ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.157–169 Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.157–169

УДК 517.95

Наталія Процах

ВНУТРІШНЯ ГЛАДКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ З ВИРОДЖЕННЯМ

Коректність задачі Коші для параболічних систем вищих порядків з виродженням за змінною t на початковій гіперплощині досліджено у працях [1 – 5]. Знаходженню класичного розв'язку задачі Коші для гіперболічного рівняння другого порядку з виродженням присвячена праця [6]. Еволюційні системи вищих порядків за просторовими змінними та другого порядку за часовою змінною з виродженням при $t = 0$, які, як частковий випадок, містять гіперболічні рівняння другого порядку вивчено у працях [7,8] .

У цій статті наведено результати дослідження гладкості узагальненого розв'язку для однієї еволюційної системи вищого порядку, яка вироджується на початковій гіперплощині. Частковим випадком запропонованої системи є деякі системи параболічного та гіперболічного типів. Єдиність розв'язку для зазначеної системи доведено у працях [9,10], існування – у статті [11].

Формулювання задач

Задача 1. Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega_\tau = Q \bigcap \{t = \tau\}$. Позначимо через $S = \partial\Omega \times (0,T)$. Припустимо, що $\partial\Omega \in C^1$.

Розглянемо в області Q систему рівнянь

$$(\Phi(x,t)u_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t) D^\alpha u) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} C_\alpha(x,t) D^\alpha u_t = \sum_{|\alpha|\leqslant p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t) \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$D^\alpha u\Big|_S = 0, \quad |\alpha| \leqslant l-1, \qquad (2)$$

де $l \geqslant m$; $m \geqslant 1$; $0 \leqslant p \leqslant m$; Φ, $A_{\alpha\beta}$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant m$, $B_{\alpha\beta}$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant l$, $G_\alpha, 1 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, C_α, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant l$ – квадратні матриці порядку N; $u = \mathrm{colon}(u_1, ..., u_N)$; $F_\alpha = \mathrm{colon}(F_{\alpha_1}, ..., F_{\alpha_N})$, $|\alpha| \leqslant p$; $x = (x_1, .., x_n)$;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Припустимо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються такі умови.

Умова (Φ_0). $\Phi \in L^\infty(Q)$; $(\Phi(x,t)\xi,\xi) \geqslant \varphi(t)|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $\forall\xi \in \mathbb{R}^N$, де $\varphi \in C([0,T])$; $\varphi(0) = 0$; $\varphi(t) > 0$, $t \in (0,T]$; $\varphi' \in C((0,T])$; $\varphi'(t) \geqslant 0$, $t \in (0,T]$; $\Phi(x,t) = \Phi^*(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$.

Умова (Φ_1). $\Phi_t \in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$ $\forall\varepsilon > 0$; $(\Phi_t(x,t)\xi,\xi) \geqslant \varphi_1(t)|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $\forall\xi \in \mathbb{R}^N$, де $\varphi_1 \in C((0,T])$; $\varphi_1(t) \geqslant 0$, $t \in [0,T]$, $Q_{\varepsilon,T} = \Omega \times (\varepsilon,T)$.

Умова (A_0). $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta t}$, $A_{\alpha\beta x_k}$, $A_{\alpha\beta x_k t} \in L^\infty(Q)$, $k = 1,\dots,n$;

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)\,dx \geqslant a_0 \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2\,dx, \quad a_0 > 0$$

для майже всіх $t \in (0,T)$, $\forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$; $A_{\alpha\beta}(x,t) = A_{\beta\alpha}(x,t)$, $A_{\alpha\beta}(x,t) = A^*_{\beta\alpha}(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $|\beta| = |\alpha| \leqslant m$.

Умова (B_0). $B_{\alpha\beta} \in L^\infty(Q)$; $B_{\alpha\beta} = B^*_{\alpha\beta}$

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)\,dx \geqslant b_0\psi(t) \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2\,dx, \quad b_0 > 0$$

для майже всіх $t \in (0,T)$, $\forall v \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega)$; $\psi \in C([0,T])$; $\psi(0) \geqslant 0$; $\psi(t) > 0$, $\forall t \in (0,T]$.

Тут $\overset{\circ}{H}{}^k(\Omega)$ – замикання простору функцій $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою простору $H^k(\Omega)$.

Введемо простори функцій $H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}(Q)$, $H^{l+1,1}_{0,\varphi,\psi}(Q)$, $H^{l,2}_{0,\varphi,\psi}(Q)$ як замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q}$, які дорівнюють нулю в околі S за нормами

$$\|u\|^2_{l,1} = \int\limits_Q \Big(\varphi(t)|u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2\Big)\,dx\,dt;$$

$$\|u\|^2_{l+1,1} = \int\limits_Q \Big(\varphi(t)|u_{x_k t}|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_{x_k}|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_{x_k t}|^2\Big)\,dx\,dt;\ k = 1,\dots,n;$$

$$\|u\|^2_{l,2} = \int\limits_Q \Big(\varphi(t)|u_{tt}|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_t|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_{tt}|^2\Big)\,dx\,dt.$$

відповідно. Позначимо через $H^{l,1}_{0,\varphi,\psi,\mathrm{loc}}(Q)$ – множину функцій з простору $H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}(Q')$ для кожної строго внутрішньої підобласті Q' області Q.

