ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.170–175 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.170–175*

УДК 593.3

Борис Процюк, Ірина Верба

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК СТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ПРОСТОРУ

Розв'язуючи задачі теплопровідності для кусково-однорідних тіл, часто застосовують метод граничних інтегральних рівнянь [1, 2]. Використовують фундаментальні розв'язки або функції Гріна здебільшого для відповідних однорідних областей. Для кусково-однорідних областей перелік функцій Гріна є досить обмеженим. Зокрема, для двовимірних стаціонарних задач теплопровідності двошарових ізотропних пластин функції Гріна з виділеними особливостями наведені в [3], а для багатошарових тіл з плоскопаралельними границями розділу в тривимірній постановці в [4].

Ця праця присвячена побудові функції Гріна стаціонарних задач теплопровідності для кусково-однорідного простору, складові частини якого шар і два півпростори - трансверсально-ізотропні.

Віднесемо простір до циліндричної системи координат r, φ, z, початок якої розміщений на межі верхнього півпростору і шару, а вісь z перпендикулярна до площин ізотропії, які паралельні поверхням розділу.

Під функцією Гріна будемо розуміти функцію $G(M,P)$, яка в просторі узагальнених функцій задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}+\frac{\lambda_r(z)}{\lambda_z(z)}\Delta G+\frac{\lambda_{z2}-\lambda_{z1}}{\lambda_{z2}}\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0-0}\delta(z)+ \\ +\frac{\lambda_{z3}-\lambda_{z2}}{\lambda_{z3}}\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=h-0}\delta(z-h)=-\frac{1}{\lambda_z(\xi)}\delta(M,P) \quad (1)$$

і граничним умовам

$$G|_{z\to\pm\infty}=0,\quad G|_{r=0}\neq\infty,\quad G|_{r\to\infty}\to 0,\quad G|_{\varphi=0}=G|_{\varphi=2\pi}. \quad (2)$$

Тут коефіцієнти теплопровідності $\lambda_r(z)$ в площині ізотропії і $\lambda_z(z)$ в площині перпендикулярній до неї мають вигляд $p(z)=p_1+(p_2-p_1)S(z)+(p_3-p_2)S(z-h)$; $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$; $\delta(M,P)=\frac{1}{\rho}\delta(r-\rho)\,\delta(\varphi-\Theta)\delta(z-\xi)$; r, φ, z і ρ, Θ, ξ– координати точок відповідно M і P; $S(z)$ – функція Гевісайда; $\delta(z)$ – дельта-функція Дірака; h – товщина шару. Зауважимо таке: якщо функцію $G(M,P)$ подати у вигляді

$$G(M,P)=G_1+(G_2-G_1)S(z)+(G_3-G_2)S(z-h), \quad (3)$$

де

$$G_i = G_{i1} + (G_{i2} - G_{i1})S(\xi) + (G_{i3} - G_{i2})S(\xi - h), \qquad i = 1, 2, 3 \tag{4}$$

і підставити (3) в (1), то дістанемо, що рівняння (1) еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{\partial^2 G_{ij}}{\partial z^2} + \frac{\lambda_{ri}}{\lambda_{zi}} \Delta G_{ij} = -\frac{\delta_{ij}}{\lambda_{zi}} \delta(M, P), \; j = 1, 2, 3 \tag{5}$$

і умовам контакту

$$\begin{aligned} G_{1j} =& G_{2j}, \qquad \lambda_{z1} \frac{\partial G_{1j}}{\partial z} = \lambda_{z2} \frac{\partial G_{2j}}{\partial z}, \quad \text{при} \quad z = 0; \\ G_{2j} =& G_{3j}, \qquad \lambda_{z2} \frac{\partial G_{2j}}{\partial z} = \lambda_{z3} \frac{\partial G_{3j}}{\partial z}, \quad \text{при} \quad z = h, \end{aligned} \tag{6}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Застосуємо до задачі (1),(2) інтегральні перетворення [5] Фур'є

$$\bar{\bar{u}}(\nu, \varphi, r, z) = \int_0^{2\pi} u(\varphi, r, z) \cos \nu(\varphi - \varphi') \, d\varphi' \tag{7}$$

