ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.185–192 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.185–192*

УДК 517.956

Уляна Ярка

СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Крайові задачі з однаковим спектром для лінійних диференціальних рівнянь вивчались у працях [1 – 4]. У [2] досліджено властивості розв'язків граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь на скінченому інтервалі. В цій праці результати цієї публікації узагальнено для випадку диференціально-операторних рівнянь.

Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, $A : H \to H, A = A^* > 0, \sigma_p(A) = \{z_k : z_k = O(k^\alpha), k \to \infty, \alpha > 0\}$, $V(A) = \{v_k \in H : Av_k = z_k v_k, \| v_k \|_H = 1, (v_k, v_m)_H = 0, k \neq m, k, m = 1, 2, \dots\}$, $H_1 = \{f(t) : f : (0,1) \to H, \|f(t)\|_H \in L_2(0,1)\}$, $W_2^{2n}((0,1), H) = \{v \in H_1, D_t^{2n}v(t) \in H_1, A^{2n}v(t) \in H_1\}$, $\|v\|^2_{W_2^{2n}} \equiv \|D_t^{2n}v\|^2_{H_1} + \|A^{2n}v\|^2_{H_1}$, $\|u(t)\|_{H_1} = \|\|u(t)\|_H\|_{L_2(0,1)}$, D_t – сильна похідна в H_1 [1], $H_n = \{v : v(1-t) = v(t)\}$, $H_н = \{v : v(1-t) = -v\}$.

Розглянемо задачу:

$$\mathcal{L}u(t) \equiv \mathcal{L}_0 u(t) + \triangle\mathcal{L}u(t) = f(t);$$
$$\mathcal{L}_0 u(t) \equiv (-1)^n D_t^{2n} u(t) + A^{2n} u(t) \quad (t \in (0,1)) \tag{1}$$
$$l_{2j+1}u \equiv D_t^{2j}u(0) - D_t^{2j}u(1) = 0,$$
$$l_{2j+2}u \equiv D_t^{2j}u(0) + D_t^{2j}u(1) = 0 \ (j = \overline{0, n-1}), \tag{2}$$

де

$$\triangle\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{2n-1} b_j A^j (D_t^{2n-j-1}u(t) -$$
$$- (-1)^j D_t^{2n-j-1}u(1-t)) \ (b_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, 2n-1}).$$

Введемо в розгляд оператори $L_0 : H \to H; L : H \to H$,

$$L_0 u \equiv \mathcal{L}_0 u; u \in D(L_0),\ D(L_0) \equiv \{u(t) \in W_2^{2n}((0,1), H) :$$
$$l_p u = 0,\ p = \overline{1, 2n}\};\ Lu \equiv \mathcal{L}u, u \in D(L),\ D(L) \equiv D(L_0).$$

Методом відокремлення змінних можна показати, що оператор L_0 має власні значення $\lambda_{k,s} = (\pi k)^{2n} + z_s^{2n}$ $(k, s \in \mathbb{N})$ та систему $V(L_0) = \{v^0_{k,s} \in H_1 : v^0_{k,s} = \sqrt{2}\sin \pi k t v_s,\ k, s \in \mathbb{N}\}$ власних функцій, яка утворює ортонормовану базу в H_1.

Теорема 1. 1. *Точковий спектр $\sigma_p(L)$ оператора L збігається з точковим спектром $\sigma_p(L_0)$ оператора L_0;* **2.** *Система власних функцій оператора L утворює базу Ріса в просторі H_1.*

Доведення. Побудуємо систему власних функцій оператора L . При $k = 2s$, власна функція $v^0_{k,m}(t) = \sqrt{2}\sin 2s\pi t v_m$ оператора L_0 задовольняє умову $\Delta\mathcal{L}v^0_{k,m}(t) = 0$ $(k = 2s,\ s, m \in \mathbb{N})$. Отже, $v_{2s,m}(t) = v^0_{2s,m}(t) = \sqrt{2}\sin 2s\pi t v_m$ $(s, m \in \mathbb{N})$ утворює частину системи власних функцій оператора L, тому і $\lambda_{2s,m}(L_0) = \lambda_{2s,m}(L)$ $(s, m \in \mathbb{N})$. При $k = 2s - 1$ власну функцію $v_{k,m}(t)$ оператора L шукаємо у вигляді суми

$$v_{k,m}(t) = v^0_{k,m}(t) + \Delta v_{k,m}(t)v_m \quad (k = 2s - 1,\ m \in \mathbb{N}). \tag{3}$$