Розглянемо початкові умови

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \sqrt{\varphi(t)}\,u_t(x,t) = 0. \tag{3}$$

Вкористовуватимемо оцінку Фрідріхса [12, с.50]

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha v|^2\,dx \leqslant \gamma_{k,j}(t) \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha v|^2\,dx, \quad j = 0,\dots,k,$$

яка справджується для функцій $v \in \overset{\circ}{H}{}^k(\Omega)$.

Позначимо:

$$\alpha_0 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \frac{\varphi_1(t)}{\psi(t)}; \quad \Gamma_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{k,j}(t); \quad \beta_0 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \frac{\Gamma_l(t)c_0(t)}{2b_0};$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{якщо } \alpha_0 = 0 \\ \varphi_1(t), & \text{якщо } \alpha_0 > 0 \end{cases}; \quad \nu_1 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \left[\beta_0 \omega(t) - \frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)} \right];$$

$$\nu_2 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \left[\beta_0 \omega(t) - 3 \frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)} \right]; \quad c_i(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} \frac{\|C^{(i)}_{\alpha t}(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)\omega(\tau)\psi(\tau)};$$

$$g_i(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \frac{\|G^{(i)}_{\alpha t}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\varphi'(\tau)}; i = 0, 1. \quad c^1(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} \frac{\|C_{\alpha x_k}(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)\omega(\tau)\psi(\tau)};$$

$$g_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \frac{\|G_{\alpha x_k}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\varphi'(\tau)}; \quad b^1(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha| = |\beta| \leqslant l} \frac{\|B_{\alpha\beta x_k}(x,\tau)\|^2}{(\psi(\tau))^2};$$

$$b_i(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha| = |\beta| \leqslant l} \frac{\|B^{(i)}_{\alpha\beta t}(x,\tau)\|^2}{(\psi(\tau))^2}; \ i = 0, 1; \quad c_{01}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} \frac{\|C_{\alpha}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\psi(\tau)};$$

$$g_{01}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \frac{\|G_{\alpha}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)}; \quad c^1_{01}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} \frac{\|C_{\alpha x_k}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\psi(\tau)};$$

$$g^1_{01}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \frac{\|G_{\alpha x_k}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)}; \qquad \frac{\|\Phi_{x_k}\|^2}{(\omega(t))^2} \leqslant \omega_0^2(t);$$

$$\max\left\{ b^1(t), c^1(t), c_0(t), b_0(t), g^1(t), g_0(t) \right\} \leqslant \omega^1(t); \max\left\{ b_1(t), c_1(t), g_1(t) \right\} \leqslant \omega_1(t);$$

$$\max\left\{ b^1(t), c^1_{01}(t), c_{01}(t), b_0(t), g^1_{01}(t), g_{01}(t) \right\} \leqslant \omega^1_0(t); \quad \frac{\|\Phi_{x_k}\|^2}{(\varphi')^2\omega(t)} \leqslant \omega^2(t) \ :$$

$$\varkappa_1 = \begin{cases} \nu_1 + \delta_0, & \text{якщо } \nu_1 \geqslant 0 \\ 0, & \text{якщо } \nu_1 < 0 \end{cases}, \quad \varkappa_2 = \begin{cases} \nu_2 + \delta_0, & \text{якщо } \nu_2 \geqslant 0 \\ 0, & \text{якщо } \nu_2 < 0 \end{cases}, \qquad \delta_0 > 0,$$

$$M_0 = [\varphi(\tau)]^{\varkappa_1 \eta} \left[\int_{Q''_\tau} \frac{1}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1 \eta}} \sum_{|\alpha| \leqslant p} \left(\frac{|F_{\alpha x_s}(x,t)|^2}{\psi(t)} + \omega^2(t) \frac{|F_{\alpha_t}(x,t)|^2}{\psi(t)} \right) dx\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{Q_\tau} \frac{\omega^1(t) + 2 + \omega^2(t)\left(\omega_1(t) + \left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} \right)^2 \right)}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1 \eta}} \sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} dx\, dt \right], \quad s = 1, \ldots, n.$$

Зауваження 1. Для функції u можна довести оцінки:

$$\|u\|^2_{l,1} \leqslant M_2 [\varphi(\tau)]^{\varkappa_1} \int_Q \frac{1}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} dx dt \ ;$$

$$\|u\|^2_{l,2} \leqslant M_2 [\varphi(\tau)]^{\varkappa_1} \int_Q \frac{\omega_1(t) + \left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} \right)^2}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} dx dt +$$

$$+ M_3 [\varphi(\tau)]^{\varkappa_2} \int_Q \frac{1}{[\varphi(t)]^{\varkappa_2}} \sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{|F_{\alpha_t}(x,t)|^2}{\psi(t)} dx dt.$$

Задача 2. Розглянемо мішану задачу для системи рівнянь (1) з крайовими умовами

$$D^\alpha u\Big|_S = 0, \qquad |\alpha| \leqslant m-1, \tag{4}$$

де $1 \leqslant l \leqslant m$; $p \leqslant m$, та початковими умовами (3). Припустимо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються такі самі умови, як і в задачі 1 при $\varphi(t) = t^\lambda$.