і Ганкеля

$$\bar{u}(\nu, \varphi, \eta, z) = \int_0^{\infty} r \, \bar{\bar{u}}(\nu, \varphi, r, z) \, J_\nu(\eta r) \, dr, \tag{8}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \overline{G}}{d z^2} - [\varepsilon_1^2 + (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) S(z) + (\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2^2) S(z - h)] \overline{G} + \frac{\lambda_{z2} - \lambda_{z1}}{\lambda_{z2}} \left. \frac{d \overline{G}}{d z} \right|_{z=0-0} \delta(z) + \\ + \frac{\lambda_{z3} - \lambda_{z2}}{\lambda_{z3}} \left. \frac{d \overline{G}}{d z} \right|_{z=h-0} \delta(z - h) = -\frac{A_\nu}{\lambda_z(\xi)} \delta(z - \xi), \end{aligned} \tag{9}$$

$$G|_{z \to \pm\infty} = 0, \tag{10}$$

де

$A_\nu = J_\nu(\eta \rho) \cos \nu(\varphi - \Theta)$, $\varepsilon_i^2 = \eta \gamma_i^2$, $\gamma_i = \sqrt{\dfrac{\lambda_{ri}}{\lambda_{zi}}}$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (9), знайдений методом варіації довільної сталої, має такий вигляд:

$$\overline{G} = C_1 \, Z_1(z) + C_2 \, Z_2(z) + \frac{A_\nu}{\varepsilon_1 \lambda_{z1}} [Z_1(z) \, Z_2(\xi) - Z_2(z) \, Z_1(\xi)] S(z - \xi), \tag{11}$$

де фундаментальна система розв'язків $Z_1(z)$ і $Z_2(z)$ відповідного однорідного рівняння визначається співвідношеннями [6]

$$\begin{aligned} Z_m(z) =& Z_{m1}(z) + [Z_{m2}(z) - Z_{m1}(z)] \, S(z) + [Z_{m3}(z) - Z_{m2}(z)] \, S(z - h), \; (m = 1, 2), \\ Z_{11}(z) =& \operatorname{ch} \varepsilon_1 z, \quad Z_{12}(z) = \operatorname{ch} \varepsilon_2 z, \quad Z_{13}(z) = \operatorname{ch} \varepsilon_2 h \operatorname{ch} \varepsilon_3 (z - h) + \\ & + N_2 \operatorname{sh} \varepsilon_2 h \operatorname{sh} \varepsilon_3 (z - h), \quad Z_{21} = \operatorname{sh} \varepsilon_1 z, \quad Z_{22} = N_1 \operatorname{sh} \varepsilon_2 z, \\ Z_{23}(z) =& N_1 \operatorname{sh} \varepsilon_2 h \operatorname{ch} \varepsilon_3 (z - h) + N_1 \, N_2 \operatorname{ch} \varepsilon_2 h \operatorname{sh} \varepsilon_3 (z - h), \\ N_k =& \frac{\Lambda_k}{\Lambda_{k+1}}, \qquad \Lambda_k = \sqrt{\lambda_{rk} \, \lambda_{zk}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Задовольнивши граничні умови (10), розв'язок задачі (9), (10) подамо у вигляді

$$\overline{G}(z,\xi)=g(\xi,z)\,S(z-\xi)+g(z,\xi)\,S(\xi-z), \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}
g(z,\xi)=&-\frac{A_\nu}{\varepsilon_1\lambda_{z1}}\,\frac{F(\xi)\,\Phi(z)}{\Phi_2(h)+\frac{N_2}{\varepsilon_2}\Phi_2'(h)},\\
F(\xi)=&[Z_{12}(h)+\frac{N_2}{\varepsilon_2}\,Z_{12}'(h)]\,Z_2(\xi)-[Z_{22}(h)+\frac{N_2}{\varepsilon_2}\,Z_{22}'(h)]\,Z_1(\xi),\\
\Phi(z)=&\Phi_1(z)+[\Phi_2(z)-\Phi_1(z)]\,S(z)+[\Phi_3(z)-\Phi_2(z)]\,S(z-h),\\
\Phi_1(z)=&\exp(\varepsilon_1 z),\quad \Phi_2(z)=\operatorname{ch}\varepsilon_2 z+N_2\operatorname{sh}\varepsilon_2 z,\\
\Phi_3(z)=&\Phi_2(h)\operatorname{ch}\varepsilon_3(z-h)+\frac{N_2}{\varepsilon_2}\,\Phi_2'(h)\operatorname{sh}\varepsilon_3(z-h);
\end{aligned}$$

штрихом позначено похідну за змінною z.

