ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.142–149

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.142–149

УДК 517.95

Неля Пабирівська

ТЕПЛОВІ МОМЕНТИ В ОБЕРНЕНІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Розв'язуючи обернені задачі дуже важливо вибрати вид додаткової інформації про розв'язок, який би допоміг однозначно визначити невідомі параметри досліджуваного процесу. Одне з джерел такої інформації – моменти. Спробу розв'язати пряму задачу теплопровідності, задаючи теплові моменти замість крайових умов, було зроблено в [1]. У цій праці теплові моменти використано при визначенні залежних від часу коефіцієнта температуропровідності та одного з молодших коефіцієнтів шляхом зведення поставленої задачі до задачі визначення двох молодших коефіцієнтів.

Обернені задачі визначення двох коефіцієнтів у параболічному рівнянні досліджені в працях [2 – 4].

В області $\Omega = \{(x,t):\ 0 < x < h,\ 0 < t < T\}$ розглянемо рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомими коефіцієнтами $a(t)$ та $b(t)$, з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant h, \tag{2}$$

та з крайовими умовами першого роду

$$u(0,t) = \nu_1(t), \quad u(h,t) = \nu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3}$$

Визначимо коефіцієнт температуропровідності $a(t)$, коефіцієнт при молодшому члені $b(t)$ та розв'язок $u(x,t)$ задачі (1)-(3) так, щоб задовольнялись умови

$$\int_0^h u(x,t)\,dx = \mu_1(t), \quad \int_0^h xu(x,t)\,dx = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4}$$

Означення. *Розв'язком оберненої задачі (1)-(4) будемо називати трійку функцій* $\big(a(t), b(t), u(x,t)\big)$ *з класу* $C[0,T]\times C[0,T]\times C^{2,1}(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$, *що задовольняють умови (1)-(4), причому* $a(t) > 0$ *на проміжку* $[0,T]$.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\varphi \in C^1[0,h]$, $\nu_i, \mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2$, *функція* $f \in C(\overline{\Omega})$ *і неперервна за Гельдером стосовно* x *в* $\overline{\Omega}$ *рівномірно по відношенню до* t *з показником* $\beta, 0 < \beta < 1$;

2) $\mu_2'(t)\big(\nu_2(t) - \nu_1(t)\big) - \mu_1'(t)\big(h\nu_2(t) - \mu_1(t)\big) > 0$, $h\nu_1(t) - \mu_1(t) \geqslant 0$, $\mu_1(t) - h\nu_2(t) \geqslant 0$, $\big(\nu_2(t) - \nu_1(t)\big)\int_0^h xf(x,t)\,dx - \big(h\nu_2(t) - \mu_1(t)\big)\int_0^h f(x,t)\,dx > 0$, $t \in [0,T]$; $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h]$;

3) $\nu_1(0) = \varphi(0), \quad \nu_2(0) = \varphi(h), \quad \int\limits_0^h \varphi(x)\,dx = \mu_1(0), \quad \int\limits_0^h x\varphi(x)\,dx = \mu_2(0).$

Тоді існує розв'язок задачі (1)-(4) при $x \in [0,h]$, $t \in [0,t_0]$, *де число* t_0, $0 < t_0 \leqslant T$, *визначається вихідними даними.*

Доведення. Зробимо в задачі (1)-(4) заміну

$$\eta = \theta(t), \quad \text{де} \quad \theta(t) = \int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Нехай $z(\eta)$ – функція, обернена до $\theta(t)$:

$$z(\eta) = t, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \theta_0, \quad \text{де} \quad \theta_0 = \theta(T).$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} U(x,\eta) &= u\big(x, z(\eta)\big), & F(x,\eta) &= f\big(x, z(\eta)\big), \\ A(\eta) &= a\big(z(\eta)\big), & N_i(\eta) &= \nu_i\big(z(\eta)\big), \quad i = 1,2, \\ B(\eta) &= b\big(z(\eta)\big), & M_i(\eta) &= \mu_i\big(z(\eta)\big), \quad i = 1,2. \end{aligned}$$

Задача (1)-(4) в цих позначеннях набуде вигляду

$$U_x = U_{xx} + P(\eta)U_x + R(\eta)F(x,\eta), \quad 0 < x < h, \quad 0 < \eta < \theta_0, \tag{5}$$

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant h, \tag{6}$$

$$U(0,\eta) = N_1(\eta), \quad U(h,\eta) = N_2(\eta), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \theta_0, \tag{7}$$

$$\int\limits_0^h U(x,\eta)\,dx = M_1(\eta), \quad \int\limits_0^h xU(x,\eta)\,dx = M_2(\eta), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \theta_0, \tag{8}$$

$$\text{де} \quad P(\eta) = \frac{B(\eta)}{A(\eta)}, \quad R(\eta) = \frac{1}{A(\eta)}. \tag{9}$$

Очевидно, що задача (1)-(4) визначення коефіцієнтів $a(t)$ та $b(t)$ еквівалентна оберненій задачі визначення двох молодших коефіцієнтів $P(\eta)$ та $R(\eta)$.

