ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 56

Львів 2000

В І С Н И К
ЛЬВІВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

ВИПУСК 56

Видається з 1965 року

Львівський національний університет імені Івана Франка
2000

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 2000. Випуск 56. 194 с.

Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. 2000. №56. 194 p.

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Адреса редакційної колегії:

79002 Львів, вул. Університетська, 1, Львівський національний університет, мех.-мат. ф-т, кафедра диференціальних рівнянь
Тел. (0322) 79-45-93 E-mail: diffeq@franko.lviv.ua

Chair of Differential Equations, Departament of Mechanics and Mathematics, Lviv National University, Universytetska 1, Lviv, 79002

Відповідальний за випуск *С. Лавренюк*

Редактор *Н. Плиса*

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка

ISSN 0201758X
ISSN 0320-6572

ЗМІСТ

CONTENTS

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.5–11
VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.5–11

УДК 517.956

Галина Берегова, Володимир Кирилич

ОБЕРНЕНА ГІПЕРБОЛІЧНА ЗАДАЧА СТЕФАНА В КРИВОЛІНІЙНОМУ СЕКТОРІ

За останні роки в математичній фізиці сформувався цілий напрям, який окреслюють назвою "задачі з вільною межею" або задачі Стефана. Це крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними, в яких апріорі область визначення шуканої функції невідома і потребує визначення у процесі розв'язання задачі. Якісній теорії таких задач для еліптичних та параболічних рівнянь присвячено багато праць (див. список літератури у [3]). Математичні моделі проблем газової динаміки, теплопровідності (коли швидкість поширення тепла скінченна) приводять до розв'язування задач з невідомими межами для гіперболічних рівнянь [2, 4, 6, 11-13]. Крайові задачі про знаходження коефіцієнтів гіперболічного рівняння чи граничних умов (обернені задачі) виникають у проблемах квантової теорії поля, атомної фізики, теорії коливань, сейсміки [7, 9, 10]. Один із фізичних процесів, математична модель якого зводиться до вивчення оберненої гіперболічної задачі Стефана, наведено в [5].

У цій праці ми дослідили обернену задачу для напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку з невідомими коефіцієнтами у правій частині, причому межі області, які виходять з початку координат, апріорі невідомі. Подібну задачу для рівняння другого порядку у криволінійному чотирикутнику розглядали у [1], пряму задачу (коефіцієнти відомі) вивчали у праці [2].

За допомогою методу характеристик задача зводиться до системи нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду, яка розв'язується за допомогою принципу стисних відображень.

Формулювання задачі. В області $G_t = \{(x,t) : t \in \mathbb{R}_+,\ a_1(t) < x < a_2(t),\ a_1(0) = a_2(0) = 0\}$, де $a_i(t)$ є наперед невідомі функції, розглянемо гіперболічну систему рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(t)F_i(x,t;u), \qquad i = \overline{1,n}, \quad u = (u_1,\ldots,u_n), \tag{1}$$

в якій, окрім функцій $u_i(x,t)$, невідомими є також функції $f_i(t)$.

Задамо умови на невідомі границі:

$$a_l'(t) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \alpha_{li}^k(\tau)u_i(a_k(\tau),\tau)d\tau + h_l(a(t),t), \quad l = 1,2, \tag{2}$$

де $h_l(a(t),t) = h_l(a_1(t),a_2(t),t)$ – визначені функції, причому $h_1(0,0) \neq h_2(0,0)$. Надалі будемо вважати, що:

$$\lambda_i(0,0) - h_1(0,0) > 0, \qquad i = 1,\ldots,p+q,$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_i(0,0) - h_1(0,0) < 0, \qquad i = p+q+1,\dots,n, \\
&\lambda_i(0,0) - h_2(0,0) > 0, \qquad i = 1,\dots,p, \\
&\lambda_i(0,0) - h_2(0,0) < 0, \qquad i = p+1,\dots,n, \quad p,q \in [0,n].
\end{aligned} \tag{3}$$

Задамо такі граничні умови

$$\begin{aligned}
&u_i(a_1(t),t) = g_i^1(a_1(t),t), \qquad i = 1,\dots,p+q, \\
&u_i(a_2(t),t) = g_i^2(a_2(t),t), \qquad i = p+1,\dots,n, \\
&\text{причому} \quad g_i^1(0,0) = g_i^2(0,0), \qquad i = p+1,\dots,p+q;
\end{aligned} \tag{4}$$

та умови перевизначення

$$u_i(\gamma(t),t) = \beta_i(t), \qquad i = 1,\dots,n, \ \ t > 0, \tag{5}$$

де $x = \gamma(t)$ - довільна гладка крива в області G_t і $\gamma(0) = 0$.

Означення. *Розв'язком задачі (1)-(5) назвемо набір функцій* (u_i, f_i, a_l) *з класу* $\left(C^1(\overline{G}_t) \times C(\mathbb{R}_+) \times C^1(\mathbb{R}_+)\right)$ $(i = 1,\dots,n, \ l = 1,2)$, *які задовольняють систему (1) та умови (2)-(5).*

Існування та єдиність розв'язку. Є правильним таке твердження.

Теорема. *Нехай*

1) $\lambda_i \in C^1(\overline{G}_t)$, $g_i^l \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, $\gamma, \beta_i \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $\alpha_{li}^k \in C(\mathbb{R}_+)$, $h_l \in C(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$, $(i = 1,\dots,n, \ \ l,k = 1,2)$, h_l *задовольняють умову Ліпшиця за першою змінною зі сталими* L_{h_l} *і* $h_1(0,0) \neq h_2(0,0)$;

2) $F_i \in C^{1,0,1}(\overline{G}_t \times \mathbb{R}^n)$, F'_{ix}, F'_{iu} *задовольняють умову Ліпшиця за* u;

3) $F_i(\gamma(t),t;\beta(t)) \neq 0$, $\forall t > 0$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$, $i = 1,\dots,n$;

4) виконуються умови узгодження нульового та першого порядку в точці $(0,0)$:

$$\begin{aligned}
&g_i^1(0,0) = g_i^2(0,0), \qquad i = p+1,\dots,p+q; \\
&\beta_i(0) = g_i^l(0,0), \qquad i = 1,\dots,n, \quad l = 1,2; \\
&\beta_i'(0)(h_1(0,0) - h_2(0,0)) = (g_{ix}^{1'}(0,0)h_1(0,0) + g_{it}^{1'}(0,0))(\gamma'(0) - h_2(0,0)) - \\
&-(g_{ix}^{2'}(0,0)h_2(0,0) + g_{it}^{2'}(0,0))(\gamma'(0) - h_1(0,0)), \qquad i = p+1,\dots,p+q.
\end{aligned}$$

Тоді $\exists t_0 > 0$ *таке, що в області* $\overline{G}_{t_0}$ *існує єдиний розв'язок задачі (1)-(5).*