Розглянемо вираз для функції $\overline{G}(z,\xi)$ залежно від взаєморозміщення точок z, ξ. Тоді з (13) одержимо

$$\begin{aligned}
\overline{G}_{11}(z,\xi)=&\frac{A_\nu}{2\lambda_{z1}\varepsilon_1}\Big\{\exp[-\varepsilon_1(\xi-z)]\,S(\xi-z)+\exp[-\varepsilon_1(z-\xi)]\times\\
&\times S(z-\xi)-\frac{L}{M}\exp[\varepsilon_1(\xi+z)]\Big\},\\
\overline{G}_{12}(z,\xi)=&-\frac{A_\nu}{\lambda_{z2}\varepsilon_2 M}\{(1-N_2)\exp[\varepsilon_1 z-\varepsilon_2(2h-\xi)]-(1+N_2)\exp[\varepsilon_1 z-\varepsilon_2\xi]\},\\
\overline{G}_{13}(z,\xi)=&\frac{2A_\nu}{\lambda_{z3}\varepsilon_3 M}\exp[\varepsilon_1 z-\varepsilon_2 h-\varepsilon_3(\xi-h)],\\
\overline{G}_{22}(z,\xi)=&\frac{A_\nu}{2\lambda_{z2}\varepsilon_2}\Big\{\exp[-\varepsilon_2(\xi-z)]\,S(\xi-z)+\exp[-\varepsilon_2(z-\xi)]\,S(z-\xi)\Big\}-\\
&-\frac{A_\nu(1+N_1)}{2\lambda_{z2}\varepsilon_2 M}\Big\{-\frac{1-N_1}{1+N_1}(1+N_2)\exp[-\varepsilon_2(\xi+z)]+(1-N_2)\times\\
&\times\Big[\exp[\varepsilon_2(\xi+z)-2\varepsilon_2 h]+\frac{1-N_1}{1+N_1}\exp[-2\varepsilon_2 h](\exp[\varepsilon_2(\xi-z)]+\\
&+\exp[\varepsilon_2(z-\xi)])\Big]\Big\},\\
\overline{G}_{23}(z,\xi)=&\frac{A_\nu(1+N_1)}{\lambda_{z3}\varepsilon_3 M}\Big\{\frac{1-N_1}{1+N_1}\exp[-\varepsilon_2(z+h)-\varepsilon_3(\xi-h)]+\\
&+\exp[\varepsilon_2(z-h)-\varepsilon_3(\xi-h)]\Big\},\\
\overline{G}_{33}(z,\xi)=&\frac{A_\nu}{2\lambda_{z3}\varepsilon_3}\Big\{\exp[-\varepsilon_3(\xi-z)]\,S(\xi-z)+\exp[-\varepsilon_3(z-\xi)]\,S(z-\xi)+\\
&+\frac{1}{M}((1-N_2)(1+N_1)+(1+N_2)(1-N_1)\exp[-2\varepsilon_2 h])\times\\
&\times\exp[-\varepsilon_3(\xi+z)+2\varepsilon_3 h]\Big\},\\
\overline{G}_{21}(z,\xi)=&\overline{G}_{12}(\xi,z),\quad \overline{G}_{31}(z,\xi)=\overline{G}_{13}(\xi,z),\quad \overline{G}_{32}(z,\xi)=\overline{G}_{23}(\xi,z),
\end{aligned} \tag{14}$$

де
$L = (1 - N_1)(1 + N_2) + (1 - N_2)(1 + N_1)\exp[-2\varepsilon_2 h]$,
$M = (1 + N_2)(1 + N_1) + (1 - N_2)(1 - N_1)\exp[-2\varepsilon_2 h]$.

Переходячи в (14) до оригіналів, підсумовуємо ряди за індексами функцій Беселя. Інтеграли обчислюємо з врахуванням розкладу

$$\frac{1}{1 - v_1 v_2 \exp(-2\varepsilon_2 h)} = \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \exp(-2\varepsilon_2 h\, n),$$

де

$$v_1 = \frac{N_1 - 1}{N_1 + 1}, \quad v_2 = \frac{1 - N_2}{1 + N_2}.$$

У результаті отримаємо

$$G_{11}(M,P) = \frac{1}{4\pi\Lambda_1}\left[q_{11}^{(2)} + v_1 q_{11}^{(3)} + v_1 \sum_{n=1}^{\infty} q_{11}^{(1n)} - v_2 \sum_{n=0}^{\infty} q_{11}^{(2n)}\right],$$

$$G_{12}(M,P) = \frac{1}{2\pi(\Lambda_1 + \Lambda_2)}\left[q_{12}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} q_{12}^{(1n)} - v_2 \sum_{n=0}^{\infty} q_{12}^{(2n)}\right],$$