Визначимо функцію $\Delta v_{k,m}(t) \in L_2(0,1)$. Нехай рівняння $\omega^{2n} = 1$ має корені $\omega_q = \exp\left(i(q-1)\dfrac{\pi}{n}\right)$ $(q = \overline{1, 2n})$. Для диференціального рівняння

$$(-1)^n D_t^{2n} v(t) = \mu_{2s-1}v(t), \quad \mu_{2s-1} = \pi^{2n}(2s-1)^{2n}\ (s \in \mathbb{N}) \tag{4}$$

виберемо фундаментальну систему розв'язків:

$$\begin{aligned}
&Y_1 = \cos(2s-1)\pi t \quad, Y_{n+1}(s,t) = \sin(2s-1)\pi t;\\
&Y_q(s,t) \equiv \exp i\pi(2s-1)\omega_q t - \exp i\pi(2s-1)\omega_q(1-t);\\
&Y_{n+q}(s,t) \equiv \exp i\pi(2s-1)\omega_q t + \exp i\pi(2s-1)\omega_q(1-t)\ (q = \overline{2, n}).
\end{aligned}$$

Невідому функцію $\Delta v_{2s-1,m}(t)$ шукаємо у вигляді суми

$$\begin{aligned}
\Delta v_{2s-1,m}(t) = C^0_{s,m}\left(t - \frac{1}{2}\right)\sin(2s-1)\pi t +\\
+\sum_{p=2}^{n} C^p_{s,m}Y_p(s,t) + C^1_{s,m}\cos(2s-1)\pi t.
\end{aligned} \tag{5}$$

Підставляючи (3), (5) у співвідношення $\mathcal{L}v_{k,m}(t) = \lambda_{k,m}v_{k,m}(t)$, $(k, m \in \mathbb{N})$, одержимо

$$\begin{aligned}
&((-1)^n D_t^{2n} + z_m^{2n} - \lambda_{2s-1,m})\Delta v^0_{2s-1,m}(t)v_m = -\Delta L v^0_{2s-1,m}(t)v_m,\\
&((-1)^n D_t^{2n} - (2s-1)^{2n})\left(\sum_{p=2}^{n} C^p_{s,m}Y_p(s,t) + C^1_{s,m}\cos(2s-1)\pi t + \right.\\
&\qquad\left. + C^0_{s,m}\left(t - \frac{1}{2}\right)\sin(2s-1)\pi t\right) =\\
&= -2\sqrt{2}\sum_{j=1}^{n} b_j z_m^{2j-1}(2s-1)^{2j-1}\pi^{2j-1}\cos(2s-1)\pi t\ (s, m \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Враховуючи (4), одержимо

$$\begin{aligned}
&C^0_{s,m}2\pi(-1)^{n-1}(-1)^{n-1}(2s-1)^{2n-1}\cos(2s-1)\pi t = -2\sqrt{2}\times\\
&\times\sum_{j=1}^{n} b_j z_m^{2j-1}(2s-1)^{2j-1}\pi^{2j-1}\cos(2s-1)\pi t\ (s, n, m \in \mathbb{N}, b_j \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Отже,

$$C^0_{s,m} = -\sqrt{2}\sum_{j=1}^{n} b_j z_m^{2j-1}(2s-1)^{2j-2n}\pi^{2j-2} \ (s,m\in\mathbb{N}).$$

