ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.150–156 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.150–156*

УДК 517.9

Сергій Підкуйко

НЕІНТЕГРОВНІ ГАМІЛЬТОНОВІ СИСТЕМИ РЕДУКОВАНОЇ ЗАДАЧІ ТРЬОХ ТІЛ НА ПРЯМІЙ З ПОТЕНЦІАЛОМ ВЗАЄМОДІЇ НАЙБЛИЖЧИХ СУСІДІВ

Розглядається клас гамільтонових систем задачі трьох тіл (частинок, точок) на прямій з потенціалом взаємодії найближчих сусідів. Такі гамільтонові системи описуються гамільтоніанами вигляду

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + V(x_1 - x_2) + W(x_2 - x_3)\,, \tag{1}$$

де x_j, p_j позначають, відповідно, координату та імпульс j-ої точки, а функції V, W – потенціали взаємодії між першою і другою та другою і третьою точками цієї гамільтонової системи.

На функції V, W накладемо такі умови:

I. V, W аналітичні в деяких околах точок a і b, відповідно;

II. $V'(a) = W'(b) = 0$;

III. $V''(a) > 0$, $W''(b) > 0$. Нехай $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)$ – точка фазового простору гамільтонової системи (1),де $a_1 - a_2 = a$, $a_2 - a_3 = b$. Тоді гамільтоніан H буде аналітичним в деякому околі цієї точки, і матиме в цій точці локальний мінімум.

Оскільки гамільтонова система (1) має два функціонально незалежних перших інтеграли – сам гамільтоніан (1) і повний імпульс

$$P = p_1 + p_2 + p_3\,, \tag{2}$$

то для повної інтегровності системи (1) досить ще одного додаткового першого інтеграла, функціонально незалежного з H і P, і який перебуває в інволюції з P. (Треба зазначити, що до повного інволютивного набору перших інтегралів функцію P включати не обов'язково, але тоді для повної інтегровності системи (1) потрібно два додаткових перших інтеграли, що перебувають в інволюції і разом з H утворюють функціонально незалежну трійку функцій).

Природно шукати перші інтеграли з того самого класу гладкості, до якого належить сам гамільтоніан H, тобто які задовольняють умову аналітичності в околі точки $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)$.

Визначимо редуковану стосовно повного моменту гамільтонову систему (1).Канонічним перетворенням

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2, & q_1 &= (2p_1 - p_2 - p_3)/3,\\ y_2 &= x_2 - x_3, & q_2 &= (p_1 + p_2 - 2p_3)/3,\\ y &= x_1 + x_2 + x_3, & q &= (p_1 + p_2 + p_3)/3, \end{aligned}$$

гамільтонова система (1) зводиться до вигляду

$$J = \frac{3}{2}\, q^2 + (q_1^2 + q_2^2 - q_1\, q_2) + V(y_1) + W(y_2). \tag{3}$$

Гамільтонову систему з гамільтоніаном

$$K = p_1^2 + p_2^2 - p_1\, p_2 + V(a + x_1) + W(b + x_2) \tag{4}$$

називатимемо *редукованою стосовно повного моменту* (2)гамільтоновою системою задачі трьох тіл (частинок, точок) на прямій з потенціалом взаємодії найближчих сусідів.

Правильна така лема.

Лема 1. *Гамільтонова система (1) допускає аналітичний в околі точки* $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)$ *перший інтеграл, який перебуває в інволюції з* P, *і який є функціонально незалежним з* H *і* P, *тоді й лише тоді, коли гамільтонова система (4) допускає аналітичний в околі точки* $(0, 0, 0, 0)$ *перший інтеграл, функціонально незалежний з* K.

У цій праці доведено аналог відомого результату Зігеля [1] (і його узагальнення, доведеного автором [6]) про щільність у класі гамільтонових систем (4) множини неінтегровних гамільтоніанів (з цього ж класу).

Основний результат роботи сформульовано в теоремах, які згідно з лемою 1 є еквівалентними.

Теорема 1. *Нехай* $\{\varepsilon_k\}$ *довільна додатна послідовність, нехай потенціали* V, W *гамільтонової системи (1)задовольняють умови I, II, III.*

Тоді знайдеться такий потенціал $\widetilde{W}$, *що задовольняє умови I, II і III, для якого:*

1)

$$|W^{(k)}(b) - \widetilde{W}^{(k)}(b)| < \varepsilon_k\,, \qquad k = 2, 3, \dots\,; \tag{5}$$

2) будь-який аналітичний в околі точки $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)$ *перший інтеграл гамільтонової системи*

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(x_1 - x_2) + \widetilde{W}(x_2 - x_3)\,, \tag{6}$$

який перебуває в інволюції з P, *є функцією від* $\widetilde{H}$ *і* P.