$$G_{13}(M,P) = \frac{\Lambda_2}{\pi(\Lambda_1 + \Lambda_2)(\Lambda_2 + \Lambda_3)} \sum_{n=0}^{\infty} q_{13}^{(1n)},$$

$$G_{22}(M,P) = \frac{1}{4\pi\Lambda_2}\left[-v_1 q_{22}^{(1)} + q_{22}^{(2)} - v_2 q_{22}^{(3)} - v_1 \sum_{n=1}^{\infty} q_{22}^{(1n)} - \right.$$

$$\left. - v_2 \sum_{n=1}^{\infty} q_{22}^{(2n)} + v_1 v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (q_{22}^{(3n)} + q_{22}^{(4n)})\right],$$

$$G_{23}(M,P) = \frac{1}{2\pi(\Lambda_2 + \Lambda_3)}\left[q_{23}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} q_{23}^{(1n)} - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} q_{23}^{(2n)}\right],$$

$$G_{33}(M,P) = \frac{1}{4\pi\Lambda_3}\left[v_2 q_{33}^{(1)} + q_{33}^{(2)} + v_2 \sum_{n=1}^{\infty} q_{33}^{(1n)} - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} q_{33}^{(2n)}\right],$$

$$G_{21}(M,P) = G_{12}(P,M), \quad G_{31}(M,P) = G_{13}(P,M), \quad G_{32}(M,P) = G_{23}(P,M). \tag{15}$$

Тут
$q_{ij}^{(s)} = [d^2 + (b_{ij}^{(s)})^2]^{-1/2}, \quad q_{ij}^{(mn)} = (v_1 v_2)^n [d^2 + (b_{ij}^{(mn)})^2]^{-1/2}$,
$b_{ii}^{(2)} = \gamma_i(\xi - z)\ (i = 1, 2, 3)$,
$b_{11}^{(3)} = \gamma_1(\xi + z), \quad b_{12}^{(1)} = \gamma_2\xi - \gamma_1 z, \quad b_{22}^{(1)} = \gamma_2(\xi + z)$,
$b_{22}^{(3)} = \gamma_2(\xi + z - 2h), \quad b_{23}^{(1)} = \gamma_2(h - z) + \gamma_3(\xi - h), \quad b_{33}^{(1)} = \gamma_3(\xi + z - 2h)$,
$b_{11}^{(1n)} = 2n\gamma_2 h - \gamma_1(\xi + z), \quad b_{11}^{(2n)} = 2(n+1)\gamma_2 h - \gamma_1(\xi + z)$,
$b_{12}^{(1n)} = (2nh + \xi)\gamma_2 - \gamma_1 z, \quad b_{12}^{(2n)} = [2(n+1)h - \xi]\gamma_2 - \gamma_1 z$,
$b_{13}^{(1n)} = (2n+1)\gamma_2 h - \gamma_1 z + \gamma_3(\xi - h), \quad b_{22}^{(1n)} = \gamma_2(2nh + \xi + z)$,
$b_{22}^{(2n)} = \gamma_2[2h(n+1) - \xi - z], \quad b_{22}^{(3n)} = \gamma_2[2(n+1)h + z - \xi]$,
$b_{22}^{(4n)} = \gamma_2[2(n+1)h + \xi - z], \quad b_{23}^{(1n)} = \gamma_2[(2n+1)h - z] + \gamma_3(\xi - h)$,
$b_{23}^{(2n)} = \gamma_2[(2n+1)h + z] + \gamma_3(\xi - h), \quad b_{33}^{(1n)} = 2n\gamma_2 h + \gamma_3(\xi + z - 2h)$,

$$b_{33}^{(2n)} = 2(n+1)\gamma_2 h + \gamma_3(\xi + z) - 2\gamma_3 h, \quad d^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \Theta). \tag{16}$$

Особливість мають тільки доданки з $g_{ij}^{(s)}$.

У декартовій системі координат x, y, z, коли джерело тепла зосереджене в точці $P(x_p, y_p, \xi)$, у формулах (15) треба прийняти $d^2 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2$ і замінити λ_{ri} на λ_{xi}, де λ_{xi} коефіцієнти теплопровідності в площині ізотропії i – ої області.