Доведення. У просторі неперервних вектор-функцій $a = (a_1, a_2) \in \left[C[0,T_1]\right]^2$, де $T_1 \in \mathbb{R}_+$ виберемо множину

$$Q_{T_1} = \left\{a(t) : a(t) \in \left[C^1[0,T_1]\right]^2, |a_l(t)| \leqslant T_1(1 + H_l)\right\},$$

де H_l – сталі, які обмежують неперервні функції h_l. На підставі неперервності функцій $\lambda_i(x,t)$ та $a_l(t)$, і (3) можна вибрати T_1 так, щоб для всіх $t \in [0,T_1]$

$$\begin{aligned}
&\lambda_i(a_1(t),t) - a_1'(t) > 0, \qquad i = 1,\dots,p+q, \\
&\lambda_i(a_1(t),t) - a_1'(t) < 0, \qquad i = p+q+1,\dots,n, \\
&\lambda_i(a_2(t),t) - a_2'(t) > 0, \qquad i = 1,\dots,p, \\
&\lambda_i(a_2(t),t) - a_2'(t) < 0, \qquad i = p+1,\dots,n.
\end{aligned}$$

Задамо на Q_{T_1} метрику

$$\varrho\left(a^1(t), a^2(t)\right) = \sum_{l=1}^{2} \max_{t\in[0,T_1]} |a_l^1(t) - a_l^2(t)|.$$

Для кожної вектор-функції $a(t) \in Q_{T_1}$ одержимо обернену задачу (1), (3)–(5) (задачу про знаходження $f_i(t)$ та $u_i(x,t), i = 1,\ldots,n$). Цю задачу будемо розв'язувати методом характеристик.

Нехай $\varphi_i(\tau; x, t)$ – розв'язок характеристичного рівняння $d\xi/d\tau = \lambda_i(\xi,\tau)$, $i = 1,\ldots,n$ при $\xi(t) = x$, де $(x,t) \in G_{T_1}$, а $t_i(x,t)$ – ордината точки перетину i- ї характеристики з межею G_{T_1}. Якщо $i = p+1,\ldots,p+q$, то i-на характеристика розбиває область G_{T_1} на дві частини G_1^i та G_2^i так:

$$G_i^l := \{(x,t) : \varphi_i\left(t_i(x,t); x, t\right) = a_l\left(t_i(x,t)\right)\}.$$

Очевидно, що при $i = 1,\ldots,p$ $(i = p+q+1,\ldots,n)$ матимемо $G_i^1 = G_{T_1}$, $G_i^2 = \varnothing$ (відповідно $G_i^2 = G_{T_1}$, $G_i^1 = \varnothing$).

Інтегруючи (1) вздовж характеристик [4], отримаємо

$$u_i(x,t) = g_i^l\left(a_l\left(t_i(x,t)\right), t_i(x,t)\right) + \int\limits_{t_i(x,t)}^{t} f_i(\tau) F_i\left(\varphi_i(\tau; x,t), \tau; u\right) d\tau, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{6}$$

де $l = 1$ при $(x,t) \in G_i^1$, $l = 2$ при $(x,t) \in G_i^2$.

Для того щоб функції $u_i(x,t)$ при переході з G_i^1 в G_i^2 були неперервні, необхідно, щоб

$$\lim_{\substack{(x,t)\in G_i^1 \\ (x,t)\to(0,0)}} u_i(x,t) = \lim_{\substack{(x,t)\in G_i^2 \\ (x,t)\to(0,0)}} u_i(x,t),$$

тобто

$$g_i^1(0,0) = g_i^2(0,0), \quad i = p+1,\ldots,p+q,$$

що забезпечується умовою 4) теореми.

Підставимо (6) в умови перевизначення (5). В результаті одержимо

$$\beta_i(t) = g_i^l\left(a_l\left(t_i(\gamma(t),t)\right), t_i(\gamma(t),t)\right) + \int\limits_{t_i(\gamma(t),t)}^{t} f_i(\tau) F_i\left(\varphi_i(\tau;\gamma(t),t),\tau; u\right) d\tau, \ i = 1,\ldots,n. \tag{7}$$

Продиференціюємо (7) за t

$$\begin{aligned} \beta_i^{'}(t) = \left(g_{ix}^{l'} a_l^{'} + g_{it}^{l'}\right)\Big|_{(a(t_i(\gamma(t),t)), t_i(\gamma(t),t))} \times \\ \times\Big(\frac{\partial t_i(\gamma(t),t)}{\partial x}\gamma^{'}(t) + \frac{\partial t_i(\gamma(t),t)}{\partial t}\Big) + f_i(t) F_i\big(\gamma(t), t; \beta(t)\big) - \\ -\Big(\frac{\partial t_i(\gamma(t),t)}{\partial x}\gamma^{'}(t) + \frac{\partial t_i(\gamma(t),t)}{\partial t}\Big) f_i(t_i(\gamma(t),t)) F_i\big(\varphi_i(t_i(\gamma(t),t);\gamma(t),t), t_i(\gamma(t),t); u\big) \\ + \int\limits_{t_i(\gamma(t),t)}^{t} f_i(\tau)\Big(\frac{\partial F_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial \varphi_i(\tau;\gamma(t),t)}{\partial x}\gamma^{'}(t) + \end{aligned} \tag{8}$$

$$+\frac{\partial\varphi_i(\tau;\gamma(t),t)}{\partial t}\Big)\Big|_{(\varphi_i(\tau;\gamma(t),t),\tau)}d\tau,\qquad i=1,\ldots,n.$$

Використовуючи [8], обчислимо вирази:

$$\frac{\partial\varphi_i(\tau;\gamma(t),t)}{\partial x}\gamma'(t)+\frac{\partial\varphi_i(\tau;\gamma(t),t)}{\partial t}=\big(-\lambda_i(\gamma(t),t)+\gamma'(t)\big)\times$$
$$\times\exp\Big(-\int_\tau^t\lambda'_{ix}\big(\varphi_i(\sigma;\gamma(t),t),\sigma\big)d\sigma\Big);\tag{9}$$

$$\frac{\partial t_i(\gamma(t),t)}{\partial x}\gamma'(t)+\frac{\partial t_i(\gamma(t),t)}{\partial t}=\big(\lambda_i(\gamma(t),t)-\gamma'(t)\big)\times$$
$$\times\frac{\exp\Big(-\int\limits_{t_i(\gamma(t),t)}^{t}\lambda'_{ix}\big(\varphi_i(\sigma;\gamma(t),t),\sigma\big)d\sigma\Big)}{\lambda_i\big(a_l(t_i(\gamma(t),t)),t_i(\gamma(t),t)\big)-a'_l(t_i(\gamma(t),t))}\equiv\big(\lambda_i(\gamma(t),t)-\gamma'(t)\big)K_i(a_l(t),t),$$

де $l=1$ при $(\gamma(t),t)\in G_i^1$, $\quad l=2$ при $(\gamma(t),t)\in G_i^2$, $\qquad i=1,\ldots,n.$

Тут $\dfrac{\partial\varphi_i(\tau;x,t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi_i(\tau;x,t)}{\partial t}$ отримують шляхом диференціювання за параметрами розв'язку задачі Коші для характеристичного рівняння, після чого $\dfrac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial t_i(x,t)}{\partial t}$ знаходимо диференціюючи тотожності $\varphi_i(t_i(x,t);x,t)=a_l(t_i(x,t)),(x,t)\in G_i^l$.