Теорема 2. *Нехай* $\{\varepsilon_k\}$ *довільна додатна послідовність, і нехай потенціали* V, W *гамільтонової системи (4) задовольняють умови I, II і III.*

Тоді знайдеться такий потенціал $\widetilde{W}$, *що задовольняє умови I, II і III, для якого:*

1)

$$|W^{(k)}(b) - \widetilde{W}^{(k)}(b)| < \varepsilon_k\,, \qquad k = 2, 3, \dots\,; \tag{7}$$

2) будь-який аналітичний в околі точки $(0, 0, 0, 0)$ *перший інтеграл гамільтонової системи*

$$\widetilde{K} = \frac{1}{2}\,(p_1^2 + p_2^2) + V(a + x_1) + \widetilde{W}(b + x_2)\,, \tag{8}$$

є функцією від $\widetilde{K}$.

Доведення теореми 2. Доведення теореми 2 спирається на кілька лем.

Лема 2. *Існує такий потенціал W_1, що задовольняє умови I, II і III, для якого:*
1)

$$|W_1''(b) - W''(b)| < \frac{1}{2}\varepsilon_2\,, \qquad W_1^{(k)}(b) = W^{(k)}(b)\,, \qquad k = 3,\, 4, \dots\,; \tag{9}$$

2) існує лінійне канонічне перетворення змінних $(x_1, x_2, p_1, p_2) \mapsto (u_1, u_2, v_1, v_2)$, яке квадратичну частину K_2 гамільтонової системи з гамільтоніаном

$$K = p_1^2 + p_2^2 - p_1\,p_2 + V(a + x_1) + W_1(b + x_2) \tag{10}$$

зводить до нормальної форми

$$E_2 = \lambda_{11}\,u_1\,v_1 + \lambda_{12}\,u_2\,v_2\,, \tag{11}$$

де коефіцієнти λ_{11}, λ_{12} – чисто уявні та раціонально незалежні.

Доведення леми 2. Введемо позначення

$$c_0 = V''(a), \quad d_0 = W''(b). \tag{12}$$

Відомо [1], що стовпці матриці такого канонічного перетворення є власними векторами матриці лінійної частини канонічних рівнянь Гамільтона, яка в нашому випадку має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -c_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_0^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристичний многочлен цієї матриці має вигляд

$$\lambda^4 + \lambda^2\,(c_0^2 + d_0^2) + 3\,c_0^2\,d_0^2\,.$$

Звідси знаходимо власні значення

$$\pm\, i\,\sqrt{c_0^2 + d_0^2 \pm \sqrt{c_0^4 - c_0^2\,d_0^2 + d_0^4}}\,.$$

Підставимо замість d_0 в матрицю параметр d і розглянемо власні значення матриці як функції від d:

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(d) = i\,\sqrt{c_0^2 + d^2 \pm \sqrt{c_0^4 - c_0^2\,d^2 + d^4}}\,. \tag{13}$$

Оскільки

$$\frac{\lambda_1(d)}{\lambda_2(d)} = \frac{c_0^2 + d^2 + \sqrt{c_0^4 - c_0^2\,d^2 + d^4}}{\sqrt{3}\,c_0\,d}\,, \tag{14}$$

то в околі $(d_0 - \varepsilon_2/2,\, d_0 + \varepsilon_2/2)$ знайдеться таке d_1, що $\dfrac{\lambda_1(d_1)}{\lambda_2(d_1)}$ – ірраціональне число. Тоді

$$\lambda_{11} = \lambda_1(d_1)\,, \qquad \lambda_{12} = \lambda_2(d_1).$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $d_1 > c_0$ і ε_2 настільки мале (якщо потрібно, то його можна зменшити), що $d_1 - \varepsilon_2/2 > c_0$ і

$$\left|\frac{\lambda_2(d)}{\lambda_2(d_1)}\right| < 2\,, \qquad \forall d \in [d_1 - \varepsilon_2/2\,,\, d_1 + \varepsilon_2/2]\,. \tag{15}$$

Введемо позначення:

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{1,2}(d) = \left(c_0^2 + d^2 \pm \sqrt{c_0^4 - c_0^2\, d^2 + d^4} \right)^{1/4} .$$

Тоді

$$x_2 = \frac{\alpha_1(d)}{2d}\, u_1 + \frac{\alpha_2(d)}{2d}\, u_2 + i\, \frac{\alpha_1(d)}{2d}\, v_1 + i\, \frac{\alpha_2(d)}{2d}\, v_2. \tag{16}$$

Нехай

$$\beta = \min \left\{ \left| \frac{\alpha_1(d)}{2d} \right|, \left| \frac{\alpha_2(d)}{2d} \right| \Big/ d \in [d_1 - \varepsilon_2/2,\, d_1 + \varepsilon_2/2] \right\} . \tag{17}$$

Тоді $\beta > 0$.