Співвідношення для елементів матриці Гріна в осесиметричному випадку, які отримують шляхом інтегрування (15) за кутом Θ у межах від 0 до 2π, мають також вигляд (15), але $q_{ij}^{(s)}$ і $q_{ij}^{(mn)}$ визначаються за такими формулами

$$
\begin{aligned}
q_{ij}^{(s)} &= 4\overline{k}_{ij}^{(s)} K(k_{ij}^{(s)}), \quad q_{ij}^{(mn)} = 4(v_1 v_2)^n \overline{k}_{ij}^{(mn)} K(k_{ij}^{(mn)}),\\
\overline{k}_{ij}^{(s)} &= [d_0^2 + (b_{ij}^{(s)})^2]^{-1/2}, \quad \overline{k}_{ij}^{(mn)} = [d_0^2 + (b_{ij}^{(mn)})^2]^{-1/2},\\
k_{ij}^{(s)} &= 2\sqrt{r\rho}\,\overline{k}_{ij}^{(s)}, \quad k_{ij}^{(mn)} = 2\sqrt{r\rho}\,\overline{k}_{ij}^{(mn)}, \quad d_0 = r + \rho;
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$K(x)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду.

Спрямувавши в (15) коефіцієнти теплопровідності верхнього півпростору до безмежності або до нуля,отримаємоспіввідношення для елементів матриці Гріна відповідно першої або другої крайової задачі для кусково-однорідного півпростору

$$
\begin{aligned}
G_{11}(M,P) &= \frac{1}{4\pi\Lambda_1}\Bigg[C_H p_{11}^{(1)} + p_{11}^{(2)} + v_1 p_{11}^{(3)} + v_1 \sum_{n=1}^{\infty} p_{11}^{(1n)} + \\
&\qquad + v_1 C_H \sum_{n=0}^{\infty}(p_{11}^{(2n)} + p_{11}^{(3n)}) + v_1 \sum_{n=0}^{\infty} p_{11}^{(4n)}\Bigg],\\
G_{12}(M,P) &= \frac{1}{2\pi(\Lambda_1+\Lambda_2)}\left[p_{12}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{12}^{(1n)} + C_H \sum_{n=0}^{\infty} p_{12}^{(2n)}\right],\\
G_{22}(M,P) &= \frac{1}{4\pi\Lambda_2}\left[-v_1 p_{22}^{(1)} + p_{22}^{(2)} - v_1 \sum_{n=1}^{\infty} p_{22}^{(1n)} + C_H \sum_{n=0}^{\infty} p_{22}^{(2n)}\right],\\
G_{21}(M,P) &= G_{12}(P,M),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&p_{ij}^{(s)} = [d^2 + (b_{ij}^{(s)})^2]^{-1/2}, \quad p_{ij}^{(mn)} = (C_H v_1)^n [d^2 + (b_{ij}^{(mn)})^2]^{-1/2},\\
&b_{11}^{(1)} = \gamma_1(\xi + z) \quad b_{11}^{(2)} = \gamma_1(\xi - z), \quad b_{11}^{(3)} = \gamma_1(\xi + z - 2h),\\
&b_{12}^{(1)} = \gamma_1(h - z) + \gamma_2(\xi - h), \quad b_{22}^{(1)} = \gamma_2(\xi + z - 2h), \quad b_{22}^{(2)} = \gamma_2(\xi - z),\\
&b_{11}^{(1n)} = \gamma_1[2(n+1)h - z - \xi), \quad b_{11}^{(2n)} = \gamma_1[2(n+1)h - \xi + z),\\
&b_{11}^{(3n)} = \gamma_1[2(n+1)h - z + \xi), \quad b_{11}^{(4n)} = \gamma_1[2(n+1)h + z + \xi],\\
&b_{12}^{(1n)} = 2n\gamma_1 h + \gamma_1(h - z) + \gamma_2(\xi - h), \quad b_{12}^{(2n)} = 2n\gamma_1 h + \gamma_1(h + z) + \gamma_2(\xi - h),\\
&b_{22}^{(1n)} = 2n\gamma_1 h + \gamma_2(\xi + z - 2h), \quad b_{22}^{(2n)} = 2\gamma_1(n+1)h + \gamma_2(\xi + z - 2h),
\end{aligned}
$$

для першої крайової задачі $C_H = -1$, для другої - $C_H = 1$.