З урахуванням (2), (9) та третьої умови теореми, (8) перепишеться так:

$$f_i(t)=F_i^{-1}(\gamma(t),t;\beta(t))\Big[\beta_i'(t)+\big(\lambda_i(\gamma(t),t)-\gamma'(t)\big)\Big\{K_i(a_l(t),t)\times$$
$$\times\Bigg(f_i(t_i(\gamma(t),t))F_i\big(a_l(t_i(\gamma(t),t)),t_i(\gamma(t),t);g^l\big)-\tag{10}$$
$$-\Big(g_{ix}^{l'}\Big(\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^{t_i(\gamma(t),t)}\alpha_{il}^k(\tau)g_i^k(a_k(\tau),\tau)d\tau+h_l\Big)+g_{it}^{l'}\Big)\Big|_{(a_k(t_i(\gamma(t),t)),t_i(\gamma(t),t))}\Bigg)+$$
$$+\int\limits_{t_i(\gamma(t),t)}^{t}f_i(\tau)\Big(\frac{\partial F_i}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big)\Big|_{(\varphi_i(\tau;\gamma(t),t),\tau)}\exp\Big(-\int_\tau^t\lambda'_{ix}\big(\varphi_i(\sigma;\gamma(t),t),\sigma\big)d\sigma\Big)d\tau\Big\}\Big],$$

де $g^1=(g_1^1,\ldots,g_{p+q}^1,g_{p+q+1}^2,\ldots,g_n^2)$, $g^2=(g_1^1,\ldots,g_p^1,g_{p+1}^2,\ldots,g_n^2)$, $i=1,\ldots,n.$

Ми отримали систему лінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду стосовно функцій $f_i(t)$. Для визначення u_i маємо систему нелінійних інтегральних рівнянь (6) типу Вольтерра. Щоб одержати замкнену систему інтегральних рівнянь стосовно невідомих $f_i(t)$, u_i та $\dfrac{\partial u_i}{\partial x}$, продиференціюємо (6) за x

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}\Big(g_{ix}^{l'}\Big(\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^{t_i(\gamma(t),t)}\alpha_{il}^k(\tau)g_i(a_k(\tau),\tau)d\tau+h_l\Big)+$$

$$+ g_{it}^{l'}\Big)\Big|_{(a_l(t_i(x,t)),t_i(x,t))} - \frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x} f_i(t_i(x,t)) F_i\big(a_l(t_i(x,t),t_i(x,t);g^l\big) + \tag{11}$$
$$+ \int\limits_{t_i(x,t)}^{t} f_i(\tau)\left(\frac{\partial F_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi_i(\tau;x,t)}{\partial x} d\tau, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Для неперервності функцій $\dfrac{\partial u_i(x,t)}{\partial x}$ при переході з G_i^1 в G_i^2 необхідно, щоб

$$\lim_{\substack{(x,t)\in G_i^1 \\ (x,t)\to(0,0)}} \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} = \lim_{\substack{(x,t)\in G_i^2 \\ (x,t)\to(0,0)}} \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x}, \qquad i = p+1,\ldots,p+q.$$

Підставивши сюди (11) і, враховуючи (10), отримаємо умову, яка збігається з умовою узгодження першого порядку пункту 4) теореми.

Отже, для визначення функцій $f_i(t), u_i, \dfrac{\partial u_i}{\partial x}$ одержали систему нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра (6), (10), (11), в якій за умовою теореми функції $F_{ix}^{'}$ та $F_{iu}^{'}$ задовольняють умову Ліпшиця за u. Розглянемо простір $\left[C(\overline{G}_{T_1})\right]^{3n}$ вектор-функцій $w = \left(u_1,\ldots,u_n,\dfrac{\partial u_1}{\partial x},\ldots,\dfrac{\partial u_n}{\partial x},f_1,\ldots,f_n\right)$, в яких перші $2n$-штук координат визначені та неперервні в області $\overline{G}_{T_1}$, решта - на відрізку $[0,T_1]$. Введемо вектор Ω_0, координатами якого є доданки відповідних рівнянь системи (6), (10), (11), складені з відомих функцій. У просторі $\left[C(\overline{G}_{T_1})\right]^{3n}$ розглянемо оператор B [7], компоненти якого визначаються відповідними доданками в досліджуваній системі. Тоді система (6), (10), (11) набуде вигляду

$$w = Bw + \Omega_0. \tag{12}$$

Оскільки B - інтегральний оператор типу Вольтерра, то існує $T_2 \in (0,T_1]$ таке, що відображення, визначене правою частиною (12), в просторі $\left[C(\overline{G}_{T_2})\right]^{3n}$ є стисним ([10], с.43-46). Тому за теоремою Банаха існує єдиний неперервний розв'язок рівняння (12).

З (1) і того, що $\dfrac{\partial u_i}{\partial x} \in C(\overline{G}_{T_2})(i = 1,\ldots,n)$, випливає, що $u_i(x,t) \in C^1(\overline{G}_{T_2})$. Отже, для кожної фіксованої вектор-функції $a(t) \in Q_{T_2}$ ми знайшли єдиний розв'язок задачі (1), (3)-(5) $u_i(x,t), f_i(t)$. Оскільки він залежить від вибору $a(t) \in Q_{T_2}$, то позначимо $u_i(x,t) = U_i(x,t;a)$, а також $f_i(t) = F_i(t;a)$. Залишається зі всієї множини допустимих вектор-функцій $a(t)$ вибрати ту, для якої виконується умова (2).

Залежність $U_i(a_l(t),t;a)(i = 1,\ldots,n,\ l = 1,2)$ в метриці рівномірного відхилення від a як елемента $\left[C[0,T_3]\right]^2$, $T_3 \in (0,T_1]$ задовольняє умову Ліпшиця [1]: $\exists L_u \geqslant 0$ таке, що $\forall a^1, a^2 \in Q_{T_3}$ виконується

$$\max_{t\in[0,T_3]} \left|U_i(a_l^1(t),t;a^1) - U_i(a_l^2(t),t;a^2)\right| \leqslant L_u \varrho(a^1,a^2). \tag{13}$$

Виберемо T_3 таким, щоб виконувалась умова

$$T_3 < min\left\{\frac{1}{nAU_0}, \frac{1}{2nAL_u}, \frac{1}{L_{h_1}+L_{h_2}+1}\right\}, \tag{14}$$

де A, U_0 – сталі, які обмежують, відповідно, функції $\alpha_{li}^k(t)$ та $U_i(x,t;a)$.

