ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.179–184 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.179–184*

УДК 519.21

Ярослав Чабанюк

ДИСКРЕТНА СТОХАСТИЧНА ПРОЦЕДУРА У МАРКІВСЬКОМУ ВИПАДКОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

1. *Марківське випадкове середовище* задається однорідним ергодичним стрибковим марківським процесом $x(t)$, $t \geqslant 0$ у стандартному фазовому просторі $(X, \mathcal{X})$ породжуючим оператором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int\limits_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]. \tag{1}$$

Інтенсивність стрибків $q(x) > 0$, $x \in X$ вважається рівномірно обмеженою функцією

$$\|q(x)\| := \sup_{x\in X} q(x) < \infty.$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathcal{X}$ задає ймовірності переходу *вкладеного ланцюга Маркова* (ВЛМ)

$$x_n := x(\tau_n), \quad n \geqslant 0,$$
$$P(x, B) = \mathcal{P}\{x_{n+1} \in B / x_n = x\}.$$

Моменти марківського відновлення τ_n, $n \geqslant 0$ визначають моменти стрибків процесу $x(t)$, $t \geqslant 0$. Отже, час перебування у станах визначається співвідношенням

$$\theta_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n, \quad n \geqslant 0, \quad \tau_0 = 0$$

і задається функціями розподілу

$$\mathcal{P}\{\theta_{n+1} \leqslant t / x_n = x\} = 1 - e^{-tq(x)}, \quad t \geqslant 0.$$

Марківський процес відновлення (МПВ) x_n, θ_n, $n \geqslant 0$, задається напівмарківським ядром

$$\mathcal{P}\{x_{n+1} \in B, \theta_{n+1} \leqslant t / x_n = x\} = P(x, B)(1 - e^{-tq(x)}).$$

Стаціонарний розподіл ВЛМ визначається рівнянням

$$\rho(B) = \int\limits_X \rho(dx) P(x, B), \quad B \in \mathcal{X}, \quad \rho(X) = 1.$$

Стаціонарний розподіл процесу $x(t)$, $t \geqslant 0$ задається співвідношенням

$$\pi(dx) q(x) = q\rho(dx), \quad q = \int\limits_X \pi(dx) q(x).$$

Введемо лічильний процес

$$\nu(t) := \max\{n : \ \tau_n \leqslant t\}, \ \ t \geqslant 0,$$

який визначає кількість стрибків процесу $x(t)$, $t \geqslant 0$ на відрізку часу $[0,t]$. Зауважимо, що за означенням лічильний процес $\nu(t)$, $t \geqslant 0$, неперервний праворуч і $\nu(\tau_n) = n$, $n \geqslant 0$.

2. *Дискретна стохастична процедура* (ДСП) у марківському випадковому середовищі задається рекурентним співвідношенням

$$(I) \qquad u_{n+1}^\varepsilon = u_n^\varepsilon + \varepsilon a_n^\varepsilon R(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), \ \ n \geqslant 0. \tag{2}$$

Функція регресії $R(u,x)$, $u \in R^d$, $x \in X$ задовольняє певним умовам, що будуть наведені далі. Послідовність чисел a_n^ε, $n \geqslant 0$ визначається значеннями неперервної функції $a(t)$, $t \in R_+ = [0,\infty)$

$$a_n^\varepsilon = a(\varepsilon n), \ \ n \geqslant 0,$$

що задовольняє звичайним умовам збіжності стохастичної процедури [2]:

$$a(t) > 0, \ \ \int\limits_0^\infty a(t)dt = \infty, \ \ \int\limits_0^\infty a^2(t)dt < \infty. \tag{3}$$

Процес x_n^ε, $n \geqslant 0$ визначається через $x(t)$, $t \geqslant 0$ [5] співвідношенням

$$x_n^\varepsilon = x(n/\varepsilon), \ \ \varepsilon > 0.$$

Введемо *дискретну детерміновану рекурентну процедуру* (ДРП)

$$(II) \qquad \widehat{u}_{n+1}^\varepsilon = \widehat{u}_n^\varepsilon + \varepsilon a_n^\varepsilon R(\widehat{u}_n^\varepsilon), \ \ n \geqslant 0, \tag{4}$$

де усереднена функція регресії $R(u)$ визначається формулою

$$R(u) = q \int\limits_X \rho(dx) R(u,x). \tag{5}$$

Поряд з ДСП I розглядатимемо *стрибкову стохастичну процедуру* (ССП)

$$(III) \qquad u^\varepsilon(t) = u_0 + \varepsilon \sum_{n=0}^{\nu(t/\varepsilon)} a_n^\varepsilon R(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), \ \ t \geqslant 0. \tag{6}$$

З'язок ДСП I з ССП III визначається рівністю

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\varepsilon\tau_n), \ \ n \geqslant 0, \tag{7}$$

тобто ДСП I є *вкладеною* в ССП III.