Внутрішня гладкість розв'язку

Теорема. *Нехай коефіцієнти системи (1) задовольняють умови* $(\Phi_0), (\Phi_1), (A_0)$, (B_0), G_α $(1 \leqslant |\alpha| \leqslant m)$, $C_\alpha (1 \leqslant |\alpha| \leqslant l) \in L^\infty(Q_{\varepsilon,\tau})$, $\forall \varepsilon > 0$. $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$,C_α, G_α, $A_{\alpha\beta x_s}, B_{\alpha\beta x_s} C_{\alpha x_s}, G_{\alpha x_s}$ – *неперервні за змінними* x_s, $s = 1,...,n$; $\omega^1, \omega^2, \omega_0$ – *монотонно незростаючі функції. Якщо, крім того, виконується одна з умов:*

1) ω^1, ω_1, $\omega^2 \in L^\infty(0,T)$; $\nu_1 < +\infty, \nu_2 < +\infty, M_0 < +\infty$ *при* $\eta = 1$;

2) $\alpha = 0$; ω_0^1, $\omega_0^2 \in L^\infty(0,T)$; $M_0 < +\infty$ *при* $\eta = 0$,

$$\inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \sqrt{\Gamma_l(t) c_{01}(t) \gamma_{l,0}(t)} < 2b_0.$$

Тоді існують узагальнені похідні $D^\alpha u_{x_s}$ *та* $D^\alpha u_{x_s t}$ *в* Q *для задачі 1 і виконується оцінка:*

$$\int\limits_{Q''_\tau} \left[\varphi(\tau)|u_{x_s t}|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_{x_s}|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_{x_s t}|^2\right] dx\, dt \leqslant M_4 M_0, \tag{5}$$

де M_4 - *стала.*

Доведення. Нехай Ω' і Ω'' – довільні строго внутрішні підобласті області Ω. $Q' = \Omega' \times (0,T)$; $Q'' = \Omega'' \times (0,T)$. Підобласті Ω' та Ω'' вибрані так, щоб $Q' \subset Q'' \subset Q$. Позначимо через $\delta > 0$ відстань між межами $\partial\Omega'$ і $\partial\Omega''$, через Ω_δ – множину, яка містить всі точки області Ω, які знаходяться на відстані більшій за δ від межі області Ω, $Q_\delta = \Omega_\delta \times (0,T)$. Розглянемо функцію $\xi(x)$, яка володіє такими властивостями: $\xi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \xi(x) \equiv 1$ в Q''_δ (а, отже, і в Q'), $\xi(x) \equiv 0$ в $Q \setminus Q''_{\frac{2\delta}{3}}$.

Нехай $U(x,t) = \xi(x)u(x,t)$, $u \in \overset{\circ}{H}{}^{l,2}_{0,\varphi,\psi}(Q)$. Обчислимо $L[U]$, де через $L[u]$ позначена ліва частина системи рівнянь (1). Тоді

$$L[U] = \sum_{|\beta|=|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{\beta} D^\alpha(A_{\alpha\beta}(x,t) D^{\beta-i}(D\xi D^{i-1}u)) +$$

$$+ \sum_{|\beta|=|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{\alpha} D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}(A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u)) +$$

$$+ \sum_{|\beta|=|\alpha|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{\beta} D^\alpha(B_{\alpha\beta}(x,t) D^{\beta-i}(D\xi D^{i-1}u_t)) +$$

$$+ \sum_{|\beta|=|\alpha|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{\alpha} D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}(B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t)) +$$

$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} G_\alpha(x,t) \sum_{i=1}^{\alpha} D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}u) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} C_\alpha(x,t) \sum_{i=1}^{\alpha} D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}u_t) +$$

$$+\xi \sum_{|\alpha|\leqslant p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t). \tag{6}$$

Функція U належить простору $H^{l,2}_{0,\varphi,\psi}(Q'')$, обертається в нуль в $Q \setminus Q''_{\frac{2\delta}{3}}$ і дорівнює функції u в Q''_δ. Виберемо функцію $v_1 \in H^{l,2}_{0,\varphi,\psi}(Q'')$ і продовжимо її нулем ззовні Q''. Для довільного h, $0 < |h| < \frac{\delta}{2}$ розглянемо кінцево-різницеве відношення

$$\delta^k_h g(x,t) = \frac{g(x_1,...,x_{k-1},x_k+h,x_{k+1},...,x_n,t) - g(x,t)}{h}, \tag{7}$$

$k = 1,...,n$, де g – фінітна в Q функція, яка належить $L_2(Q)$. Позначимо через $x' = (x_1,...,x_{k-1},x_k+h,x_{k+1},...x_n)$. Кінцево-різницеве відношення $\delta^k_{-h}v_1(x)$ є функцією з $H^{l,2}_{0,\varphi,\psi}(Q''_{\frac{\delta}{2}}) \cap L_2(Q'')$.

