ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.176–178

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.176–178

УДК 517.576

Тетяна Сало, Олег Скасків

ПРО ВИНЯТКОВІ МНОЖИНИ У ТЕОРЕМАХ ТИПУ ВІМАНА-ВАЛІРОНА

1°. Через $H(\Lambda)$ позначимо клас абсолютно збіжних у всій комплексній площині рядів Діріхле

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

$\Lambda=(\lambda_n)$, $0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty$ $(1\leqslant n\to+\infty)$. Для $F\in H(\Lambda)$ і $\sigma\in\mathbb{R}$ позначимо $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+iy)|:y\in\mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}:n\geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (1), $\nu(\sigma)=\nu(\sigma,F)=\max\{n:|a_n|e^{\sigma\lambda_n}=\mu(\sigma,F)\}$ – центральний індекс ряду (1).

Нехай L – клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функцій. Для $\Phi\in L$ позначимо

$$H(\Lambda,\Phi)=\{F\in H(\Lambda):(\exists K_F>0)(\ln\mu(\sigma,F)\geqslant K_F\sigma\Phi(\sigma),\sigma\geqslant\sigma_0)\}.$$

Для вимірної множини $E\subset[0,+\infty)$ скінченної міри $\mathrm{meas}E<+\infty$ її h – щільністю назвемо

$$D_h(E)=\overline{\lim_{R\to+\infty}}\, h(R)\mathrm{meas}(E\cap[R,+\infty)),$$

де $h\in L$. Для $\varphi\in L$ через L_φ позначимо клас функцій $h\in L$ таких, що

$$\frac{h(\varphi(t))}{t}\ln t\to 0\quad(t\to+\infty).$$

Нехай всюди нижче $\varphi(t)$ функція обернена до функції $\Phi(t)\in L$.

В [1] показано, що для того щоб для кожної цілої функції $F\in H(\Lambda)$ співвідношення

$$F(\sigma+iy)=(1+o(1))a_{\nu(\sigma)}e^{(\sigma+iy)\lambda_{\nu(\sigma)}} \tag{2}$$

виконувалось при $\sigma\to+\infty$ зовні деякої множини скінченної міри і рівномірно по $y\in\mathbb{R}$, необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}<+\infty. \tag{3}$$

Подібний результат для цілих функцій заданих лакунарним степеневим рядом раніше доведено у [2].У статті [3] ці результати доповнюються в класі $H(\Lambda,\Phi)$ твердженням про величину виняткової множини у співвідношенні (2). Власне правильна така теорема.

Теорема А. *Нехай* $\Phi \in L$ *і* $h \in L_\varphi$. *Якщо* $F \in H(\Lambda, \Phi)$ *і*

$$(\forall b > 0): \lim_{\sigma \to +\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi(\sigma)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0, \tag{4}$$

то співвідношення (2) виконується при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E, D_h(E) = 0)$ *рівномірно по* $y \in \mathbb{R}$.

У випадку $\Phi(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, в [3] показано, що умова (4) є і необхідною для того, щоб співвідношення (2) справджувалось для кожної функції $F \in H(\Lambda, \Phi)$, при $\sigma \to +\infty (\sigma \notin E,\ D_h(E) = 0)$.

Мета цього повідомлення – виявити необхідність умови (4) у випадку $\Phi \in L$. Вважатимемо всюди нижче, що ряд (3) є збіжним. Для $\Phi \in L$ введемо клас дещо ширший за $H(\Lambda, \Phi)$,а саме

$$H_1(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : (\exists K_1 > 0)(\exists K_2 > 0)(\ln \mu(\sigma, F) \geqslant K_1 \sigma \Phi(K_2 \sigma), \sigma \geqslant \sigma_0)\}.$$

Правильне таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\Phi \in L, h \in L_\varphi$ *і умова (4) не виконується. Тоді існують функція* $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$, *стала* $\beta > 0$ *і множина* E *з* $D_h(E) > 0$ *такі, що для всіх* $\sigma \in E$

$$F(\sigma) > (1 + \beta)\mu(\sigma, F). \tag{5}$$

Доведення. Маємо змогу повторювати міркування з [3] (з доведення теореми 2). Справді, з заперечення умови (4) випливає, що існує послідовність $n_j \uparrow +\infty (j \to +\infty)$ така, що для деяких $b > 0, d > 0$

$$h\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{b}\right)\right) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \geqslant d > 0 \quad (n = n_j, j \geqslant 1). \tag{6}$$