Визначимо додатну послідовність $\{\epsilon_n\}$:

$$\epsilon_n = \varepsilon_n\, \frac{\beta^n}{n!}, \qquad n = 3, 4, \ldots, \tag{18}$$

а ϵ_2 настільки мале, що

$$\frac{|\lambda_{11}| \pm \epsilon_2}{|\lambda_{12}|} \in \left(\frac{\lambda_1(d_1 - \varepsilon_2/2)}{\lambda_2(d_1 - \varepsilon_2/2)}, \frac{\lambda_1(d_1 + \varepsilon_2/2)}{\lambda_2(d_1 + \varepsilon_2/2)} \right) . \tag{19}$$

Згідно з [1] виберемо два цілих числа q, r, що задовольняють нерівності,

$$q > 1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} + 2\,|\lambda_{12}|\, {\epsilon_2}^{-1} , \tag{20}$$

$$\left| q\, \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} + r \right| < 1 , \tag{21}$$

і визначимо три послідовності $\{q_m\}, \{r_m\}, \{l_m\}$, $(m = 1, 2, \ldots)$:

$$l_m = q_m + |r_m|, \tag{22}$$

$$r_m = q_m \left(\frac{r}{q} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{q_k} \right) , \tag{23}$$

$$q_1 = q^2, \tag{24}$$

де q_{m+1} є найменшим цілим степенем q, що задовольняє нерівність

$$q_{m+1} > q_m^2 + 4\,|\lambda_{12}|\, {\epsilon_{l_m}}^{-1}\, {l_m}^{m l_m} . \tag{25}$$

Нехай

$$\widetilde{\lambda}_2 = \lambda_{12} , \qquad \widetilde{\lambda}_1 = \lambda_{12} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_m} - \frac{r}{q} \right) . \tag{26}$$

Тоді

1) послідовність $\{l_m\}$ строго зростає, $l_1 \geqslant 4$;

2) числа $\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2$ є чисто уявними та раціонально незалежними, $|\widetilde{\lambda}_1 - \lambda_{11}| < \epsilon_2$;

3) правильна оцінка

$$q_m\, |\widetilde{\lambda}_1\, q_m + \widetilde{\lambda}_2\, r_m|^{-1}\, \epsilon_{l_m} > 2\, {l_m}^{m l_m} , \qquad m = 1, 2, \ldots . \tag{27}$$

Лема 3. *Існує такий потенціал W_2, що задовольняє умови I, II і III, для якого:*
1)

$$|W_2''(b) - W''(b)| < \varepsilon_2\,, \qquad W_2^{(k)}(b) = W^{(k)}(b)\,, \qquad k = 3,\,4,\,\dots\,; \tag{28}$$

2) існує лінійне канонічне перетворення змінних $(x_1, x_2, p_1, p_2) \mapsto (u_1, u_2, v_1, v_2)$, яке квадратичну частину K_2 гамільтонової системи з гамільтоніаном

$$K = p_1^2 + p_2^2 - p_1\,p_2 + V(a + x_1) + W_2(b + x_2) \tag{29}$$

зводить до нормальної форми

$$E_2 = \lambda_{21}\,u_1\,v_1 + \lambda_{22}\,u_2\,v_2\,, \tag{30}$$

де коефіцієнти λ_{21}, λ_{22} – чисто уявні та раціонально незалежні, і задовольняють такі умови:

$$\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}} = \frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_2}\,, \qquad \left|\frac{\lambda_{22}}{\widetilde{\lambda}_2}\right| < 2. \tag{31}$$

Доведення леми 3. Згідно з (19) і внаслідок неперервності функції $\dfrac{\lambda_1(d)}{\lambda_2(d)}$

$$\exists\, d_2 \in (d_1 - \varepsilon_2/2\,,\, d_1 + \varepsilon_2/2): \qquad \frac{\lambda_1(d_2)}{\lambda_2(d_2)} = \frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_2}\,. \tag{32}$$

Візьмемо

$$W_2''(b) = d_2\,, \quad \lambda_{21} = \lambda_1(d_2)\,, \quad \lambda_{22} = \lambda_2(d_2)\,.$$

Оцінка (28) випливає з леми 2, а оцінка (31) випливає з (15).