Зведемо задачу (5)-(8) до системи рівнянь стосовно $P(\eta)$ і $R(\eta)$. Домножуючи рівняння (5) на x^i, $i = 0,1$, інтегруючи за x від 0 до h і беручи до уваги умови (8), одержимо

$$\begin{cases} M_1'(\eta) = U_x(h,\eta) - U_x(0,\eta) + P(\eta)\big(N_2(\eta) - N_1(\eta)\big) + R(\eta)\displaystyle\int\limits_0^h F(x,\eta)\,dx, \\ M_2'(\eta) = hU_x(h,\eta) - N_2(\eta) + N_1(\eta) + P(\eta)\big(hN_2(\eta) - M_1(\eta)\big) + R(\eta)\displaystyle\int\limits_0^h xF(x,\eta)\,dx. \end{cases}$$

Зведемо отриману систему до вигляду

$$R(\eta) = \frac{P_1(\eta) + \big(N_2(\eta) - N_1(\eta)\big)^2 + P_2(\eta)U_x(h,\eta) + P_3(\eta)U_x(0,\eta)}{P_4(\eta)}, \tag{10}$$

$$P(\eta) = \frac{M_1'(\eta) + U_x(0,\eta) - U_x(h,\eta) - R(\eta)\int\limits_0^h F(x,\eta)\,dx}{N_2(\eta) - N_1(\eta)}, \tag{11}$$

де

$$P_1(\eta) = M_2'(\eta)\big(N_2(\eta) - N_1(\eta)\big) - M_1'(\eta)\big(hN_2(\eta) - M_1(\eta)\big),$$
$$P_2(\eta) = hN_1(\eta) - M_1(\eta), \quad P_3(\eta) = M_1(\eta) - hN_2(\eta),$$
$$P_4(\eta) = \big(N_2(\eta) - N_1(\eta)\big)\int\limits_0^h xF(x,\eta)\,dx - \big(hN_2(\eta) - M_1(\eta)\big)\int\limits_0^h F(x,\eta)\,dx,$$

$U(x,\eta)$ – розв'язок прямої задачі (5)-(7). Вважаючи тимчасово відомими неперервні функції $P(\eta)$, $R(\eta)$, запишемо цей розв'язок за допомогою функції Гріна [5] для рівняння теплопровідності і продиференціюємо його за x аналогічно до [6]:

$$U_x(x,\eta) = \int\limits_0^h \varphi'(\xi)G_2(x,\eta,\xi,0)\,d\xi + \int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \big(P(\tau)U_\xi(\xi,\tau)+$$
$$+R(\tau)F(\xi,\tau)\big)G_{1x}(x,\eta,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau - \int\limits_0^\eta N_1'(\tau)G_2(x,\eta,0,\tau)\,d\tau+$$
$$+\int\limits_0^\eta N_2'(\tau)G_2(x,\eta,h,\tau)\,d\tau. \tag{12}$$

До системи рівнянь (10)-(11) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора.

Перейшовши в умові 2) теореми до змінної η, отримаємо

$$P_1(\eta) > 0, \quad P_2(\eta) \geqslant 0, \quad P_3(\eta) \geqslant 0, \quad P_4(\eta) > 0. \tag{13}$$

Оскільки $U_x(x,0) = \varphi'(x)$, $x \in [0,h]$, то з умови 2) теореми і умов (13) випливає існування деякого проміжка $[0,\eta_0]$, $0 < \eta_0 \leqslant \theta_0$, на якому $R(\eta) > 0$ (число η_0 буде визначене нижче).

