, зі зменшенням параметра λ , тобто зі зменшенням товщини пластини або збільшенням

довжини тріщини, значення коефіцієнтів збільшуються за абсолютною величиною.

1. Wang N.M. Twisting of an elastic plate containing a crack // Int. J. Fract. Mech. – 1970. – Vol.6. – N4. – P.367-378.
2. Бережницький Л.Т., Делявський М.В., Панасюк В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – К., 1979.
3. Угодчиков А.Г., Соболев В.А. Концентрация напряжений около отверстий в плитах по теории Рейсснера // Прикл. механика. – 1972. – Т.8. – N6. – С. 58-66.
4. Тимошенко С.П., Войновски-Кригер. Пластины и оболочки. – М., 1966.
5. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишын А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К., 1976.
6. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К., 1981.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., 1971.
8. Мазурак Л.П., Бережницький Л.Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – К., 1990.

V. Opanasovych, A. Shelevach

**BEND OF THE REYSSNER'S PLATE
WITH A RECTILINEAL CRACK BY ROTATIONAL MOMENTS
AND CUTTING POWERS EXERTED TO ITS SIDES**

In the work with use of function theory system of complex variable the problem of bend of a isotropic plate with a crack according to Reyssner's theory has been studied, when to its sides rotational moments and cutting powers were exerted. The problem solution comes to a system of singular integral equations which are solved numerically with help of the method of mechanic quadratures. For constant load on the sides of the crack both a numerical analysis of transient functions connected with intensity coefficients of moments and cutting powers by different quantity of geometrical and mechanical problem parameters and a comparison of results with ones known in publications have been carried out.

Стаття надійшла до редколегії 07.07.99