Позначимо гамільтоніан K, записаний у нових змінних (u_1, u_2, v_1, v_2), через E. Гамільтоніан E задовольняє систему канонічних рівнянь Гамільтона

$$\dot u_k = E_{v_k}\,, \quad \dot v_k = -E_{u_k}\,, \qquad k = 1,\,2. \tag{33}$$

В околі точки $(0,\,0,\,0,\,0)$ його можна розкласти в ряд Тейлора

$$E = \sum_{n=2}^{\infty} E_n\,, \tag{34}$$

де E_n позначає однорідну степеня n компоненту степеневого ряду E.

Гамільтоніан $\widetilde{K}$, записаний у нових змінних, позначимо через $\widetilde{E}$. Тоді

$$\widetilde{E} = \sum_{n=2}^{\infty} \widetilde{E}_n\,.$$

Крім того, введемо таке позначення: для однорідного многочлена G від кількох змінних через $\overline{|G|}$ позначатимемо абсолютну величину максимального за модулем коефіцієнта многочлена G.

Відомо [1], що існує такий ("біркгофівський") перший інтеграл s гамільтонової системи (33),

$$s = u_1\,v_1 + \sum_{n=3}^{\infty} s_n\,, \tag{35}$$

без членів вигляду

$$c\prod_{k=1}^{n}(u_k\, v_k)^{\alpha_k}\,, \qquad \alpha_1+\cdots+\alpha_n>1\,, \tag{36}$$

що кожен перший інтеграл системи (33) є рядом за степенями E, s.

Потрібно зазначити, що степеневий ряд s є загалом розбіжний.

Позначимо через $\widetilde{s}$ відповідний ("біркгофівський") інтеграл гамільтонової системи з гамільтоніаном $\widetilde{E}$.

Лема 4. *Існує такий потенціал* $\widetilde{W}$, *що задовольняє умови I, II і III, для якого*

$$\widetilde{W}''(b)=W_2''(b), \tag{37}$$

$$\widetilde{W}^{(n)}(b)=W^{(n)}(b)\,, \qquad n\notin\{l_m\,/\,m=1,2,\dots\}, \tag{38}$$

$$\widetilde{W}^{(l_m)}(b)=W^{(l_m)}(b)\pm\frac{1}{2}\,\varepsilon_{l_m}\,, \qquad m=1,2,\dots. \tag{39}$$

До того ж у (39) знаки $(+)$ *або* $(-)$ *можна вибрати так, що*

$$\overline{|\widetilde{s}_{l_m}|}>\frac{1}{2}\,{l_m}^{ml_m}\,, \qquad m=1,2,\dots. \tag{40}$$

Доведення леми 4. Оскільки $\widetilde{s}$ є першим інтегралом гамільтонової системи з гамільтоніаном $\widetilde{E}$, то його дужка Пуассона з $\widetilde{E}$ дорівнює нулю,

$$\{\widetilde{s},\,\widetilde{E}\}=0\,.$$

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned}\lambda_{21}\left(u_1\frac{\partial\widetilde{s}_l}{\partial u_1}-v_1\frac{\partial\widetilde{s}_l}{\partial v_1}\right)+\lambda_{22}\left(u_2\frac{\partial\widetilde{s}_l}{\partial u_2}-v_2\frac{\partial\widetilde{s}_l}{\partial v_2}\right)=\\ =u_1\frac{\partial\widetilde{E}_l}{\partial u_1}-v_1\frac{\partial\widetilde{E}_l}{\partial v_1}-\sum_{k=2}^{l}\{\widetilde{s}_k,\,\widetilde{E}_{l+2-h}\}=0\,, \qquad l=3,4,\dots.\end{aligned} \tag{41}$$

Позначимо $s_{m_1m_2n_1n_2}u_1^{m_1}u_2^{m_2}v_1^{n_1}v_2^{n_2}$, $E_{m_1m_2n_1n_2}u_1^{m_1}u_2^{m_2}v_1^{n_1}v_2^{n_2}$, $\quad m_1+m_2+n_1+n_2=l$, відповідні одночлени поліномів $\widetilde{s}_l$, $\widetilde{E}_l$. Тоді вираз

$$s_{m_1m_2n_1n_2}-\frac{m_1-n_1}{\lambda_{21}\,(m_1-n_1)+\lambda_{22}\,(m_2-n_2)}\,E_{m_1m_2n_1n_2} \tag{42}$$