Розглянемо на Q_{T_3} оператор $D : a \to Da$, який діє за формулою

$$(Da_l)(t) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \Big(\int_0^\tau \alpha_{il}^k(\eta)U_i(a_k(\eta),\eta;a)d\eta + h_l(a(\tau),\tau)\Big)d\tau, \quad l=1,2.$$

Оператор D переводить множину Q_{T_3} в себе і є стисним. Справді

$$\big|(Da_l)(t)\big| \leqslant \Big|\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \Big(\int_0^\tau \alpha_{il}^k(\eta)U_i(a_k(\eta),\eta;a)d\eta + h_l(a(\tau),\tau)\Big)d\tau\Big| \leqslant$$
$$\leqslant T_3^2 nAU_0 + T_3 H_l \leqslant T_3(1+H_l).$$

Отже, $DQ_{T_3} \subset Q_{T_3}$. Покажемо, що при вибраному T_3 оператор D є стиском:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T_3}\big|(Da_l^1)(t) - (Da_l^2)(t)\big| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant T_3}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^\tau \big|\alpha_{il}^k(\eta)U_i(a_k^1(\eta),\eta;a^1)-$$
$$-\alpha_{il}^k(\eta)U_i(a_k^2(\eta),\eta;a^2)\big|d\eta d\tau + \max_{0\leqslant t\leqslant T_3}\int_0^t \big|h_l(a_k^1(\tau),\tau;a^1) - h_l(a_k^2(\tau),\tau;a^2)\big|d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant T_3}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^\tau \big|\alpha_{il}^k(\eta)\big|\big|U_i(a_k^1(\eta),\eta;a^1) - U_i(a_k^2(\eta),\eta;a^2)\big|d\eta d\tau +$$
$$+T_3L_h\varrho(a^1,a^2) \leqslant T_3^2 nAL_u\varrho(a^1,a^2) + T_3L_h\varrho(a^1,a^2) \leqslant T_3(T_3nAL_u + L_{h_l})\varrho(a^1,a^2).$$

Отже, враховуючи умову (14), отримаємо

$$\varrho(Da^1, Da^2) \leqslant T_3(2T_3nAL_u + L_{h_1} + L_{h_2})\varrho(a^1,a^2) < \varrho(a^1,a^2).$$

Тому D – стиск і за теоремою Банаха існує єдина нерухома точка оператора D, тобто існує єдина вектор-функція $a(t) \in Q_{T_3}$, яка задовольняє умови (2) і яку можна знайти методом послідовних наближень. За відомою вже $a(t)$ при $t \in [0,t_0]$ $\big(t_0 = \min\{T_2,T_3\}\big)$ вибираємо $u_i(x,t) = U_i(x,t;a)$, аналогічно визначаємо $f_i(t) = F_i(t;a)$.

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо крива $\gamma(t)$ збігається з однією з характеристик, тобто $\gamma(t) = \varphi_k(t;0,0)$ при $p+1 \leqslant k \leqslant p+q$, то аналогічні міркування для всіх $i \neq k$ приводять до співвідношень (6), (11) та системи $(n-1)$ рівнянь подібних до (10). А при $i = k$ з (6) матимемо

$$\beta_k(t) = g_k^l(0,0) + \int_0^t f_k(\tau)F_k\big(\varphi_k(\tau;0,0),\tau;u\big)d\tau.$$

Звідки, враховуючи умови теореми, відразу одержуємо

$$f_k(t) = \frac{\beta_k'(t)}{F_k\big(\varphi_k(t;0,0),t;u\big)}.$$

1. *Берегова Г.І.* Обернена гіперболічна задача Стефана // Математичні студії. – 1998. – Т. 10. – N 1. – С. 41–53.
2. *Берегова Г.І., Кирилич В.М.* Гіперболічна задача Стефана в криволінійному секторі // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49. – N 12. – С. 1684–1689.
3. *Данилюк И.И.* Задача Стефана // Успехи мат. наук. – 1985. – Т.4. – Вып. 5. – С. 133–185.
4. *Кирилич В.М., Мышкис А.Д.* Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой // Дифференциальные уравнения – 1991. – Т.27. – N3. – С. 497–501.
5. *Крутиков В.С.* Об одном решении обратной задачи для волнового уравнения с нелинейными условиями в областях с подвижными границами // Прикл. мех. и мат. – 1991. – Т.55. – N6. – С. 1058–1062.
6. *Летавин М.И.* О корректности постановки одномерной однофазной гиперболической задачи Стефана // Дифференциальные уравнения – 1991. – Т.27. – N8. – С. 1395–1402.
7. *Орловский Д.Г.* К задаче определения правой части гиперболической системы // Дифференциальные уравнения – 1983. – Т.19. – N8. – С. 137–146.
8. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1970.
9. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. – М., 1984.
10. Функциональные методы в задачах математической физики. // Сборник научных трудов под ред. А.И.Прилепко. – М., 1985.
11. *Шеметов Н.В.* Гиперболическая задача Стефана // Некоторые прилож. функ. анал. к задачам мат. физики. – АН СССР, Ин-т мат. – Новосибирск. – 1990. – С. 127–144.
12. *D'Acunto B.* On the piston problem in gosdynamics // Mech. Res. Commun. – 1984. – Vol. 11. – N6. – P.401–407.
13. *Li Ta-tsien.* Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems. – New York, 1994.

G. Beregova, V.Kyrylych

INVERSE HYPERBOLIC STEFAN PROBLEM IN THE CURVILINEAR SECTOR

It is considered the Stefan problem for a semilinear hyperbolic system of first order equations with a unknown coefficients of right part in the case where a line of determination of initial conditions degenerates into a point. With the help of a method of characteristic and Banach's theorem is proved correct solvability of a problem for small t.

Стаття надійшла до редколегії 30.06.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.12–19

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.12–19

УДК 519.21

Анатолій Боротюк

ЗБУРЕНІ ПРИБУТОК ТА РИЗИК У СЕРЕДОВИЩІ, ЩО ОПИСУЄТЬСЯ НАПІВМАРКІВСЬКИМ ПРОЦЕСОМ

У цій праці ми дослідимо швидкості збіжності збуреного прибутку та збуреного ризику в середовищі, що описується напівмарківським процесом. В праці Шарпа [1] йдеться, зокрема, про обчислення середньоочікуваних прибутків та ризиків як окремих цінних паперів, так і цілих їх портфелів. У [2]-[4] окремі розділи присвячені теорії відновлення, ланцюгам Маркова, марківським процесам. Крім того, у праці [3] детально розглянуто напівмарківські процеси. Дослідження асимптотики за шкалою нескінченно малих для перонового кореня проведено у статті [5]. У статті [6] досліджено швидкість збіжності збурених прибутку та ризику для випадкового середовища Ω, що розбивається на N несумісних подій. Кожна i-ва подія полягає в одержанні прибутку r_i, $i = 1 \div N$. У праці [7], на відміну від [6], середовище описується ланцюгом Маркова.