Зворотний зв'язок ССП III з ДСП I визначається співвідношенням

$$u^\varepsilon(t) = u_{\nu(t/\varepsilon)}^\varepsilon(t). \tag{8}$$

Крім того, використовуватимемо *неперервну рекурентну процедуру* (НРП), яка визначається еволюційним рівнянням

$$(IV) \qquad du(t) = a(t)R(u(t))dt, \ \ t \geqslant 0, \ \ u(0) = u_0. \tag{9}$$

3. Як відомо [2], процедура стохастичної апроксимації Робінсона-Монро була запропонована для обчислення кореня u_0 рівняння регресії

$$R(u) = 0, \ \ u \in R^d. \tag{10}$$

Розглядаючи стохастичний експеримент для обчислення кореня рівняння (10), робимо висновок, що вигляд функції регресії змінюється під впливом випадкових факторів. Надалі будемо вважати, що випадкові фактори описуються однорідним стрибковим марківським процесом $x(t)$, $t \geqslant 0$, у стандартному фазовому просторі $(X, \mathcal{X})$ з породжуючим оператором Q, (1) та стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \mathcal{X}$, $\pi(B) = \lim\limits_{t \to \infty} \mathcal{P}\{x(t) \in B / x(0) = x\}$ рівномірно за $B \in \mathcal{X}$ та $x \in X$.

Функція регресії $R(u, x)$ тепер залежить від стану $x \in X$ марківського середовища. Ергодичність марківського процесу $x(t)$, $t \geqslant 0$ забезпечує дію принципу усереднення (5). Використовуючи принцип усереднення, виявляється, що збіжність неперервної рекурентної процедури IV забезпечує збіжність ССП III. Збіжність ДРП II забезпечує збіжність НРП IV. Враховуючи, що ДСП I є вкладеною в ССП III, робимо висновок, що збіжність ДРП II забезпечує збіжність ДСП I. Така програма подальшого аналізу.

4. Доведемо збіжність ССП III. Для цього розглянемо еволюційну систему

$$du(t)/dt = R(u(t)). \tag{11}$$

Нехай $V(u)$ — функція Ляпунова для (11), а $u_0 = 0$.

Теорема. *Нехай еволюційна система (11) рівномірно експоненціально стійка і функція $R(u)$ має обмежені перші дві похідні та виконуються оцінки:*

$$R(u)V'(u) \leqslant -c_0 V(u), \tag{12}$$

$$|R(u,x)\widetilde{R}'_u(u,x)V'(u)| \leqslant c_1 V(u), \tag{13}$$

$$|\widetilde{R}(u,x)V''(u)R(u,x)| \leqslant c_2 V(u), \tag{14}$$

де

$$\widetilde{R}(u,x) := R(u) - R_1(u,x), \tag{15}$$

$$R_1(u,x) := \int\limits_X Q(x,dy)R(u,y), \tag{16}$$

$$c_i > 0, \quad (i = \overline{0,2}).$$

Крім того,

$$|R(u) \leqslant c(1 + |u|^2), \quad (u \to \infty). \tag{17}$$

Тоді разом із збіжністю НРП IV:

$$u(t) \to 0, \quad t \to \infty, \tag{18}$$

є збіжність за ймовірністю і в середньому квадратичному ССП III:

$$u^\varepsilon(t) \to 0, \quad t \to \infty \tag{19}$$

при всіх $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ — достатньо мале.

Доведення. Передусім зауважимо, що ССП III разом із марківським процесом $x(t)$, $t \geqslant 0$, утворює марківський процес.