залежить лише від m_1, m_2, n_1, n_2 і коефіцієнтів поліномів $\widetilde{s}_k, \widetilde{E}_k$, $k=3,4,\dots l-1$. Для $l=l_m$ приймемо

$$m_1=q_m\,,\quad m_2=r_m\,,\quad n_1=0\,,\quad n_2=0\,,\quad \text{коли}\quad r_m\geqslant 0\,, \tag{43}$$

$$m_1=q_m\,,\quad m_2=0\,,\quad n_1=0\,,\quad n_2=r_m\,,\quad \text{коли}\quad r_m<0\,, \tag{44}$$

і відповідні коефіцієнти поліномів $\widetilde{s}_{l_m}$, $\widetilde{E}_{l_m}$ позначимо $\widetilde{\sigma}_m$, $\widetilde{\eta}_m$.

Якщо тепер для $\widetilde{W}^{(l_m)}(b)$ вибрати два значення

$$\widetilde{W}^{(l_m)}(b)=W^{(l_m)}(b)\pm\frac{1}{2}\,\varepsilon_{l_m}\,, \tag{45}$$

ми отримаємо два значення для $\widetilde{\eta}_m$ і відповідні два значення для $\widetilde{\sigma}_m$, які будуть відрізнятися на величину, модуль якої дорівнює:

$$q_m\,|\lambda_{21}\,q_m+\lambda_{22}\,r_m|^{-1}\,\left|\frac{\alpha_1(d_2)}{2d_2}\right|^{q_m}\,\left|\frac{\alpha_2(d_2)}{2d_2}\right|^{r_m}\,\frac{(q_m)!\,(r_m)!}{(l_m)!}\,\varepsilon_2\,,r_m\geqslant 0\,,$$

$$q_m\,|\lambda_{21}\,q_m+\lambda_{22}\,r_m|^{-1}\,\left|\frac{\alpha_1(d_2)}{2d_2}\right|^{q_m}\,\left|\frac{\alpha_2(d_2)}{2d_2}\right|^{-r_m}\,\frac{(q_m)!\,(-r_m)!}{(l_m)!}\,\varepsilon_2\,,r_m<0\,.$$

Використовуючи (16), (17), (18), (31) і (27), цю величину в обох випадках можна оцінити знизу величиною

$$q_m\,\frac{1}{2}\,|\widetilde{\lambda}_1\,q_m+\widetilde{\lambda}_2\,r_m|^{-1}\,\epsilon_2>(l_m)^{ml_m}\,. \tag{46}$$

Отже, в (45) знак можна вибрати так, що

$$|\widetilde{\sigma}_m|>\frac{1}{2}\,l_m{}^{ml_m}\,. \tag{47}$$

З лем 2, 3 і 4 випливає, що $\widetilde{W}$ задовольняє нерівності (7) першого твердження теореми 2, а згідно з [1, лема 4] гамільтоніан (4) задовольняє друге твердження теореми 2.

---

1. *Carl Ludwig Ziegel.* On the integrals of canonical systems// Ann. of Math. – 1941. – Vol. 42. – N 2. – P. 806-822.
2. *Carl Ludwig Ziegel.* Uber die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleichgewichtslosung// Math. Ann. – 1954. – Vol. 128. – P. 144-170.
3. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М., 1974.
4. *Брюно А.Д.* Нормальная форма системы, близкой к гамильтоновой// Мат. заметки. – 1990. – Т. 48. – N 5. – С. 35-46.
5. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Успехи мат. наук. – 1983. – Т. 38. – N 1. – С. 3-67.
6. *Пидкуйко С.И.* О плотности множества неинтегрируемых гамильтонианов // Изв. Росс. Акад. Наук. Сер. Мат. – 1992. Т. 56. – N 4. – С.863-876.
7. *Пидкуйко С.И.* О массивности множества неинтегрируемых гамильтонианов// Мат. сб. – 1994. – Т. 185. – N 12. – С. 101-122.

S. Pidkuyko

ON DENSENESS OF NONINTEGRABLE HAMILTONIAN SYSTEMS CLOSE TO BILLIARDS

The class of Hamiltonian systems, close to billiard systems, is considered. It is proved that nonintegrable Hamiltonian systems in that class make up an everywhere dense subset (some analog of famous Ziegel theorem).

Стаття надійшла до редколегії 30.03.99