Домножимо (6) на функцію $\delta^k_{-h}v_1(x,t)e^{-\nu t}$ і зінтегруємо по Q''. До одержаної системи рівнянь застосуємо формулу "інтегрування частинами" [13, с. 119]:

$$\int_Q (\delta^k_h f, g)\, dx\, dt = -\int_Q (f, \delta^k_{-h} g)\, dx\, dt, \tag{8}$$

яка правильна для довільних фінітних в Q функцій f і g, які належать $L_2(Q)$ та рівність [13, с. 220]

$$\delta^k_h(fg) = g\delta^k_h f + f\delta^k_h g.$$

Після цих перетворень з рівності (6) одержимо систему рівнянь:

$$\int_{Q''_\tau} \left(\left(\delta^k_h \Phi(x,t) U_t(x',t)\right)_t + \left(\Phi(x',t)\delta^k_h U_t\right)_t, v_1 \right) e^{-\nu t}\, dx\, dt+$$

$$+\int_{Q''_\tau} \left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (\delta^k_h A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta U(x',t) + A_{\alpha\beta}(x',t) D^\beta \delta^k_h U), D^\alpha v_1 \right) e^{-\nu t}\, dx\, dt+$$

$$+\int_{Q''_\tau} \left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (\delta^k_h B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta U_t(x',t) + B_{\alpha\beta}(x',t) D^\beta \delta^k_h U_t), D^\alpha v_1 \right) e^{-\nu t}\, dx\, dt+$$

$$+\int_{Q''_\tau} \left(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (\delta^k_h G_\alpha(x,t) D^\alpha U(x',t) + G_{\alpha\beta}(x',t) D^\alpha \delta^k_h U), v_1 \right) e^{-\nu t}\, dx\, dt+$$

$$+\int_{Q''_\tau} \left(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (\delta^k_h C_\alpha(x,t) D^\alpha U_t(x',t) + C_\alpha(x',t) D^\alpha \delta^k_h U_t), v_1 \right) e^{-\nu t}\, dx\, dt =$$

$$= \int_{Q''_\tau} \left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \sum_{i=1}^{\beta} \delta^k_h A_{\alpha\beta}(x,t) D^{\beta-i}(D\xi D^{i-1}u)(x',t), D^\alpha v_1 \right) e^{-\nu t}\, dx\, dt+$$

$$+\int_{Q''_\tau} \left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \sum_{i=1}^{\beta} A_{\alpha\beta}(x',t) D^{\beta-i}(\delta^k_h D\xi D^{i-1}u + D\xi D^{i-1}\delta^k_h u), D^\alpha v_1 \right) e^{-\nu t}\, dx\, dt+$$

$$+\int_{Q''_\tau} \left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \sum_{i=1}^{\alpha} \delta^k_h D\xi D^{i-1}(A_{\alpha\beta} D^\beta u)(x',t), D^{\alpha-i} v_1 \right) e^{-\nu t}\, dx\, dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}\sum_{i=1}^{\alpha}D\xi(x')D^{i-1}(\delta_h^k A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u(x',t)),\,D^{\alpha-i}v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}\sum_{i=1}^{\alpha}D\xi(x')D^{i-1}(A_{\alpha\beta}(x',t)D^\beta\delta_h^k u),\,D^{\alpha-i}v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\beta}\delta_h^k B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta-i}(D\xi D^{i-1}u_t)(x',t),\,D^\alpha v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\beta}(B_{\alpha\beta}(x',t)D^{\beta-i}(\delta_h^k D\xi D^{i-1}u_t+D\xi(x')D^{i-1}\delta_h^k u_t),\,D^\alpha v_1)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\alpha}\delta_h^k D\xi D^{i-1}(B_{\alpha\beta}D^\beta u_t)(x',t),\,D^{\alpha-i}v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\alpha}D\xi(x')D^{i-1}(\delta_h^k B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t(x',t)),\,D^{\alpha-i}v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\alpha}D\xi(x')D^{i-1}(B_{\alpha\beta}(x',t)D^\beta\delta_h^k u_t),\,D^{\alpha-i}v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\delta_h^k G_\alpha(x,t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}u)(x',t),\,v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}G_\alpha(x',t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(\delta_h^k D\xi D^{i-1}u+D\xi(x')D^{i-1}\delta_h^k u),\,v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}\delta_h^k C_\alpha(x,t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}u_t)(x',t),\,v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}C_\alpha(x',t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(\delta_h^k D\xi D^{i-1}u_t+D\xi(x')D^{i-1}\delta_h^k u_t),\,v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant p}F_\alpha(x',t),\,D^\alpha(\delta_h^k\xi v_1)\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant p}\delta_h^k F_\alpha(x,t),\,D^\alpha(\xi v_1)\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt\;. \tag{9}$$

Виберемо $v_1=\delta_h^k U_t$. Підставимо цю функцію в (9) і оцінимо кожний з одержаних доданків окремо:

$$\tau_1=\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\big(\delta_h^k\Phi(x,t)U_t(x',t)\big)_t+\big(\Phi(x',t)\delta_h^k U_t\big)_t,\,\delta_h^k U_t\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt\geqslant$$

$$-\int\limits_{Q''_\tau}\left(\frac{\|\delta_h^k\Phi U_{tt}(x',t)\|^2\varphi'(t)}{2\delta_1(\varphi'(t))^2\omega(t)}+\frac{\|\delta_h^k\Phi_t U_t(x',t)\|^2\varphi'(t)}{2\delta_1(\varphi'(t))^2\omega(t)}+\delta_1\varphi'(t)\omega(t)|\delta_h^k U_t|^2\right)e^{-\nu t}dx\,dt+$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega''_\tau}\varphi(\tau)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu\tau}\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{Q''_\tau}\varphi_1(t)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt+\frac{\nu}{2}\int\limits_{Q''_\tau}\varphi(t)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt;$$

$$\tau_2=\int\limits_{Q''_\tau}\left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}\left(\delta_h^k A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta U(x',t)+A_{\alpha\beta}(x',t)D^\beta\delta_h^k U\right),D^\alpha\delta_h^k U_t\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt$$