Для визначення $C^p_{s,m}$ $(p=\overline{1,n})$ підставимо (5) в крайові умови (2). Оскільки усі функції з (5) належать множині H_n, то частина умов (2), а саме $l_{2j+1}u=0$ $(j=\overline{0,n-1})$ виконується автоматично. Далі, підставляючи (5) у $l_{2j+2}u=0(j=\overline{0,n-1})$, одержимо систему рівнянь стосовно невідомих $\{C^j_{s,m}\}_{j=1}^n$ $(s,m\in\mathbb{N})$:

$$\begin{cases} -2C^1_{s,m}+\cdots+2C^n_{s,m}(1-\exp i\pi(2s-1)\omega_n)=0,\\ -2(-\pi^2(2s-1)^2)C^1_{s,m}+\cdots+2(-\pi^2(2s-1)^2)\omega_n^2C^n_{s,m}=\\ \qquad\qquad =-2C^0_{s,m}2(2s-1)\pi,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -2(-1)^{n-2}\pi^{2n-2}(2s-1)^{2n-2}C^1_{s,m}+\cdots+2(-1)^{n-2}\pi^{2n-2}\times\\ \times(2s-1)^{2n-2}C^n_{s,m}\omega_n^{2n-2}=2(-1)^{n-3}C^0_{s,m}\times\\ \times(2n-2)(2s-1)^{2n-3}\pi^{2n-3}\ (s,m\in\mathbb{N}). \end{cases}$$

Ці співвідношення після очевидних спрощень і заміни: $\tilde{C}^0_{s,m}\equiv 2C^0_{s,m}(2s-1)^{-1}\pi^{-1}$, $\tilde{C}^1_{s,m}\equiv C^1_{s,m},\cdots,\tilde{C}^j_{s,m}\equiv C^j_{s,m}(1-\exp i\pi(2s-1)\omega_j)$ можна подати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \tilde{C}^1_{s,m}+\cdots+\tilde{C}^n_{s,m}=0,(s,m\in\mathbb{N})\\ \tilde{C}^1_{s,m}+\cdots+\omega_n^2\tilde{C}^n_{s,m}=-2C^0_{s,m}(2s-1)^{-1}\pi^{-1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \tilde{C}^1_{s,m}+\cdots+\omega_n^{2n-2}\tilde{C}^n_{s,m}=-2C^0_{s,m}(2s-1)^{-1}\pi^{-1}. \end{cases}$$

Останню систему розв'язуємо методом Крамера. Нехай

$$\Delta^0_{s,m}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \omega_2^2 & \dots & \omega_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega_2^{2n-1} & \dots & \omega_n^{2n-2}\end{vmatrix}=\prod_{\binom{r=1}{g>r}}^{n}(\omega_g^2-\omega_r^2),\quad \omega_1=1,$$

$$\Delta^1_{s,m}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \omega_2^2 & \dots & \omega_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega_2^{2n-1} & \dots & \omega_n^{2n-2}\end{vmatrix}=\Delta^0_{s,m}-\prod_{j=2}^{n}\omega_j^2\prod_{\binom{q,r=1}{q>r}}^{n}(\omega_q^2-\omega_r^2),$$

$$\Delta^l_{s,m}=(-1)^l\prod_{\binom{j=1}{j\neq l}}^{n}\omega_j^2\prod_{\left(\binom{q,r=1}{q>r}\atop q,r\neq l\right)}(\omega_q^2-\omega_r^2)\ (s,m\in\mathbb{N}).$$

Враховуючи, що $\prod\limits_{j=2}^{n}\omega_j^2=\omega_2^2\omega_2^4\ldots\omega_2^{2n-2}=\omega^{2\frac{1}{2}(n-1)n}=(-1)^{n-1}$, одержимо

$$\prod_{\binom{j=2}{q\neq j}}^{n}\omega_q^2=\omega_q^{-2}\prod_{j=2}^{n}\omega_j^2=(-1)^{n-1}\omega_{n-q}^2=(-1)^{n-1}\omega_q^{-2};$$

$$\frac{\Delta^1_{s,m}}{\Delta^0_{s,m}} = 1 + \frac{(-1)^n}{(\omega_n^2 - 1)(\omega_{n-1}^2 - 1)\dots(\omega_2^2 - 1)} \qquad (s, m \in \mathbb{N}),$$

$$\frac{\Delta^q_{s,m}}{\Delta^0_{s,m}} = \frac{(-1)^{q+n-1}}{(\omega_n^2 - \omega_q^2)\dots(\omega_{q+1}^2 - \omega_q^2)(\omega_q^2 - \omega_{q-1}^2)\dots(\omega_q^2 - \omega_1^2)} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-q}}{(\omega_n^2 - \omega_q^2)\dots(\omega_1^2 - \omega_q^2)} \qquad (s, m \in \mathbb{N}),$$