Прибутковість акцій, облігацій та інших цінних паперів є залежною від того економічного стану, в якому опинилась компанія чи фірма, які випустили цей цінний папір. Стани, в яких може перебувати фірма чи компанія, позначатимемо $E = \{1, \ldots, N\}$. Зміна стану, в якому є фірма, описується напівмарківським процесом $\xi(t)$ з напівмарківською матрицею $Q(x)$ і початковим розподілом $p = \{p_i, i \in E\}$ [3].

Нехай $F_{ij}(t)$ – ймовірність переходу зі стану i в стан j за час t.

$$F_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j/\xi(0) = i\}.$$

Тоді середньоочікуваний прибуток $\overline{r}_i(t)$ у момент часу t за умови, що в початковий момент часу ми перебували в стані i, обчислюється за формулою

$$\overline{r}_i(t) = \sum_{j \in E} r_j F_{ij}(t),$$

де r_j – прибуток, який отримає фірма, перебуваючи в стані j [1].

Перехідні ймовірності $F_{ij}(t)$, згідно з [3], є розв'язками таких рівнянь марківського відновлення:

$$F_{ij}(t) = \delta_{ij}(1 - P_i(t)) + \sum_{k \in E} \int\limits_0^t Q_{ik}(dx) F_{kj}(t - x),$$

де

$$P_i(t) = \sum_{j \in E} Q_{ij}(t) \tag{1}$$

– функція розподілу часу перебування процесу $\xi(t)$ в стані i.

Отже, середньоочікуваний прибуток $\overline{r}_i(t)$ є розв'язком наступного рівняння марківського відновлення

$$\overline{r}_i(t) = r_i(1 - P_i(t)) + \sum_{k\in E} \int\limits_0^t Q_{ik}(dx)\overline{r}_k(t-x), \tag{2}$$

де $Q_{ik}(dx) = P\{\xi(\tau_n) = k, (\tau_n - \tau_{n-1}) \in dx / \xi(\tau_{n-1}) = i\}$, τ_i – моменти марківського відновлення. Тоді розв'язок рівняння (2) шукаємо за формулою

$$\overline{r}_i(t) = \sum_{k\in E} \int\limits_0^t R_{ik}(dx) r_k (1 - P_k(t-x)),$$

де $R(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Q^{(n)}(t)$ – матриця марківського відновлення, $Q^{(n)}(t)$ – n-кратна згортка напівмарківської матриці $Q(t)$.

Вважаємо, що середовище залежить від деякого параметра ε. Тобто воно описується збуреним напівмарківським процесом $\xi^\varepsilon(t)$ із збуреною напівмарківською матрицею $Q(\varepsilon, t)$, причому $Q(\varepsilon, t) \to Q(t)$, при $\varepsilon \to 0$. Аналогічно r_j^ε –збурений прибуток, $r_j^\varepsilon \to r_j$, при $\varepsilon \to 0$.

Нехай є правильними зображення:

$$Q_{ij}(\varepsilon, t) = Q_{ij}(t) + \alpha_{1ij}(t)\delta_1(\varepsilon) + \dots + \alpha_{pij}(t)\delta_p(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon)), \tag{3}$$

$$r_j^\varepsilon = r_j + \lambda_{1j}\delta_1(\varepsilon) + \dots + \lambda_{pj}\delta_p(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon)), \tag{4}$$

де $\alpha_{kij}(t)$ – коефіцієнти, які залежать лише від часу, λ_{kj} – скалярні коефіцієнти, $i, j = 1 \div N$, $k = 1 \div p$, $\delta_1(\varepsilon), \dots, \delta_p(\varepsilon)$ – шкала нескінченно малих, така, що $\delta_k(\varepsilon) = o(\delta_{k-1}(\varepsilon))$, $k = 2 \div p$, $\delta_1(\varepsilon) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$. Надалі будемо також використовувати такі позначення:

$$\alpha_{0ij}(t) = Q_{ij}(t), \qquad \lambda_{0j} = r_j, \qquad \delta_0(\varepsilon) = 1.$$

Твердження. *1) Для довільного натурального n n-кратна згортка $Q^{(n)}(\varepsilon, t)$ збуреної напівмарківської матриці збігається до n-кратної згортки $Q^{(n)}(t)$ незбуреної напівмарківської матриці $Q^{(n)}(\varepsilon, t) \to Q^{(n)}(t)$, при $\varepsilon \to 0$.*
2) Для функції розподілу часу перебування збуреного напівмарківського процесу $\xi^\varepsilon(t)$ в стані i відбувається зображення

$$P_i(\varepsilon, t) = P_i(t) + \sum_{s=1}^{p} \left(\sum_{j\in E} \alpha_{sij}(t) \right) \delta_s(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon)). \tag{5}$$

3) Збурену матрицю марківського відновлення $R(\varepsilon, t)$ можна зобразити у вигляді суми:

$$R(\varepsilon, t) = R(t) + A(\varepsilon, t), \tag{6}$$

де $A(\varepsilon, t) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$.

Доведення. 1) За індукцією легко показати, що компоненти n-кратної згортки збуреної напівмарківської матриці можна зобразити у вигляді

$$Q_{ij}^{(n)}(\varepsilon, t) = Q_{ij}^{(n)}(t) + \sum_{\substack{s_1,\dots,s_n=0 \\ s_1+\dots+s_n\neq 0}}^{p} \sum_{k_1,\dots,k_{n-1}\in E} \int\limits_0^t \int\limits_0^{dx_{n-1}} \cdots \int\limits_0^{dx_2} \alpha_{s_1 i k_1}(dx_1) \times$$

$$\times\, \alpha_{s_2k_1k_2}(dx_2 - x_1)\alpha_{s_3k_2k_3}(dx_3 - x_2)\ldots\alpha_{s_nk_{n-1}j}(t - x_{n-1})\delta_{s_1}(\varepsilon)\ldots\delta_{s_n}(\varepsilon) + \\ + o(\delta_p(\varepsilon)). \tag{7}$$

При $n = 2$ маємо

$$Q_{ij}^{(2)}(\varepsilon, t) = \sum_{k_1\in E}\int_0^t Q_{ik_1}(\varepsilon, dx)Q_{k_1j}(\varepsilon, t - x). \tag{8}$$