$$\geqslant-\frac{a_2^2}{2\delta_2}\Gamma_m(\tau)\int\limits_{\Omega''_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha U|^2e^{-\nu\tau}\,dx-\left(\delta_2\Gamma_m(\tau)-\frac{a_0}{2}\right)\int\limits_{\Omega''_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2e^{-\nu\tau}\,dx$$

$$-\frac{a_3^2+a_2^2\nu}{2\delta_2}\int\limits_{Q''_\tau}\Gamma_m(t)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha U|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt-\frac{a_2^2}{2\delta_2}\int\limits_{Q''_\tau}\Gamma_m(t)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt$$

$$+\left(\frac{\nu a_0-a_1-\delta_2(\nu+1)\Gamma_m}{2}\right)\int\limits_{Q''_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt;$$

тут a, a_1 , a_2, a_3 – сталі, які обмежують $\|A_{\alpha\beta}\|$, $\|A_{\alpha\beta t}\|$, $\|A_{\alpha\beta x_k}\|$, $\|A_{\alpha\beta x_k t}\|$ відповідно;

$$\tau_3=\int\limits_{Q''_\tau}\left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\left(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta\delta_h^k U_t(x',t)+\delta_h^k B_{\alpha\beta}(x',t)D^\beta U_t\right),D^\alpha\delta_h^k U_t\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt$$

$$\geqslant\left(b_0-\frac{\delta_3\Gamma_l}{2}\right)\int\limits_{Q''_\tau}\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2\delta_3}\int\limits_{Q''_\tau}\Gamma_l(t)b^1(t)\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt;$$

$$\tau_4=\int\limits_{Q''_\tau}\left(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\left(\delta_h^k G_\alpha(x,t)D^\alpha U(x',t)+G_{\alpha\beta}(x',t)D^\alpha\delta_h^k U\right),\delta_h^k U_t\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{Q''_\tau}\left(\frac{\Gamma_m(t)g_0(t)}{2\delta_4}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2+\frac{\Gamma_m(t)g^1(t)}{2\delta_4}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha U|^2\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\delta_4\int\limits_{Q''_\tau}\varphi'(t)\omega(t)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt\ ;$$

$$\tau_5=\int\limits_{Q''_\tau}\left(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}\left(\delta_h^k C_\alpha(x,t)D^\alpha U_t(x',t)+C_{\alpha\beta}(x',t)D^\alpha\delta_h^k U_t\right),\delta_h^k U_t\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{Q''_\tau}\left(\frac{\Gamma_l c_0(t)}{2\delta_5}\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha\delta_h^k U_t|^2+\frac{\Gamma_l c^1(t)}{2\delta_1}\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha U_t|^2\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_5)\int\limits_{Q''_\tau}\varphi'(t)\omega(t)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt;$$

$$\tau_6 = \int\limits_{Q''_\tau} \Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \sum_{i=1}^{\beta} \delta_h^k A_{\alpha\beta}(x,t) D^{\beta-i}(D\xi D^{i-1}u)(x',t), D^\alpha \delta_h^k U_t \Big) e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q''_\tau} \Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \sum_{i=1}^{\beta} A_{\alpha\beta}(x',t) D^{\beta-i}(D\xi D^{i-1}\delta_h^k u + \delta_h^k D\xi D^{i-1} u), D^\alpha \delta_h^k U_t \Big) e^{-\nu t}\, dx\, dt$$

$$\leqslant \frac{\Gamma_m C}{2\delta_6} \int\limits_{Q''_\tau} \Big((a_3^2 + a_1^2 + \nu + \nu a^2) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + (a_2^2 + a^2) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_t|^2 \Big) e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega''_\tau} \Big(\frac{\Gamma_m a_2^2 C}{\delta_6} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^2| + \Gamma_m \delta_6 \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \delta_h^k U|^2 \Big) e^{-\nu\tau}\, dx +$$

$$+ \delta_6(\nu+1) \int\limits_{Q''_\tau} \Gamma_m \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \delta_h^k U|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt\ ;$$

$$\tau_7 = \int\limits_{Q''_\tau} \Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \sum_{i=1}^{\alpha} \delta_h^k D\xi D^{i-1}(A_{\alpha\beta} D^\beta u)(x',t), D^{\alpha-i} \delta_h^k U_t \Big) e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q''_\tau} \Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \sum_{i=1}^{\alpha} D\xi(x') D^{i-1}(\delta_h^k(A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u(x',t))), D^{\alpha-i} \delta_h^k U_t \Big) e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega''_\tau} \Big(\frac{\Gamma_m (a_1^2 + 2a_2^2)}{2\delta_7} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + \frac{1}{2}\Gamma_m \delta_7 C(2 + a_2^2 + a^2) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \delta_h^k U| \Big) e^{-\nu\tau}\, dx +$$

$$+ \int\limits_{Q''_\tau} \Big(\frac{\Gamma_m (a_1^2 + a_3^2 + \nu a^2) C}{\delta_7} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + \frac{\Gamma_m a^2 C}{\delta_7} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_t|^2 \Big) e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\delta_7 \nu \int\limits_{Q''_\tau} \Gamma_m C((a_2^2 + 3) + 2 + a^2) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \delta_h^k U|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt\ ;$$