Визначимо оцінки розв'язків системи рівнянь (10), (11). Легко бачити, що

$$R(\eta) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,\theta_0]}\Big(P_1(\eta) + \big(N_2(\eta) - N_1(\eta)\big)^2\Big)}{\min\limits_{[0,\theta_0]} P_4(\eta)} +$$
$$+\frac{\max\limits_{[0,\theta_0]}\Big(P_2(\eta) + P_3(\eta)\Big)}{\min\limits_{[0,\theta_0]} P_4(\eta)}\max\limits_{[0,h]}|U_x(x,\eta)| = C_1 + C_2V(\eta), \tag{14}$$

де

$$V(\eta) = \max\limits_{[0,h]}|U_x(x,\eta)|.$$

Застосовуючи оцінку (14), з рівняння (11) знаходимо

$$|P(\eta)| \leqslant C_3 + C_4V(\eta). \tag{15}$$

Завдяки (14), (15) зі співвідношення (12) отримуємо оцінку

$$V(\eta) \leqslant C_5 + C_6 \int\limits_0^h \frac{V^2(\tau) + V(\tau)}{\sqrt{\eta - \tau}}\, d\tau \leqslant C_5 + C_6 \int\limits_0^h \frac{\left(V(\tau) + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{\eta - \tau}}\, d\tau. \tag{16}$$

Позначивши $W(\eta) = V(\eta) + \frac{1}{2}$, матимемо

$$W(\eta) \leqslant C_7 + C_6 \int\limits_0^h \frac{W^2(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\eta - \tau}}. \tag{17}$$

Піднесемо нерівність (17) до квадрата і, змінивши η на σ та домноживши ліву і праву частини нерівності на $\dfrac{1}{\sqrt{\eta - \sigma}}$, проінтегруємо її від 0 до η. Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, в результаті одержимо:

$$\int\limits_0^h \frac{W^2(\sigma)\, d\sigma}{\sqrt{\eta - \sigma}} \leqslant 4C_7^2\sqrt{\theta_0} + 4\pi C_6^2\sqrt{\theta_0} \int\limits_0^h W^4(\tau)\, d\tau.$$

Повертаючись до оцінки (17), прийдемо до нерівності

$$W(\eta) \leqslant C_7 + \sqrt{\theta_0}\left(C_8 + C_9 \int\limits_0^h W^4(\tau)\, d\tau\right). \tag{18}$$

Позначивши праву частину (18) через $K(\eta)$, знаходимо

$$K'(\eta) \leqslant \sqrt{\theta_0}\, C_9 K^4(\eta).$$

Розділивши останню нерівність на $K^4(\eta)$, замінимо η на τ і зінтегруємо за τ від 0 до η. Отриману нерівність розв'яжемо стосовно $K(\eta)$, враховуючи, що $K(0) = C_7 + \sqrt{\theta_0}C_8$:

$$K(\eta) \leqslant \frac{C_7 + \sqrt{\theta_0}C_8}{\sqrt[3]{1 - 3C_9\sqrt{\theta_0}\left(C_7 + \sqrt{\theta_0}C_8\right)^3 \eta}}.$$

Зафіксуємо число η_1, $0 < \eta_1 \leqslant \theta_0$, так, щоб виконувалась нерівність

$$1 - 3C_9\sqrt{\theta_0}\left(C_7 + \sqrt{\theta_0}C_8\right)^3 \eta_1 > 0. \tag{19}$$

Тоді

$$K(\eta) \leqslant C_{10}, \quad \eta \in [0, \eta_1]. \tag{20}$$

Завдяки оцінкам (18), (20) з (16), (14), (15) одержуємо

$$|U_x(x, \eta)| \leqslant C_{11} < \infty, \quad (x, \eta) \in [0, h] \times [0, \eta_1], \tag{21}$$

$$R(\eta) \leqslant C_{12} < \infty, \quad \eta \in [0, \eta_1], \tag{22}$$

$$|P(\eta)| \leqslant C_{13} < \infty, \quad \eta \in [0, \eta_1]. \tag{23}$$

Враховуючи рівняння (10), оцінимо $R(\eta)$ знизу

$$R(\eta) \geqslant \left(\min_{[0,\eta_1]} \left(P_1(\eta) + \left(N_2(\eta) - N_1(\eta) \right)^2 \right) + \min_{[0,\eta_1]} \left(P_2(\eta) + P_3(\eta) \right) \left(\min_{[0,h]} \varphi'(x) - \right.\right.$$
$$- \int_0^\eta \int_0^h \left(\left| P(\tau) \right| \cdot \left| U_\xi(\xi,\tau) \right| + R(\tau) \left| F(\xi,\tau) \right| \right) \left| G_{1x}(x,\eta,\xi,\tau) \right| d\xi \, d\tau -$$
$$\left.\left. - \int_0^t \left| N_1'(\tau) \right| G_2(x,\eta,0,\tau) \, d\tau - \int_0^t \left| N_2'(\tau) \right| G_2(x,\eta,h,\tau) \, d\tau \right) \right) \left(\max_{[0,\eta_1]} P_4(\eta) \right)^{-1}.$$