В останній формулі (8) використаємо зображення (3). Тоді отримаємо, що

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{(2)}(\varepsilon, t) = \sum_{k_1\in E}\int_0^t &\left[Q_{ik_1}(dx) + \sum_{s_1=1}^{p}\alpha_{s_1ik_1}(dx)\delta_{s_1}(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon))\right]\times \\ &\times\left[Q_{k_1j}(t - x) + \sum_{s_2=1}^{p}\alpha_{s_2k_1j}(t - x)\delta_{s_2}(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon))\right] = \\ &= Q_{ij}^{(2)}(t) + \sum_{\substack{s_1,s_2=0\\ s_1+s_2\neq 0}}^{p}\sum_{k_1\in E}\int_0^t \alpha_{s_1ik_1}(dx)\alpha_{s_2k_1j}(t - x)\delta_{s_1}(\varepsilon)\delta_{s_2}(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon)). \end{aligned} \tag{9}$$

Для трикратної згортки, враховуючи зображення (3) і формулу (9), правильні такі рівності

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{(3)}(\varepsilon, t) &= \sum_{k_2\in E}\int_0^t Q_{ik_2}^{(2)}(\varepsilon, dx_2)Q_{k_2j}(\varepsilon, t - x_2) = \sum_{k_2\in E}\int_0^t\Bigg[Q_{ik_2}^{(2)}(dx_2) + \\ &+ \sum_{\substack{s_1,s_2=0\\ s_1+s_2\neq 0}}^{p}\sum_{k_1\in E}\int_0^{dx_2}\alpha_{s_1ik_1}(dx_1)\alpha_{s_2k_1k_2}(dx_2 - x_1)\delta_{s_1}(\varepsilon)\delta_{s_2}(\varepsilon) + \\ &+ o(\delta_p(\varepsilon))\Bigg]\left[Q_{k_2j}(t - x_2) + \sum_{s_3=1}^{p}\alpha_{s_3k_2j}(t - x_2)\delta_{s_3}(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon))\right] = Q_{ij}^{(3)}(t) + \\ &+ \sum_{\substack{s_1,s_2,s_3=0\\ s_1+s_2+s_3\neq 0}}^{p}\sum_{k_1,k_2\in E}\int_0^t\int_0^{dx_2}\alpha_{s_1ik_1}(dx_1)\alpha_{s_2k_1k_2}(dx_2 - x_1)\alpha_{s_3k_2j}(t - x_2)\times \\ &\times\delta_{s_1}(\varepsilon)\delta_{s_2}(\varepsilon)\delta_{s_3}(\varepsilon) + o(\delta_p(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Припустимо, що зображення (7) відбувається для $(n-1)$-кратної згортки збуреної напівмарківської матриці. Доведемо його правильність і для n-кратної згортки. Маємо

$$Q_{ij}^{(n)}(\varepsilon, t) = \sum_{k_{n-1}\in E}\int_0^t Q_{ik_{n-1}}^{(n-1)}(\varepsilon, dx_{n-1})Q_{k_{n-1}j}(\varepsilon, t - x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{k_{n-1}\in E}\int_0^t\Bigg[Q_{ik_{n-1}}^{(n-1)}(dx_{n-1}) + \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_{n-1}=0\\ s_1+\cdots+s_{n-1}\neq 0}}^{p}\sum_{k_1,\ldots,k_{n-2}\in E}\int_0^{dx_{n-1}}\cdots\int_0^{dx_2}\alpha_{s_1ik_1}(dx_1)\times$$

$$\times\alpha_{s_2k_1k_2}(dx_2-x_1)\alpha_{s_3k_2k_3}(dx_3-x_2)\dots\alpha_{s_{n-1}k_{n-2}k_{n-1}}(t-x_{n-2})\delta_{s_1}(\varepsilon)\dots\delta_{s_{n-1}}(\varepsilon)+$$

$$+o(\delta_p(\varepsilon))\Bigg]\Bigg[Q_{k_{n-1}j}(t-x_{n-1})+\sum_{s_n=1}^{p}\alpha_{s_nk_{n-1}j}(t-x_{n-1})\delta_{s_n}(\varepsilon)+o(\delta_p(\varepsilon))\Bigg]=$$

$$=Q_{ij}^{(n)}(t)+\sum_{\substack{s_1,\dots,s_n=0\\ s_1+\dots+s_n\neq 0}}^{p}\ \sum_{k_1,\dots,k_{n-1}\in E}\int_0^t\int_0^{dx_{n-1}}\dots\int_0^{dx_2}\alpha_{s_1ik_1}(dx_1)\alpha_{s_2k_1k_2}(dx_2-x_1)\times$$

$$\times\alpha_{s_3k_2k_3}(dx_3-x_2)\dots\alpha_{s_nk_{n-1}j}(t-x_{n-1})\delta_{s_1}(\varepsilon)\dots\delta_{s_n}(\varepsilon)+o(\delta_p(\varepsilon)).$$

Отже, рівність (7) правильна для довільного натурального n.

Далі у формулі (7) перейдемо до границі при $\varepsilon\to 0$. Оскільки в ній всі суми є скінченні, то границя існує і $Q_{ij}^{(n)}(\varepsilon,t)\to Q_{ij}^{(n)}(t)$, при $\varepsilon\to 0$. Пункт 1) доведено.

Пункт 2) безпосередньо отримується з формули (1) та зображення (3).

Тепер доведемо пункт 3). Збурена і незбурена матриці марківського відновлення є скінченними, тобто $R(\varepsilon,t)<\infty$ і $R(t)<\infty$. Отже, їхня різниця $R(\varepsilon,t)-R(t)<\infty$ також буде скінченною. Покажемо від супротивного, що $R(\varepsilon,t)-R(t)\to 0$, при $\varepsilon\to 0$. Нехай $R(\varepsilon,t)-R(t)\to S(t)\neq 0$, при $\varepsilon\to 0$. Збурена і незбурена матриці марківського відновлення задовольняють таким рівнянням марківського відновлення:

$$R(t)=I+\int_0^t Q(dx)R(t-x),\quad R(\varepsilon,t)=I+\int_0^t Q(\varepsilon,dx)R(\varepsilon,t-x),$$

де I – одинична матриця. Тоді різниця $R(\varepsilon,t)-R(t)$ має задовольняти таке рівняння

$$R(\varepsilon,t)-R(t)=\int_0^t[Q(\varepsilon,dx)R(\varepsilon,t-x)-Q(dx)R(t-x)].$$

А, отже,

$$R(\varepsilon,t)-R(t)=\int_0^t\Big\{[Q(\varepsilon,dx)-Q(dx)]R(\varepsilon,t-x)+Q(dx)[R(\varepsilon,t-x)-R(t-x)]\Big\}.$$

Перейдемо до границі в останній рівності, якщо $\varepsilon\to 0$. Одержимо, що $S(t)$ є розв'язком наступного рівняння марківського відновлення

$$S(t)=\int_0^t Q(dx)S(t-x).\tag{10}$$

Розв'язок рівняння (10) існує і єдиний. Це тривіальний розв'язок $S(t)=0$. Прийшли до суперечності. Твердження доведено.