$$\tau_8 = \int\limits_{Q''_\tau} \Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} \sum_{i=1}^{\beta} \delta_h^k B_{\alpha\beta}(x,t) D^{\beta-i}(D\xi D^{i-1}u_t)(x',t), D^\alpha \delta_h^k U_t \Big) e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q''_\tau} \Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} \sum_{i=1}^{\beta} B_{\alpha\beta}(x',t) D^{\beta-i}(\delta_h^k(D\xi D^{i-1}u_t)), D^\alpha \delta_h^k U_t \Big) e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\delta_8}\Gamma_l \int\limits_{Q''_\tau} (b^1(t) + b_0(t))\psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^{\alpha-1}u_t|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{3}{2}\delta_8 \int\limits_{Q''_\tau} \Gamma_l \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha \delta_h^k U_t|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt\ ;$$

$$\tau_9 = \int\limits_{Q''_\tau} \Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} \sum_{i=1}^{\alpha} \delta_h^k D\xi D^{i-1}(B_{\alpha\beta} D^\beta u_t)(x',t), D^{\alpha-i} \delta_h^k U_t \Big) e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\alpha}D\xi(x')D^{i-1}(\delta_h^k B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t(x',t)),\,D^{\alpha-i}\delta_h^k U_t\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\alpha}D\xi(x')D^{i-1}(B_{\alpha\beta}(x',t)D^\beta\delta_h^k u_t),\,D^{\alpha-i}\delta_h^k U_t\Big)\leqslant$$

$$\frac{5}{2}\delta_9\int\limits_{Q''_\tau}\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt+\frac{\Gamma_l}{\delta_9}\int\limits_{Q''_\tau}(b^1(t)+b_0(t))\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t|^2e^{-\nu t}dxdt\ ;$$

$$\tau_{10}=\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\delta_h^k G_\alpha(x,t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}u)(x',t),\delta_h^k U_t\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}G_\alpha(x',t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(\delta_h^k D\xi D^{i-1}u+D\xi(x')D^{i-1}\delta_h^k u),\delta_h^k U_t\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt$$

$$\leqslant\frac{1}{2\delta_{10}}\int\limits_{Q''_\tau}\Gamma_m C(g^1(t)+g_0(t))\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u(x')|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\,\delta_{10}\int\limits_{Q''_\tau}\varphi'(t)\omega(t)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt\ ;$$

$$\tau_{11}=\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}\delta_h^k C_\alpha(x,t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}u_t)(x',t),\delta_h^k U_t\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}C_\alpha(x',t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(\delta_h^k D\xi D^{i-1}u+D\xi(x')D^{i-1}\delta_h^k u),\delta_h^k U_t\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt$$

$$\leqslant\frac{1}{2\delta_{11}}\int\limits_{Q''_\tau}\Gamma_l C(c^1(t)+c_0(t))\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t(x')|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\,\delta_{11}\int\limits_{Q''_\tau}\varphi'(t)\omega(t)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt\ ;$$

$$\tau_{12}=\int\limits_{Q''_\tau}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\Big[\Big(F_\alpha(x',t),D^\alpha\Big(\delta_h^k\xi\delta_h^k U_t\Big)\Big)+\Big(\delta_h^k F_\alpha(x,t),D^\alpha\Big(\xi\delta_h^k U_t\Big)\Big)\Big]e^{-\nu t}\,dx\,dt$$

$$\leqslant\frac{1}{2\delta_{12}}\int\limits_{Q''_\tau}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|\delta_h^k F_\alpha(x,t)|^2+|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}dxdt+$$

$$+\,\frac{1}{2}\delta_{12}C\Gamma_l(t)\int\limits_{Q''_\tau}\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}dxdt.$$

Виберемо $\delta_i=\delta_1,\ i=1,10,11;\ \delta_j=\delta_1,\ j=2,6,7;\ \delta_s=\delta_3,\ s=3,8,9,12$. Тоді з оцінок $\tau_i,\ i=1,...,12$ одержимо нерівність:

$$\int\limits_{\Omega''_\tau}\Big[\varphi(\tau)|\delta_h^k U_t|^2+(a_0-\delta_2(4+(2+a_2^2+a^2)C)\Gamma_m(\tau))\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2\Big]e^{-\nu\tau}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q''_\tau} \Bigg[\Bigg(-\frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)} - \frac{\nu\varphi(t)}{\varphi'(t)} + \omega(t)(8\delta_1 + 2\delta_4 + \delta_5) \Bigg) \varphi'(t) |\delta_h^k U_t|^2 + \Bigg(a_1 - \nu a_0 +$$

$$+ \Gamma_m(t) \Bigg(\frac{g_0(t)}{\delta_4} + \delta_2 (6 + 3\nu + C(3 + \nu(a_1^2 + a^2))) \Bigg) \Bigg) \sum_{|\alpha|=m} |\delta_h^k D^\alpha U|^2 + \Bigg(-2b_0 +$$

$$+ \Gamma_l(t) \Bigg(\frac{c_0(t)}{\delta_5} + \delta_3 (8 + C) \Bigg) \Bigg) \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha \delta_h^k U_t|^2 + \frac{\|\delta_h^k \Phi_t\|^2}{\delta_1 (\varphi'(t))^2 \omega(t)} \varphi'(t) |u_t|^2 +$$