Використовуючи оцінки (21)-(23) та умови 1), 2) теореми, отримаємо

$$R(\eta) \geqslant C_{14} - C_{15}\eta - C_{16}\sqrt{\eta}.$$

Зафіксуємо число η_0, $0 < \eta_0 \leqslant \eta_1$, так, щоб виконувалась нерівність

$$C_{14} - C_{15}\eta_0 - C_{16}\sqrt{\eta_0} > 0. \tag{24}$$

Тоді

$$R(\eta) \geqslant C_{17} > 0, \quad \eta \in [0, \eta_0]. \tag{25}$$

Отже, оцінки розв'язків системи (10), (11) визначено. Подальша перевірка виконання умов теореми Шаудера виконується аналогічно до праці [6], що дає існування розв'язку системи рівнянь (10), (11) на проміжку $[0, \eta_0]$, де число η_0 визначається з нерівності (24). Отже, розв'язок задачі (5)-(8) існує на проміжку $[0, \eta_0]$.

Повертаючись до змінної t і невідомих задачі (1)-(4), з (9) одержуємо систему рівнянь стосовно $a(t)$ та $b(t)$:

$$\begin{gathered} a(t) = \frac{1}{R\left(\theta(t)\right)}, \\ b(t) = a(t) P\left(\theta(t)\right), \quad t \in [0, t_0], \end{gathered} \tag{26}$$

(число t_0 буде визначене нижче).

З першого рівняння системи (26) матимемо

$$\int_0^{\theta(t)} R(z) \, dz = t, \quad t \in [0, t_0]. \tag{27}$$

Застосовуючи оцінку (25) до функції $r(s) = \int_0^s R(z)\,dz$, отримаємо $r(s) \geqslant C_{17}s$, $\lim\limits_{s\to\infty} r(s) = +\infty$ і $r'(s) = R(s)$ – неперервна функція. Це означає, що існує функція $r^{-1}(s)$, обернена до $r(s)$ і визначена на проміжку $[0, \infty)$. Враховуючи це, з (27) матимемо

$$\theta(t) = r^{-1}(t), \quad t \in [0, t_0].$$

Повертаючись до системи (26), знаходимо

$$a(t) = \frac{1}{R\left(r^{-1}(t)\right)}, \quad b(t) = \frac{P\left(r^{-1}(t)\right)}{R\left(r^{-1}(t)\right)}, \quad t \in [0, t_0], \tag{28}$$

тобто розв'язок задачі (1)-(4) існує при $t \in [0, t_0]$.

Визначимо довжину проміжка, на якому існує розв'язок задачі (1)-(4).

Завдяки оцінці (25), зі співвідношення (28) одержуємо

$$a(t) \leqslant \frac{1}{C_{17}}.$$

Тоді з (19) та (24), враховуючи, що $\eta = \theta(t) = \int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau$, отримуємо нерівності, які визначають число t_0:

$$1 - \frac{3C_9\sqrt{T}}{\sqrt{C_{17}^3}}\left(C_7 + C_8\sqrt{\frac{T}{C_{17}}}\right)^3 t_0 > 0, C_{14} - \frac{C_{15}}{C_{17}}t_0 - \frac{C_{16}}{\sqrt{C_{17}}}\sqrt{t_0} > 0.$$

Єдиність розв'язку задачі (1)-(4) визначає теорема 2.

Теорема 2. *Розв'язок задачі (1)-(4) єдиний, якщо виконується умова*

$$\big(\nu_2(t) - \nu_1(t)\big)\int\limits_0^h xf(x,t)\,dx - \big(h\nu_2(t) - \mu_1(t)\big)\int\limits_0^h f(x,t)\,dx \neq 0, \quad t \in [0,T]. \qquad (29)$$

Доведення. Оскільки задачі (1)-(4) та (5)-(8) еквівалентні, то з єдиності розв'язку задачі (5)-(8) буде випливати єдиність розв'язку задачі (1)-(4).

Доведемо єдиність розв'язку задачі (5)-(8) від супротивного.