$$\widetilde{C}^q_{s,m} = (-1)^n \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq q}}^{n} (\omega_j^2 - \omega_q^2)^{-1} 2(2s-1)^{-1}\pi^{-1} C^0_{j,m},$$

$$C^q_{s,m} = (-1)^n 2 \prod_{j=1}^{n} (\omega_j^2 - \omega_q^2)^{-1}(2s-1)^{-1}(\pi)^{-1} C^0_{s,m} =$$

$$= \frac{\theta_q}{(2s-1)\pi} C^0_{s,m}, \text{де} \quad \theta_q = (-1)^n 2 \prod_{j=1}^{n} (\omega_j^2 - \omega_q^2)^{-1};$$

$$C^1_{s,m} = -(1 + (-1)^n) \prod_{r=2}^{n} (\omega_2^2 - 1)^{-1} \frac{1}{(2s-1)^{-1}\pi^{-1}} C^0_{s,m} =$$

$$= \frac{\theta_1}{(2s-1)\pi} C^0_{s,m} (\ s, m \in \mathbb{N}),$$

$$\Delta v_{s,m} = C^0_{s,m} \left(\left(t - \frac{1}{2} \right) \sin{(2s-1)\pi t} + \frac{\theta_1}{(2s-1)\pi} \cos{(2s-1)\pi t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta_2}{(2s-1)\pi} Y_2(s,t) + \dots + \frac{\theta_n}{(2s-1)\pi} Y_n(s,t) \right) \ (s, n \in \mathbb{N}).$$

Доведемо, що система $V(L)$ є тотальною [2] в просторі H_1. Візьмемо довільний елемент $h \in H_1$, який можна подати у вигляді $h = h_1 + h_0$, де $h_1 \in H_н$, $h_0 \in H_n$. Для $k = 2s$ маємо: $(h, v_{2s,m}(t)) = (h_0 + h_1, v^0_{2s,m}(t)) = (h_1, v^0_{2s-1,m}(t))$ $(s, m \in \mathbb{N})$. Оскільки $\{v^0_{2s,m}(t)\}_{s=1}^\infty$ є тотальною в просторі $H_н$, то $h_1 = \theta$. Тому $h = h_0$. Для $k = 2s - 1$ одержуємо: $(h_0, v_{2s-1,m}(t)) = (h_0, v^0_{2s-1,m}(t) + \Delta v_{2s-1,m}(t) v_m) = (h_0, v^0_{2s-1,m}(t)) = 0$ $(s, m \in \mathbb{N})$, з тотальності $\{v^0_{2s-1,m}(t)\}$ в просторі H_n випливає, що $h_0 = \theta$, а отже $h \equiv \theta$. Отож, система $V(L)$ – тотальна в H. Оскільки в гільбертовому просторі поняття тотальності та повноти еквівалентні, то $V(L)$ повна в H_1. Доведемо, що ця система є мінімальною, тобто існує система біортогональна до неї. Елементи системи $V(L)$ будуємо у вигляді:

$$v_{2s-1,m}(t) = v^0_{2s-1,m}(t) + \Delta v_{2s-1,m}(t) v_m, \ \Delta v_{2s-1,m}(t) = \sum_{p=1}^{\infty} K^{2s-1}_{2p} \sin 2p\pi t v_m.$$

Знайдемо K^{2s-1}_{2p}. Оскільки

$$(L_0 + \Delta L)(v^0_{2s-1,m}(t) + \Delta v_{2s-1,m}(t) v_m) = \lambda_{s,m}(v^0_{2s-1,m}(t) + \Delta v_{2s-1,m(t)} v_m),$$

$$(L_0 - \lambda_{s,m}) \sum_{p=1}^{\infty} K^{2s-1}_{2p} \sin 2p\pi t = -\Delta L v^0_{2s-1}(t),$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} (\lambda_{2p} + z_m^{2n} - \lambda_{2s-1}) K^{2s-1}_{2p} \sin 2p\pi t = -2\sqrt{2} \sum_{j=1}^{n} b_{2j-1} z_m^{2j-1} \times$$

$$\times \{(2s-1)\pi\}^{2j-1}\cos(2s-1)\pi t \quad (s,m\in\mathbb{N}),$$

то враховуючи, що

$$\cos(2s-1)\pi t = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{4s}{(2(p-s)+1)(2(s+p)-1)}\sin 2p\pi t,$$