$$+ \Gamma_m(t) \Bigg(\frac{g^1(t)}{\delta_4} + \frac{M_1}{\delta_2} + \frac{C(g^1(t) + g_0(t))}{\delta_1} \Bigg) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 +$$

$$+ \Gamma_l(t) \Bigg(\frac{c_0(t) + 2c^1(t)}{\delta_1} + \frac{4b^1(t) + b_0(t)}{\delta_3} \Bigg) \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2 + \frac{\|\delta_h^k \Phi U_{tt}\|^2 \varphi'(t)}{\delta_1 (\varphi'(t))^2 \omega(t)} +$$

$$+ \frac{M_1}{\delta_2} \Gamma_m(t) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha U_t|^2 \Bigg] e^{-\nu t}\, dx\, dt + \frac{M_1}{\delta_2} \Gamma_m(\tau) \int\limits_{\Omega''_\tau} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 e^{-\nu\tau}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\delta_3} \int\limits_{Q''_\tau} \Bigg(\sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{|\delta_h^k F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} + \sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} \Bigg) e^{-\nu t}\, dx\, dt\ , \qquad (10)$$

де C – стала, яка обмежує $|\xi|^2$ та $|D^\alpha \xi|^2, |\alpha| \leqslant l$; M_1 – стала, яка залежить від $C, \nu,\ a_1,\ \ a_2,\ a_3$. За умовою теореми можна вибрати такі числа $\delta_i > 0, i = 1, \ldots, 5, \tau_0,\ 0 < \tau_0 < T$, що на відрізку $[0, \tau_0]$ виконуватимуться нерівності:

$$-\frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)} - \frac{\nu\varphi(t)}{\varphi'(t)} + \omega(t)(8\delta_1 + 2\delta_4 + \delta_5) \leqslant \nu_1 + \delta_0\ ;$$

$$a_1 - \nu a_0 + \Gamma_m(t) \Bigg(\frac{g_0(t)}{\delta_4} + \delta_2 (6 + 3\nu + C(3 + \nu(a_1^2 + a^2))) \Bigg) \leqslant -\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 > 0;$$

$$-2b_0 + \Gamma_l(t) \Bigg(\frac{c_0(t)}{\delta_5} + \delta_3 (8 + C) \Bigg) \leqslant -\varepsilon_2, \qquad \varepsilon_2 > 0;$$

$$a_0 - \delta_2 (4 + (2 + a_2^2 + a^2) C) \Gamma_m(\tau) > 0.$$

З означення функцій $\omega_0\ , \omega^1\ , \omega^2$ та оцінок норми узагальненого розв'язку u бачимо, що останні доданки нерівності (10) обмежені:

$$\int\limits_{Q''_\tau} \Bigg(\frac{\|\delta_h^k \Phi_t\|^2}{\delta_1 (\varphi'(t))^2 \omega(t)} \varphi'(t) |u_t|^2 + \Gamma_m(t) \Bigg(\frac{g^1(t)}{\delta_4} + \frac{M_1}{\delta_2} + \frac{C(g^1(t) + g_0(t))}{\delta_1} \Bigg) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 +$$

$$+ \Gamma_l(t) \Bigg(\frac{c_0(t) + 2c^1(t)}{\delta_1} + \frac{4b^1(t) + b_0(t)}{\delta_3} \Bigg) \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2 \Bigg) e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{M_1}{\delta_2} \int\limits_{\Omega''_\tau} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 e^{-\nu\tau}\, dx \leqslant M_2 [\varphi(\tau)]^{\varkappa_1} \int\limits_{Q''_\tau} \frac{\omega^1(t) + 1}{[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\, dx\, dt;$$

$$\int\limits_{Q''_\tau} \Bigg(\frac{\|\delta_h^k \Phi U_{tt}\|^2 \varphi'(t)}{\delta_1 (\varphi'(t))^2 \omega(t)} + \frac{M_1}{\delta_2} \Gamma_m(t) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha U_t|^2 \Bigg) e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M_2[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1} \int\limits_{Q_\tau} \frac{\omega^2(t)\left(\omega_1(t) + \left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2\right)}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$

$$+ M_3[\varphi(\tau)]^{\varkappa_2} \int\limits_{Q_\tau} \frac{\omega^2(t)}{[\varphi(t)]^{\varkappa_2}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_{\alpha_t}(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\, dx\, dt.$$

Тоді з нерівності (10) одержимо:

$$\int\limits_{\Omega''_\tau} \left[\varphi(\tau)|\delta_h^k U_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \delta_h^k U|^2\right] e^{-\nu\tau}\, dx \leqslant (\nu_1 + \delta_0) \int\limits_{Q''_\tau} \varphi'(t)|\delta_h^k U_t|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt -$$

$$- \varepsilon_1 \int\limits_{Q''_\tau} \sum_{|\alpha|=m} |\delta_h^k D^\alpha U|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt - \varepsilon_2 \int\limits_{Q''_\tau} \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha \delta_h^k U_t|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\delta_{12}} \int\limits_{Q''_\tau} \left(\sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|\delta_h^k F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} + \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}\right) e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$

$$+ M_2[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1} \int\limits_{Q_\tau} \frac{\omega^2(t)\left(\omega_1(t) + \left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2\right) + \omega^1(t)}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$

$$+ M_3[\varphi(\tau)]^{\varkappa_2} \int\limits_{Q_\tau} \frac{\omega^2(t)}{[\varphi(t)]^{\varkappa_2}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_{\alpha_t}(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\, dx\, dt. \qquad (11)$$