Припускаючи, що $\big(P_i(\eta), R_i(\eta), U_i(x,\eta)\big)$, $i = 1, 2,$ – два розв'язки задачі (5)-(8), для їхньої різниці

$$v(x,\eta) = U_1(x,\eta) - U_2(x,\eta), \quad l(\eta) = P_1(\eta) - P_2(\eta), \quad m(\eta) = R_1(\eta) - R_2(\eta)$$

одержуємо

$$v_\eta = v_{xx} + P_2(\eta)v_x + l(\eta)U_{1x}(x,\eta) + m(\eta)F(x,\eta), \quad (x,\eta) \in (0,h)\times(0,\theta_0), \qquad (30)$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \qquad (31)$$

$$v(0,\eta) = 0, \quad v(h,\eta) = 0, \quad \eta \in [0,\theta_0], \qquad (32)$$

$$\int\limits_0^h v(x,\eta)\,dx = 0, \quad \int\limits_0^h xv(x,\eta)\,dx = 0, \quad \eta \in [0,\theta_0]. \qquad (33)$$

Інтегруючи за x від 0 до h рівняння (30) та рівняння, отримане з (30) множенням на x, враховуючи умови (32), (33), приходимо до системи рівнянь

$$\left\{\begin{array}{rcl} \big(N_2(\eta) - N_1(\eta)\big)l(\eta) - m(\eta)\int\limits_0^h F(x,\eta)\,dx & = & v_x(0,\eta) - v_x(h,\eta), \\ \big(hN_2(\eta) - M_1(\eta)\big)l(\eta) - m(\eta)\int\limits_0^h xF(x,\eta)\,dx & = & -hv_x(h,\eta), \end{array}\right. \qquad (34)$$

де $v(x,\eta)$ – розв'язок задачі (30)-(32). Записуючи цей розв'язок за допомогою функції Гріна $G(x,\eta,\xi,\tau)$ [7] для рівняння

$$v_\eta = v_{xx} + P_2(\eta)v_x,$$

продиференціюємо його за x; в результаті одержимо:

$$v_x(x,\eta) = \int\limits_0^\eta \int\limits_0^h \big(l(\tau)U_{1\xi}(\xi,\tau) + m(\tau)F(\xi,\tau)\big)G_x(x,\eta,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Якщо виконується умова

$$\big(N_2(\eta) - N_1(\eta)\big)\int\limits_0^h xF(x,\eta)\,dx - \big(hN_2(\eta) - M_1(\eta)\big)\int\limits_0^h F(x,\eta)\,dx \neq 0, \qquad (35)$$

то система рівнянь (34) зводиться до нормального вигляду. Отримана система буде однорідною системою інтегральних рівнянь Вольтери другого роду

$$l(\eta) = \int\limits_0^\eta \big(K_{11}(\eta,\tau)l(\eta) + K_{12}(\eta,\tau)m(\tau)\big)\,d\tau,$$

$$m(\eta) = \int\limits_0^\eta \big(K_{21}(\eta,\tau)l(\eta) + K_{22}(\eta,\tau)m(\tau)\big)\,d\tau, \quad \tau \in [0,\theta_0],$$

з інтегровними ядрами $K_{ij}(\eta,\tau)$, $i,j = 1,2$. Звідси випливає, що $l(\eta) \equiv 0$, $m(\eta) \equiv 0$, $\eta \in [0,\theta_0]$, а також $v(x,\eta) \equiv 0$, $(x,\eta) \in [0,h] \times [0,\theta_0]$, тобто розв'язок задачі (5)-(8) єдиний, якщо виконується умова (35). Ця умова при переході до змінної t перетворюється в умову (29). Отже, умова (29) гарантує єдиність розв'язку задачі (1)-(4). Теорему доведено.

1. *Вігак В.М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами // Доп. АН України. – 1994. – № 8. – С. 57-60.

2. *Иванчов Н.И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн. – 1994. – Т. 35. – № 3. – С. 612-621.

3. *Искендеров А.Д.* Регуляризация одной многомерной обратной задачи и ее оптимизационной постановки // Док. АН АзССР. – 1984. – Т.40. – № 9. – С. 11-15.

4. *Музылёв Н.П.* О единственности решения одной обратной задачи нелинейной теплопроводности // Журн. выч. мат. и мат. физики. – 1985. – Т.25. – № 9. – С. 1346-1352.

5. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М., 1970.

6. *Иванчов Н.И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39. – № 3. – С. 539-550.

7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

N. Pabyrivs'ka

INTEGRAL CONDITIONS IN AN INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION

We establish the existence and uniqueness condition for solution of an inverse problem for a parabolic equation with two unknown time-dependent coefficients in the case of integral overdetermination conditions.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99