Лема 1. *Двокомпонентний марківський процес* $u^\varepsilon(t)$, $x^\varepsilon(t) := x(t/\varepsilon)$, $t \geqslant 0$, *визначається породжуючим оператором*

$$L_t^\varepsilon \varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}[Q + R_t^\varepsilon]\varphi(u,x), \tag{20}$$

де оператори R_t^ε *задаються так:*

$$R_t^\varepsilon \varphi(u,x) := \int_X Q(x,dy)[\varphi(u + \varepsilon a_t^\varepsilon R(u,y), y) - \varphi(u,y)], \tag{21}$$

а ядро $Q(x,dy)$ *визначають за формулою*

$$Q(x,dy) := q(x)P(x,dy).$$

Доведення леми 1. Аналогічне доведенню подібної леми 1 в [1, с. 83-84].

Оператор L_t^ε на двічі неперервно диференційованих за u функціях $\varphi(u,x)$ має асимптотичне представлення:

$$L_t^\varepsilon \varphi(u,x) = [\varepsilon^{-1}Q + a_t^\varepsilon R(x)]\varphi(u,x) + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2\theta_\varepsilon(u,x), \tag{22}$$

де

$$R(x)\varphi(u,y) = \int_X Q(x,dy)R(u,y)\varphi_u'(u,y), \tag{23}$$

а залишкова функція $\theta_\varepsilon(u,x)$ допускає оцінку

$$|\theta_\varepsilon(u,x)| \leqslant c_\varepsilon(1 + |u|^2), \quad c_\varepsilon \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{24}$$

Тепер доведення теореми 1 завершується за схемою доведення теореми усереднення з використанням умов збіжності марківських процесів [1, с. 105-108].

Розглянемо *збурену функцію Ляпунова*

$$V^\varepsilon(u,x,t) = V(u) + \varepsilon a_t^\varepsilon V_1(u,x), \tag{25}$$

де $V(u)$ є функція Ляпунова для еволюційної системи (11), що задовольняє умовам

$$R(u)V'(u) \leqslant -cV(u), \quad c > 0, \tag{26}$$

$$V(u) \leqslant c_3|u|^2, \quad |V'(u)| \leqslant c_4|u|, \quad |V''(u)| \leqslant c_5, \tag{27}$$

а функція збурення $V_1(u,x)$ визначається розв'язком рівняння

$$QV_1(u,x) = \int_X Q(x,dy)\widetilde{R}(u,y)V'(u). \tag{28}$$

Розглянемо дію породжуючого оператора L_t^ε на збурену функцію Ляпунова $V^\varepsilon(u,x,t)$.

$$\begin{aligned} L_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x,t) &= [\varepsilon^{-1}Q + a_t^\varepsilon R(x)][V(u) + \varepsilon a_t^\varepsilon V_1(u,x)] + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2\theta_\varepsilon(u,x) = \\ &= a_t^\varepsilon QV_1(u,x) + a_t^\varepsilon R(x)V(u) + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2 R(x)V_1(u,x) + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2\theta_\varepsilon(u,x) = \\ &= a_t^\varepsilon[QV_1(u,x) + R(x)V(u)] + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2 RxV_1(u,x) + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2\theta_\varepsilon(u,x). \end{aligned}$$

Вираз у квадратних дужках згідно з (28) визначається рівністю

$$QV_1(u,x) + R(x)V(u) = R(u)V'(u). \tag{29}$$

Далі нехай R_0 – потенціал зведено-оборотного оператора Q, тоді розв'язок рівняння (28) можна подати у вигляді

$$V_1(u,x) = R_0(\widetilde{R}(u,x)V'(u)). \tag{30}$$

Оскільки згідно з (23)

$$R(x)V_1(u,x) = \int_X Q(x,dy)R(u,y)V'_{1u}(u,y), \tag{31}$$

то, враховуючи (30), маємо

$$R(x)V_1(u,x) = \int_X Q(x,dy)R(u,y)(R_0(\widetilde{R}(u,y)V'(u)))'_u =$$

$$= \int_X Q(x,dy)R(u,y)(R_0(\widetilde{R}'_u(u,y)V'(u) + \widetilde{R}(u,y)V''(u))). \tag{32}$$

Згідно з оцінками (13), (14) для $R(x)V_1(u,x)$ маємо

$$|R(x)V_1(u,x)| \leqslant c_6 V(u). \tag{33}$$

Використовуючи оцінки (26) та (33), маємо остаточну нерівність

$$|L_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x,t)| \leqslant a_t^\varepsilon(-cV(u) + c_6\varepsilon V(u)) + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2\theta_\varepsilon(u) \leqslant$$

$$\leqslant -a_t^\varepsilon(c - c_6\varepsilon)V(u) + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2\theta_\varepsilon(u) \leqslant -c_8 a_t^\varepsilon V(u) + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2\theta_\varepsilon(u), \tag{34}$$

де $\theta_\varepsilon(u) := \max_{x\in X}|\theta_\varepsilon(u,x)|$, а $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = c/c_6$.