одержимо

$$((2p\pi)^{2n}-[(2s-1)\pi]^{2n}+z_m^{2n})K_{2p}^{2s-1} = -2\sqrt{2}\sum_{j=1}^{n} b_{2j-1}z_m^{2j-1}[(2s-1)\pi]^{2j-1}\times$$

$$\times\frac{4s}{(2(p-s)+1)(2(s+p)-1)},$$

$$K_{2p}^{2s-1} = -2\sqrt{2}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} b_{2j-1}z_m^{2j-1}[(2s-1)\pi]^{2j-1}}{(2p\pi)^{2n}-[(2s-1)\pi]^{2n}+z_m^{2n}}\frac{4s}{(2(p-s)+1)(2(s+p)-1)}$$

$(s,m\in\mathbb{N})$.

Вважаємо, що системи $V(L),\widetilde{V}(L)$ біортогональні в сенсі: $(v_{p,m},\widetilde{v}_{q,r}) = \delta_{p,q}\delta_{m,r}$ $(p,q,m,r\in\mathbb{N})$. Біортогональну систему $\widetilde{v}_{s,m}$ будуємо у вигляді:

$$\begin{cases} \widetilde{v}_{2s,m}(t) = v_{2s,m}^0(t)+\Delta\widetilde{v}_{2s,m}(t)v_m \ (s,m\in\mathbb{N}),\\ \text{де } \Delta\widetilde{v}_{2s,m}(t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} M_{2j-1}^{2s}\sin(2j-1)\pi t,\\ \widetilde{v}_{2s-1,m}(t) = v_{2s-1,m}^0(t)\ (s,m\in\mathbb{N}). \end{cases}$$

Параметри M_{2j-1}^{2s} визначаємо з умов біортогональності $(v_{2s-1,m}(t),\widetilde{v}_{2p,m}(t))=0$, тому

$$(v_{2s-1,m}^0(t)+\Delta v_{2s-1,m}(t)v_m, v_{2s,m}^0(t)+\Delta\widetilde{v}_{2s,m}(t)v_m)_{H_1}=0;$$

$$(v_{2s-1,m}^0(t),\Delta\widetilde{v}_{2s,m(t)})_{H_1}+(\Delta v_{2s-1,m}(t),v_{2s,m}^0(t))_{H_1}=0;$$

$$(\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t,\sum_{j=1}^{\infty}M_{2j-1}^{2s}\sin(2j-1)\pi t)_{H_1}=$$

$$=-\left(\sum_{p=1}^{\infty}K_{2p}^{2s-1}\sin 2p\pi t,\sqrt{2}sin2s\pi t\right)_{H_1}.$$

Отже, $M_{2j-1}^{2j}=-K_{2j}^{2j-1}$при $j=s=p$; в інших випадках $M_{2j-1}^{2s}=0$. Отож, $V(L)$ – повна і мінімальна в H_1.Покажемо, що вона є базою Ріса. Розглянемо допоміжну систему $W(m)=\{w_{k,m}(t)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$w_{2s,m}=\sqrt{2}\sin 2\pi st\ (s\in\mathbb{N}), \tag{6}$$

$$w_{2s-1,m}=\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t+C_{2s-1,m}^0(t-\frac{1}{2})\sin(2s-1)\pi t. \tag{7}$$

Лема 1. *Система $W(m)$ утворює базу Ріса в $L_2(0,1)$.*

Доведення. Покажемо, що система $W(m)$ повна (тотальна) в $L_2(0,1)$. Нехай $h(t)$ довільний елемент з $L_2(0,1), h(t)=h_n(t)+h_н(t)$, де $h_n(t)\in H_n$,

$$h_н(t)\in H_н, h_n(t)=\sum_{p=1}^{\infty}h_{2p-1}\sqrt{2}\sin(2p-1)\pi t, h_н(t)=\sum_{p=1}^{\infty}h_{2p}\sqrt{2}\sin 2p\pi t.$$