Для осесиметричного випадку у формулах (18) необхідно прийняти

$$
\begin{aligned}
&p_{ij}^{(s)} = 4\overline{k}_{ij}^{(s)} K(k_{ij}^{(s)}), \quad p_{ij}^{(mn)} = 4(C_H v_1)^n \overline{k}_{ij}^{(mn)} K(k_{ij}^{(mn)}),\\
&\overline{k}_{ij}^{(s)} = [d_0^2 + (b_{ij}^{(s)})^2]^{-1/2}, \quad \overline{k}_{ij}^{(mn)} = [d_0^2 + (b_{ij}^{(mn)})^2]^{-1/2},\\
&k_{ij}^{(s)} = 2\sqrt{r\rho}\,\overline{k}_{ij}^{(s)}, \quad k_{ij}^{(mn)} = 2\sqrt{r\rho}\,\overline{k}_{ij}^{(mn)}.
\end{aligned}
$$

Прирівнюючи коефіцієнти теплопровідності шару і нижнього півпростору, з (15) отримаємо елементи матриці Гріна для простору, який складається з двох півпросторів

$$G_{11}(M,P) = \frac{1}{4\pi\Lambda_1}\left\{[d^2+\gamma_1^2(\xi-z)^2]^{-1/2} + v_1[d^2+\gamma_1^2(\xi+z)^2]^{-1/2}\right\},$$
$$G_{12}(M,P) = \frac{1}{2\pi(\Lambda_1+\Lambda_2)}\left[d^2+(\gamma_2\xi-\gamma_1 z)^2\right]^{-1/2}, \quad G_{21}(M,P) = G_{12}(P,M),$$
$$G_{22}(M,P) = \frac{1}{4\pi\Lambda_2}\left\{\left[d^2+\gamma_2^2(\xi-z)^2\right]^{-1/2} - v_1\left[d^2+\gamma_2^2(\xi+z)^2\right]^{-1/2}\right\}.$$

Для осесиметричних задач матимемо

$$G_{11}(M,P) = \frac{1}{\pi\Lambda_1}\left[\overline{k}_1{}^{-1}K(k_1) + v_1\overline{k}_2{}^{-1}K(k_2)\right],$$
$$G_{12}(M,P) = \frac{2}{\pi(\Lambda_1+\Lambda_2)}\overline{k}_3{}^{-1}K(k_3), \quad G_{21}(M,P) = G_{12}(P,M),$$
$$G_{22}(M,P) = \frac{1}{\pi\Lambda_2}\left[\overline{k}_4{}^{-1}K(k_4) - v_1\overline{k}_5{}^{-1}K(k_5)\right],$$

де

$$\overline{k}_1{}^2 = d_0^2+\gamma_1^2(\xi-z)^2, \quad \overline{k}_2{}^2 = d_0^2+\gamma_1^2(\xi+z)^2,$$
$$\overline{k}_3{}^2 = d_0^2+(\gamma_2\xi-\gamma_1 z)^2, \quad \overline{k}_4{}^2 = d_0^2+\gamma_2^2(\xi-z)^2,$$
$$\overline{k}_5{}^2 = d_0^2+\gamma_2^2(\xi+z)^2, \quad k_i{}^2 = 4r\rho\overline{k}_i{}^{-2}, \quad (i=1,2,3,4,5).$$

Наведені вирази для елементів матриці Гріна дають змогу розв'язувати методом граничних інтегральних рівнянь великий клас задач теплопровідності для трьох- і двошарових трансверсально-ізотропних тіл, обминаючи процедуру відшукання значень відповідних величин на границі розділу областей.

---

1. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Метод граничных элементов в прикладных науках. – М., 1984.
2. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. – М., 1987.
3. *Мельников Ю.А., Красникова Р.Д.* Построение функций Грина некоторых граничных задач математической физики. – Днепропетровск, 1981.
4. *Коляно Ю.М., Процюк Б.В., Драпкин Б.А.* Функция Грина для пространственных стационарных задач теплопроводности многослойного тела// Диференциальные уравнения. – 1992. – Т.28. – N 3. – С. 524-527.
5. *Галицын А.С., Жуковский А.Н.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. - К., 1976.
6. *Процюк Б.В.* Фундаментальна система розв'язків диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами і її використання при розв'язуванні задач термопружності. – Крайові задачі термомеханіки. Зб. наук. пр.: Київ. Ін-т математики НАН України. 1996. – Ч.2. – С. 89-94.

B. Protsuk, I. Verba

THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF STEADY-STATE HEAT CONDITION PROBLEM FOR PEACE-WISE HOMOGENEOUS TRANSVERSELY-ISOTROPIC SPACE

Green's function of steady-state heat condition problem for peace-wise homogeneous space consisting of two transversely-isotropic half spaces and interlayer is constructed.

Стаття надійшла до редколегії 18.06.99