Позначимо через $y(\tau) = \int\limits_{Q''_\tau} \varphi'(t)|\delta_h^k U_t|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt$. З нерівності (11) матимемо:

$$y(\tau) \leqslant [\varphi(\tau)]^{\nu_1+\delta_0} \int\limits_0^\tau \frac{\varphi'(\theta)[\varphi(\theta)]^{-(\nu_1+\delta_0+1)}}{\delta_{11}} f_1(x,\theta)\, dx\, d\theta, \qquad (12)$$

де через $f_1(x,\theta)$ позначено останні 3 доданки правої частини (11). Спростивши інтеграл у нерівності (12) так само, як при доведенні існування узагальненого розв'язку, отримаємо оцінку:

$$\int\limits_{Q''_\tau} \left[\varphi(\tau)|\delta_h^k U_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \delta_h^k U|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha \delta_h^k U_t|^2\right] e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M_4[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1} \left[\int\limits_{Q''_\tau} \frac{1}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|\delta_h^k F_\alpha(x,t)|^2 + \omega^2(t)|F_{\alpha_t}(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\, dx\, dt +\right.$$

$$\left. + \int\limits_{Q''_\tau} \frac{\omega^1(t) + 2 + \omega^2(t)\left(\omega_1(t) + \left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2\right)}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\, dx\, dt\right]. \qquad (13)$$

У випадку $\alpha_0 = 0$, діючи аналогічно як при доведенні існування узагальненого розв'язку, одержимо нерівність:

$$\int\limits_{Q''_\tau}\Big[\varphi(\tau)|\delta_h^k U_t|^2+\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2+\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha\delta_h^k U_t|^2\Big]e^{-\nu t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant M_8\Big[\int\limits_{Q''_\tau}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|\delta_h^k F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt+\int\limits_{Q_\tau}\omega^2(t)\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_{\alpha_t}(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left(\omega^1(t)+2+\omega^2(t)\left(\omega_1(t)+\left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2\right)\right)\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt\Big] \tag{14}$$

Згідно з теоремою про зв'язок різницевих відношень з узагальненими похідними [13, с.119] , на основі отриманих оцінок (13) та (14), робимо висновок, що $U\in H^{l+1,1}_{0,\varphi,\psi}(Q'')$. Оскільки в області Q' функція $U=u$, то $u\in H^{l+1,1}_{0,\varphi,\psi}(Q')$. Q' – строго внутрішня підобласть області Q, тому $u\in H^{l+1,1}_{0,\varphi,\psi,\mathrm{loc}}(Q)$ і виконується оцінка (5). Теорему доведено.

Зауваження 2. Для задачі 2 так само, як у попередньому випадку можна довести, що $u\in H^{m+1,1}_{0,\varphi,\psi,\mathrm{loc}}(Q)$.

Зауваження 3. Так само можна довести існування похідних розв'язку u за змінною x порядку s, $s>1$.

---

1. *Івасишен С.Д., Андросова Л.Н.* Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т.27. – N 3. – С.479–487.
2. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині// Доп. НАН України. – 1994. – N 6. – С.7–11.
3. *Березан Л.П., Івасишен С.Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині// Доп. НАН України. – 1998. – N 12. – С.7–12.
4. *Березан Л.П., Івасишен С.Д.* Про сильно вироджені на початковій гіперплощині $2\vec{b}$-параболічні системи// Вісн. держ. ун-ту "Львівська Політехніка". Приклад. мат. – 1998. N 337. – С.73–76.
5. *Березан Л.П.* Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $2\vec{b}$-параболічної системи // Вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – 1999. – Вип. 46. – С.13–18.
6. *Барановский Ф.Т.* Задача Коши с видоизмененными начальными данными для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу// Мат. сб. – 1983. – Т.120. – N 2. – С.147–163.
7. *Лавренюк С.П.* Смешанная задача для сильно вырождающейся эволюционной системы// Дифференциальные уравнения. – 1994. - Т.30. – N 8. – С.1405–1411.
8. *Лавренюк С.П.* Змішана задача для однієї слабко виродженої системи// Доп. АН України. Матем., природозн., техн. науки. – 1993. – N 5. – С.18–20.

9. *Лавренюк С.П.* Про єдиність розв'язку деяких еволюційних систем з виродженням// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1998. – Вип. 51. – С.20–25.

10. *Lavrenyuk S.P.* On the uniqueness of a solution of mixed problem for one degenerated evolutional system// Математичні студії. – 1998. – Т.9. – N 1. – С.21–28.

11. *Процах Н.* Існування розв'язку однієї еволюційної системи з виродженням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1999. – Вип. 54. – С.159–170.

12. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

13. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М., 1976.

N. Protsakh

INTERNAl SMOOTHNESS OF THE SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE EVOLUTIONAL SYSTEM WITH DEGENERATION

This paper contains some results about the investigation of the internal smoothness of the solution for one mixed problem for the evolutional system with degeneration. This problem consists of the evolutional system with the second derivative on time, degenerative into an elliptical system on the initial plane, homogeneous Dirichlet boundary and some initial conditions. The system contains, in particular, some classes of parabolic and hyperbolic system. The problem is considered in the cylindrical domain.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99