Збурений середньоочікуваний прибуток в момент часу t, за умови, що початковим є стан i, є розв'язком збуреного рівняння марківського відновлення

$$\overline{r}_i(\varepsilon,t)=r_i^{\varepsilon}(1-P_i(\varepsilon,t))+\sum_{k\in E}\int_0^t Q_{ik}(\varepsilon,dx)\overline{r}_k(\varepsilon,t-x).\tag{11}$$

Розв'язок рівняння (11) шукаємо за формулою

$$\overline{r}_i(\varepsilon,t)=\sum_{k\in E}\int_0^t R_{ik}(\varepsilon,dx)r_k^\varepsilon(1-P_k(\varepsilon,t-x)). \tag{12}$$

Враховуючи у формулі (12) зображення (4), (5), (6), отримаємо, що збурений середньоочікуваний прибуток в момент часу t, за умови, що початковим є стан i, зображається

$$\overline{r}_i(\varepsilon,t)=\overline{r}_i(t)+B_i(\varepsilon,t), \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}B_i(\varepsilon,t)={}&\sum_{k\in E}\int_0^t\Bigg\{R_{ik}(dx)\Bigg[(1-P_k(t-x))\sum_{l=1}^p\lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon)-\\&-r_k\sum_{s=1}^p\Bigg(\sum_{j\in E}\alpha_{skj}(t-x)\Bigg)\delta_s(\varepsilon)-\sum_{l=1}^p\sum_{s=1}^p\Bigg(\sum_{j\in E}\alpha_{skj}(t-x)\Bigg)\lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon)\delta_s(\varepsilon)\Bigg]+\\&+A_{ik}(\varepsilon,dx)\Bigg[\sum_{l=0}^p\lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon)\Bigg]\times\\&\times\Bigg[1-P_k(t-x)-\sum_{s=1}^p\Bigg(\sum_{j\in E}\alpha_{skj}(t-x)\Bigg)\delta_s(\varepsilon)\Bigg]\Bigg\}+o(\delta_p(\varepsilon)).\end{aligned} \tag{14}$$

Визначимо коефіцієнти $\forall i,\ i=1\div N$

$$b_{i1}(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{B_i(\varepsilon,t)}{\delta_1(\varepsilon)},\quad b_{ij}(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\frac{B_i(\varepsilon,t)-\sum\limits_{k=1}^{j-1}b_{ik}\delta_k(\varepsilon)}{\delta_j(\varepsilon)}\right],\quad j=2\div p, \tag{15}$$

якщо зазначені границі існують. Якщо ж згадані границі не існують, то приймемо, що $b_{ij}(t)=\infty$.

Теорема 1. *1) Збурений середньоочікуваний прибуток $\overline{r}_i(\varepsilon,t)$ має збіжність порядку $\delta_1(\varepsilon)$ до незбуреного $\overline{r}_i(t)$. Щоб збільшити порядок збіжності необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $b_{i1}(t)=0$.*

2) Щоб збурений середньоочікуваний прибуток $\overline{r}_i(\varepsilon,t)$ мав порядок збіжності $\delta_s(\varepsilon)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$\begin{cases}b_{ij}(t)=0,\ \ \forall j=1\div s-1,\\ b_{is}(t)\neq0,\quad b_{is}(t)<\infty.\end{cases}$$

3) Щоб збурений середньоочікуваний прибуток $\overline{r}_i(\varepsilon,t)$ мав порядок збіжності більший за $\delta_s(\varepsilon)$ та менший за $\delta_{s+1}(\varepsilon)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$\begin{cases}b_{ij}(t)=0,\ \ \forall j=1\div s,\\ b_{i,s+1}(t)=\infty.\end{cases}$$

Доведення. Із зображення (14) доданка $B_i(\varepsilon,t)$ та твердження 1 випливає, що $B_i(\varepsilon,t)\to0$, при $\varepsilon\to0$. Формула (13) свідчить про те, що різниця збуреного і незбуреного середньоочікуваних прибутків $\overline{r}_i(\varepsilon, t) - \overline{r}_i(t)$ збігається до нуля зі швидкістю такою ж, як і $B_i(\varepsilon, t)$. Далі використаємо означення (15) коефіцієнтів $b_{ij}(t)$. Оскільки $b_{i1}(t) < \infty$ для довільного стану i, то $B_i(\varepsilon, t)$ має порядок збіжності принаймні $\delta_1(\varepsilon)$. Якщо ж $b_{i1}(t) = 0$, то порядок збіжності буде більшим за $\delta_1(\varepsilon)$. Нехай $b_{i1}(t) = 0, \ldots, b_{is}(t) = 0$ та $b_{is+1}(t) \neq 0$. Якщо $b_{is+1}(t) < \infty$, то функція $B_i(\varepsilon, t)$ збігається до нуля зі швидкістю $\delta_{s+1}(\varepsilon)$. Якщо ж $b_{is+1}(t) = \infty$, то функція $B_i(\varepsilon, t)$ має порядок збіжності більший за $\delta_s(\varepsilon)$ та менший за $\delta_{s+1}(\varepsilon)$. Достатність тверджень теореми 1 доведено.

Необхідність тверджень 1), 2), 3) теореми очевидна. Отже, теорему доведено.

Аналогічно квадрат збуреного ризику є розв'язком наступного збуреного рівняння марківського відновлення

$$\sigma_i^2(\varepsilon, t) = (1 - P_i(\varepsilon, t))\left(r_i^\varepsilon - \overline{r}_i(\varepsilon, t)\right)^2 + \sum_{k \in E} \int_0^t Q_{ik}(\varepsilon, dx)\sigma_k^2(\varepsilon, t - x).$$

Розв'язок такого рівняння шукаємо за формулою

$$\sigma_i^2(\varepsilon, t) = \sum_{k \in E} \int_0^t R_{ik}(\varepsilon, dx)\left(1 - P_k(\varepsilon, t - x)\right)\left(r_k^\varepsilon - \overline{r}_k(\varepsilon, t - x)\right)^2.$$

Врахуємо зображення (4), (5), (6) та (13). Отримаємо, що квадрат збуреного ризику $\sigma_i^2(\varepsilon, t)$ має вигляд

$$\sigma_i^2(\varepsilon, t) = \sigma_i^2(t) + C_i(\varepsilon, t) + o(\delta_p(\varepsilon)), \tag{16}$$