Згідно з теоремою Невельсона-Хасмінського [2, с. 100-101] маємо збіжність (19).

Нагадаємо, що функція $R(u)$ є усередненням функції $R(u,y)$ згідно з (5). Отже, для правої частини (28) виконується умова розв'язності:

$$\prod \int_X Q(x,dy)\widetilde{R}(u,y)V'(u) = \int_X \pi(dx)q(x)\int_X P(x,dy)\widetilde{R}(u,y)V'(u) =$$

$$= q\int_X \rho(dx)\int_X P(x,dy)\widetilde{R}(u,y)V'(u) = q\int_X \rho(dy)[R(u) - R(u,y)]V'(u) = 0.$$

Якщо функція Ляпунова для (11) задовольняє додатковим умовам в околі точки рівноваги функції регресії та на нескінченності, тоді можна сформулювати збіжність ССП III із ймовірністю 1.

Теорема 2. *(IV → III) Нехай функція Ляпунова $V(u)$ для (11) задовольняє умовам теореми 1 і додатково для будь-якого $\delta > 0$*

$$\inf_{0<\delta<|u|\leqslant 1/\delta} V(u) > 0, \quad \text{та} \quad V(u) \to \infty, \quad \text{при} \quad u \to \infty. \tag{35}$$

Тоді для кожного $u = u^\varepsilon(0) \in R^d$ ССП III збігається з ймовірністю 1:

$$\mathcal{P}\left\{\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = 0\right\} = 1. \tag{36}$$

Доведення теореми 2 ґрунтується на асимптотичному співвідношенні (22). Тепер додаткові умови (35) на функцію Ляпунова $V(u)$ забезпечують можливість застосування теореми збіжності марківського процесу до множини рівноваги [2, с. 58-60].

5. *Збіжність дискретної стохастичної процедури* I. Основна мета нашого дослідження – довести збіжність ДСП I у марківському середовищі за умови збіжності ДРП II з функцією регресії $R(u)$, що є результатом усереднення (5) функції регресії $R(u, x)$. Для цього досить довести, що збіжність ДРП II забезпечує збіжність НРП IV.

Лема 2. *[3,5]. Якщо функція регресії $R(u)$ задовольняє умовам Ліпшиця*

$$|R(u) - R(u')| \leqslant C|u - u'|,$$

тоді з ймовірністю 1, для будь-якого $T > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{n \leqslant T/\varepsilon} |u_n^\varepsilon - u(\varepsilon n)| = 0.$$

Лема 3. *Збіжність ДРП II забезпечує збіжність НРП IV при всіх $q \leqslant \varepsilon_0$ — достатньо мале.*

З теореми 1 і лем 2,3 випливає теорема 3.

Теорема 3. *($II \to I$) Із збіжності ДРП II випливає збіжність ДСП I.*

Автор висловлює вдячність академіку НАН України Королюку В.С. за постановку задачі і постійну увагу до статті під час її написання.

1. *Королюк В.С.* Стохастичні моделі систем. – К., 1993.
2. *Невельсон М.Б., Хасминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекурентное оценивание. – М., 1972.
3. *Скороход А.В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – К., 1987.
4. *Королюк В.С., Свищук А.В.* Полумарковские случайные эволюции. – К., 1992.
5. *Hoppensteadt, F.,Salehi, H., Skorokhod A.* Discrete Time Simigroup Transformations with Random Perturbations// Jour. of Dyn. And Diff.Eqs. – 1997. – 3. – P. 463-505.

J. Chabanyuk

DISCRETE STOCHASTIK PROCEDURE IN MARKOV ACCIDENTAL ENVIRONMENT

The procedure of stochastic Robinson-Monro approximation is considered for calculation of the root of regression equation when regression function depends on influence of accidental faktors. The ergodicity of Markov process that decribes the outdoor environment allows to use the everaging principle. This gives a possibility to form for discrete stochastic procedure a row of procedures: determined reccurence procedure, stochastic procedure, jump and continuous stochastic procedure. The convergence of diskrete stochastic procedure is proved by means of the solution of singular perturbasion problem where Lyapunov function and nesting of corresponding procedures are used.

Стаття надійшла до редколегії 05.02.99