Треба показати: якщо $\int\limits_0^1 h(t)w_{k,t}dt = 0$, то $\quad h \equiv 0$. З (6) маємо

$$\int\limits_0^1 h(t)w_{2s,m}dt = \int\limits_0^1 h\sqrt{2}\sin 2\pi st\,dt = h_{2s} = 0 \ (s \in \mathbb{N}), \ \ h_н(t) \equiv \theta.$$

Отже, з (7) одержуємо

$$\int\limits_0^1 h(t)w_{2s-1,m}dt = \int\limits_0^1 h(t)\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t\,dt + \int\limits_0^1 h(t)C^0_{2s-1,m}\left(t-\frac{1}{2}\right)\sin(2s-1)\pi t\,dt,$$

$$\int\limits_0^1 h(t)C^0_{2s-1,m}\left(t-\frac{1}{2}\right)\sin(2s-1)\pi t\,dt = 0,$$

оскільки $H_n \perp H_н$. Тоді

$$\int\limits_0^1 h(t)\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t\,dt = h_{2s-1} = 0.$$

Система $\{\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t\}_{s\in\mathbb{N}}$ як частина ортонормованої бази цього простору є тотальною в H_n, тому $h_n(t) \equiv \theta$ і отже, $h(t) \equiv \theta$.

Використовуючи метод побудови системи $W(m)$, визначимо систему $\widetilde{W}(m)$ біортогональну до $W(m)$ $(m \in \mathbb{N})$:

$$\begin{cases} \widetilde{w}_{2s,m}(t) = \sqrt{2}\sin 2\pi st + \Delta\widetilde{w}_{2s,m}, \\ \widetilde{w}_{2s-1,m}(t) = \sqrt{2}\sin \pi(2s-1)t \ (s, m \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Розглянемо оператор

$$Q(m) : L_2(0,1) \to L_2(0,1), \ Q(m)\sqrt{2}\sin k\pi t = w_{k,m}(t) = \sqrt{2}\sin k\pi t + \Delta\widetilde{w}_{k,m},$$

де

$$\Delta\widetilde{w}_{k,m} = \begin{cases} 0, \quad k = 2s \\ \sqrt{2}C^0_{2s-1,m}(t-\frac{1}{2})\sin(2s-1)\pi t, \quad k = 2s-1. \end{cases}$$

Отже, $Q(m) = E + \Delta Q(m)$, де $\Delta Q(m) : H_н \to 0, \Delta Q(m) : H_n \to H_н$, $(m \in \mathbb{N})$, $[\Delta Q(m)]^2 \equiv \Theta$, Θ – нульовий оператор, E – одиничний в $L_2(0,1)$. Тому

$$\widetilde{w}_{k,m} = (Q^{-1}(m))^*\sqrt{2}\sin k\pi t = (E - (\Delta Q(m))^*)\sqrt{2}\sin k\pi t \ (k, m \in \mathbb{N}).$$

Отже, система $\{W(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ повна і мінімальна в $L_2(0,1)$.

Покажемо, що $\Delta Q(m)$ обмежений оператор для кожного $m \in \mathbb{N}$. Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 h(t)w_{k,m}(t)\right|^2 dt = \sum_{s=1}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 h(t)\sqrt{2}\sin 2s\pi t\,dt\right|^2 + \left|\int\limits_0^1 h(t)(\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t + \right.$$

$$\left. + C^0_{2s-1,m}\left(t-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t)dt\right|^2 \leqslant 2\sum_{s=1}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 h(t)\sqrt{2}\sin 2s\pi t\,dt\right|^2 +$$

$$+\left|\int_0^1 h(t)\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t dt\right|^2 + \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 |C^0_{2s-1,m}|^2\times$$

$$\times\left|\int_0^1 h(t)\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t dt\right|^2 \leqslant 2\left(1+\frac{1}{4}\max_s|C^0_{2s-1,m}|^2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^1 h(t)\sqrt{2}\sin k\pi t dt\right|^2$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{4}\max_s|C^0_{2s-1,m}|^2\right)||h||^2_{L^2(0,1)}.$$