Вибираючи $\varkappa_n = \sum\limits_{k=1}^{n-2} r_k$ $(n \geqslant 2)$, де $r_1 = \max\{\varphi(\frac{\lambda_2}{b}), \frac{b_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\}$, $r_k = \max\{\varphi(\frac{\lambda_{k+1}}{b}) - \varphi(\frac{\lambda_k}{b}), \frac{b_1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}\}$, а також $a_0 = 1, a_n = \exp\{-\sum\limits_{k=1}^{n} \varkappa_k (\lambda_k - \lambda_{k-1})\}$, одержуємо, що $\varkappa_n = \frac{\ln a_{n-1} - \ln a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$. Враховуючи, що $\varkappa_n \uparrow +\infty (n \to +\infty)$, звідси негайно отримуємо, що для всіх $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$ і $n \geqslant 0$ виконується $\mu(\sigma) \overset{def}{=} \max\{a_k e^{\sigma \lambda_k} : k \geqslant 0\} = a_n e^{\sigma \lambda_n}$. Зауважимо, що $\varkappa_{n+1} - \varkappa_n = r_{n-1} \geqslant \frac{b_1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$. Тому для всіх $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_n + \frac{b_1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}]$ та $n \geqslant n_0$ маємо

$$\frac{a_{n-1} e^{\sigma \lambda_{n-1}}}{\mu(\sigma)} = \exp\{(\lambda_n - \lambda_{n-1})(\varkappa_n - \sigma)\} \geqslant e^{-b_1} = \beta. \tag{7}$$

Нехай тепер F–функція, яка визначена рядом (1) з щойно визначеними коефіцієнтами (a_n). Оскільки з умови (3) за нерівністю Коші-Буняковського $\sum\limits_{k=m}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \geqslant \frac{(n-m)^2}{\lambda_n - \lambda_m}$ маємо $n^2 = o(\lambda_n)(n \to +\infty)$, а за побудовою $-\frac{1}{\lambda_n} \ln a_n \to +\infty (n \to +\infty)$, то, очевидно, що $F \in H(\Lambda)$. Крім того, $\mu(\sigma, F) \equiv \mu(\sigma)$. Тому для всіх $\sigma \in E \overset{def}{=} \bigcup\limits_{n=n_0}^{+\infty} [\varkappa_n; \varkappa_n + \frac{b_1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}]$ з нерівності (7) одержуємо

$F(\sigma) \geqslant (1+\beta)\mu(\sigma, F)$. Враховуючи, що при $\sigma \geqslant \sigma_0$ для $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1})$

$$\ln \mu(2\sigma, F) \geqslant \int_{\sigma}^{2\sigma} \lambda_{\nu(x)} dx \geqslant \sigma\lambda_{\nu(\sigma)} = \sigma\lambda_n \geqslant b\sigma\Phi\left(\frac{\varkappa_n+1}{2}\right) \geqslant b\sigma\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right),$$

то $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$. Оскільки $\mathrm{meas}(E \cap [\varkappa_{n+1}; +\infty)) = b_1 \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}$, то за допомогою нерівності (6) при $n = n_j$ одержуємо

$$h(\varkappa_{n+1})\mathrm{meas}(E \cap [\varkappa_{n+1}, +\infty)) = h\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{b}\right)\right) b_1 \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \geqslant b_1 d$$

і, отже, $D_h(E) \geqslant b_1 d > 0$. Теорему (1) доведено.

Позначимо тепер $L'_\varphi = L_\varphi \cap \{h \in L : (h(2x) = O(h(x)) \ , x \to +\infty)\}$.
Правильний такий критерій.

Теорема 2. *Нехай* $\Phi \in L, h \in L'_\varphi$. *Для того щоб для кожної функції* $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$ *співвідношення (2) виконувалось при* $\sigma \to +\infty(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E, D_h(E) = 0)$ *і рівномірно по* $y \in \mathbb{R}$, *необхідно і достньо, щоб справджувалась умова (4).*

Доведення. Необхідність дає теорема 1.

Для доведення достатності зауважимо, що з умови $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$ випливає, що $\exists K_2 > 0$ таке, що $F \in H(\Lambda, \Phi_1)$, де $\Phi_1(x) = \Phi(K_2 x)$. Виконання умови (4) разом з умовою $h \in L'_\varphi$ дає правильність такого твердження:

$$(\forall b > 0) : \lim_{\sigma \to +\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi_1(\sigma)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0, \tag{8}$$

і стає можливим застосування теореми А, де роль функції $\Phi(x)$ відіграє вищевизначена функція $\Phi_1(x)$. Це завершує доведення теореми.

---

1. *Скасків О.Б.* Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле // Доп.АН УРСР. Сер. А. – 1984. – N 11. – С.22-24.
2. *Fenton P.C.* The minimum modulus of gap power series//Proc.Edinburgh Math.Soc. – 1978. – Vol. 21. – P.49-54.

T. Salo, O. Skaskiv

ON THE EXCEPTIONAL SETS IN THE THEOREMS OF WIMAN-VALIRON TYPE

For entire Dirichlet series $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ necessary and sufficient conditions are established in order that

$$\sup\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}\} = (1 + o(1)) \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$$

would be valid as $\sigma \to +\infty$ outside some set E with $DE = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} h(\sigma)\mathrm{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) = 0$, where $h(\sigma)$ is nonnegative continuous increasing to $+\infty$ function on $[0, +\infty)$.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99