Розглянемо ліву частину:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^1 h(t)w_{k,m}(t)\right|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^1 h(t)(E+\Delta Q(m))\sqrt{2}\sin\pi kt dt\right|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^1 (E+\Delta Q^*(m))h(t)\sqrt{2}\sin\pi kt dt\right|^2 = \int_0^1 \left|(E+\Delta Q^*(m))h(t)\right|^2 dt =$$

$$= ||E-\Delta Q(m)h||^2_{L^2(0,1)}.$$

Отже, $E+\Delta Q^*(m)$ – неперервний оператор в $L_2(0,1)$, а тому оператори $Q(m)$ і $(Q^{-1}(m))^*$ також неперервні. За теоремою Н.К.Барі [4, с. 374] система $W(m)$ – база Ріса в $L_2(0,1)$. Лему доведено.

Тепер доведемо, що система $V(L)$

$$\begin{cases} \sin 2s\pi t, \\ C^0_{2s-1,m}[(t-\frac{1}{2})\sin(2s-1)\pi t + \frac{\theta_1}{(2s-1)\pi}\cos(2s-1)\pi t + \sum\limits_{\gamma=2}^{n}\frac{\theta_\gamma}{(2s-1)\pi}Y_\gamma(s,t)] \end{cases}$$

$(s,m\in\mathbb{N})$ є квадратично близькою до системи (6),(7), тобто

$$\sum_{\gamma=2}^{n}||C^0_{2s-1,m}\frac{\theta_\gamma}{(2s-1)\pi}Y_\gamma(s,t) + C^0_{2s-1,m}\frac{\theta_1}{(2s-1)\pi}\cos(2s-1)\pi t||^2 < \infty.$$

Враховуючи, що

$$||Y_\gamma(s,t)||^2_{H_1} = \int_0^1 Y_\gamma(s,t)\bar{Y}_\gamma(s,t)dt = \int_0^1 |e^{i\pi(2s-1)\omega_\gamma t} - e^{i\pi(2s-1)\omega_\gamma(1-t)}|\times$$

$$\times|e^{-i\pi(2s-1)\omega_\gamma t} - e^{-i\pi(2s-1)\omega_\gamma(1-t)}|dt = \int_0^1 (2-2\cos\pi(2s-1)Re\omega_\gamma(2t-1))dt =$$

$$= 2\left(1-\frac{\sin\pi(2s-1)Re\omega_\gamma}{2Re\omega_\gamma\pi(2s-1)}\right)\leqslant 2,$$

$||C^0_{2s-1,m}||\leqslant\sqrt{2}|b_n|z_m^{2n-1}\pi^{2n-1}$, для кожного z_m.

Матимемо

$$\sum_{\gamma=2}^{n}||C^0_{2s-1,m}\frac{\theta_\gamma}{(2s-1)\pi}Y_\gamma(s,t) + C^0_{2s-1,m}\frac{\theta_1}{(2s-1)\pi}\cos(2s-1)\pi t||^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\|C^0_{2s-1,m}\|^2\frac{M^2}{[(2s-1)\pi]^2}(\sum_{\gamma=2}^{n}\|Y_{\gamma(s,t)}\|^2+1)\leqslant\frac{20\;M^2(n-1)}{\{(2s-1)\}^2}b_n^2 z_m^{4n-2}\pi^{4n-4}<\infty,$$

при $M=\max\limits_{1\leqslant\gamma\leqslant n}|\theta_\gamma|$ $(m\in\mathbb{N})$. Отже, система $V(L)$ є базою Ріса в $L_2(0,1)$. Теорему доведено.

---

1. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщённый метод разделения переменных. – К., 1993.
2. *Гохберг Н. С., Крейн М. Т.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М., 1965.
3. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К., 1984.
4. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І., Ярка У. Б.* Збурення крайових задач для звичайних крайових задач другого порядку // Вісн. держ. ун-ту "Львівська політехніка" ПМ. – 1998. – Т. 1. – 337. – С. 70–73.

U. Yarka

BOUNDARY VALYE PROBLEMS FOR ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS WHITH SIMILAR SPECTRUM

We consider the properties of a nonlocal boundary value problem for a class of abstract differential equation. For a corresponding spectral problem we study the problem of invariance under isospectral perturbation of some properties of the operator, namely, completeness, minimality, basis of the Riss of the system of root functions.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.2000