де

$$\begin{aligned}
C_i(\varepsilon, t) = \sum_{k \in E} \int_0^t \Bigg\{ & R_{ik}(dx)\Bigg[(1 - P_k(t - x))\Bigg(2(r_k - \overline{r}_k(t - x)) \times \\
& \times \left(\sum_{l=1}^p \lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon) - B_k(\varepsilon, t - x)\right) + \left(\sum_{l=1}^p \lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon) - B_k(\varepsilon, t - x)\right)^2\Bigg) - \\
& -(r_k - \overline{r}_k(t - x))^2 \sum_{s=1}^p \left(\sum_{j \in E} \alpha_{skj}(t - x)\right)\delta_s(\varepsilon) - \\
& - \sum_{s=1}^p \left(\sum_{j \in E} \alpha_{skj}(t - x)\right)\delta_s(\varepsilon)\Bigg[2(r_k - \overline{r}_k(t - x)) \times \\
& \times \left(\sum_{l=1}^p \lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon) - B_k(\varepsilon, t - x)\right) + \left(\sum_{l=1}^p \lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon) - B_k(\varepsilon, t - x)\right)^2\Bigg]\Bigg] + \\
& + A_{ik}(\varepsilon, dx)\left[1 - P_k(t - x) - \sum_{s=1}^p \left(\sum_{j \in E} \alpha_{skj}(t - x)\right)\delta_s(\varepsilon)\right] \times \\
& \times \left[r_k - \overline{r}_k(t - x) + \sum_{l=1}^p \lambda_{lk}\delta_l(\varepsilon) - B_k(\varepsilon, t - x)\right]^2 \Bigg\} + o(\delta_p(\varepsilon)).
\end{aligned} \tag{17}$$

Визначимо коефіцієнти $\forall i$, $i = 1 \div N$

$$c_{i1}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{C_i(\varepsilon, t)}{\delta_1(\varepsilon)}, \quad c_{ij}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{C_i(\varepsilon, t) - \sum\limits_{k=1}^{j-1} c_{ik}\delta_k(\varepsilon)}{\delta_j(\varepsilon)} \right], \; j = 2 \div p, \tag{18}$$

якщо зазначені границі існують. Якщо ж згадані границі не існують, то приймемо, що $c_{ij}(t) = \infty$.

Теорема 2. *1) Якщо $\sigma_i(t) \neq 0$, то збурений ризик $\sigma_i(\varepsilon, t)$ в момент часу t, за умови, що початковим є стан i, збігається до незбуреного $\sigma_i(t)$. Порядок збіжності є $\delta_1(\varepsilon)$. Щоб збільшити порядок збіжності необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$c_{i1}(t) = 0. \tag{19}$$

2) Якщо $\sigma_i(t) \neq 0$, то для того щоб збурений ризик $\sigma_i(\varepsilon, t)$ мав порядок збіжності $\delta_s(\varepsilon)$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$\begin{cases} c_{ij}(t) = 0, \;\; \forall j = 1 \div s - 1, \\ c_{is}(t) \neq 0, \quad c_{is}(t) < \infty. \end{cases}$$

3) Якщо $\sigma_i(t) \neq 0$, то треба, щоб збурений ризик $\sigma_i(\varepsilon, t)$ мав порядок збіжності більший за $\delta_s(\varepsilon)$ та менший за $\delta_{s+1}(\varepsilon)$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$\begin{cases} c_{ij}(t) = 0, \;\; \forall j = 1 \div s, \\ c_{i,s+1}(t) = \infty. \end{cases}$$

4) Якщо $\sigma_i(t) = 0$, то збурений ризик $\sigma_i(\varepsilon, t)$ має порядок збіжності $\sqrt{\delta_1(\varepsilon)}$. Щоб збільшити порядок збіжності необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова (19).

Доведення. Різницю збуреного ризику $\sigma_i(\varepsilon, t)$ та незбуреного $\sigma_i(t)$ можемо зобразити

$$\sigma_i(\varepsilon, t) - \sigma_i(t) = \frac{\sigma_i^2(\varepsilon, t) - \sigma_i^2(t)}{\sigma_i(\varepsilon, t) + \sigma_i(t)}. \tag{20}$$

Із зображення (17) доданка $C_i(\varepsilon, t)$ випливає, що $C_i(\varepsilon, t) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$. Отже, враховуючи формулу (16), квадрат збуреного ризику $\sigma_i^2(\varepsilon, t)$ збігається до квадрата незбуреного ризику $\sigma_i^2(t)$, при $\varepsilon \to 0$. Якщо $\sigma_i(t) \neq 0$, то знаменник у формулі (20) $\sigma_i(\varepsilon, t) + \sigma_i(t) \to 2\sigma_i(t) \neq 0$, при $\varepsilon \to 0$. А тому швидкість збіжності збуреного ризику $\sigma_i(\varepsilon, t)$ до незбуреного буде такою ж, як швидкість збіжності функції $C_i(\varepsilon, t)$ до нуля, при $\varepsilon \to 0$. Далі доведення пунктів 1 , 2 , 3 є аналогічним доведенню теореми 1.

Якщо ж $\sigma_i(t) = 0$, то збурений ризик за формулою (16) можна зобразити

$$\sigma_i(\varepsilon, t) = \sqrt{C_i(\varepsilon, t) + o(\delta_p(\varepsilon))}. \tag{21}$$

З останньої рівності (21) та визначення (18) коефіцієнтів $c_{ij}(t)$ випливає правильність пункту 4 даної теореми. Теорему доведено.

1. *Sharpe W.* Portfolio theory and capital markets. – New York, McGraw-Hill, 1970.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. – М., 1984. – Т.2.
3. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – К., 1976.
4. *Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К., 1995.
5. *Єлейко Я.І.* Асимптотична функція відновлення для одного класу напівмарківських процесів // Математичні студії. – 1994. – N 3. – С.107–110.
6. *Єлейко Я.І., Боротюк А.Ю.* Швидкість збіжності збурених доходності і ризику та шкала нескінченно малих // Вісн. Львів. ун-ту. – 1999. – Вип.53. – С.133–137.
7. *Боротюк А.Ю.* Збурені прибуток та ризик для акцій у випадковому середовищі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т.42. – N 4. – С.148–154

A. Borotyuk

THE PERTURBED PROFIT AND THE PERTURBED RISK FOR A STOCK IN A RANDOM ENVIRONMENT

The behaviour of the stock is described by semimarkov process with a finite set of states. A profit and a risk are considered in a arbitrary finite moment of time t. The perturbed profit and the perturbed risk are presented by a scale of infinitely small $\delta_1(\varepsilon), \dots, \delta_p(\varepsilon)$ as $\varepsilon \to 0$. The speed of convergence of the perturbed profit and the perturbed risk to respective unperturbed is researched.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.2000

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.20–27

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.20–27

УДК 517.535

Андрій Бридун, Оксана Лизун, Руслана Мицик

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ЛІНДЕЛЬОФА ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Нехай f - ціла функція, $f(0)=1, \{a_j\}$ - послідовність її нулів, $\alpha_j = \arg a_j$. Приймемо

$$\log f(z) = \int\limits_0^z \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi$$

в комплексній площині з радіальними розрізами від нулів функції f до ∞.

Позначимо

$$n_k(r,f) = \sum_{|a_j|\leqslant r} e^{-ik\alpha_j}, \quad k\in\mathbb{Z},$$

$$N_k(r,f) = \int\limits_0^r \frac{n_k(t,f)}{t} dt, \quad k\in\mathbb{Z},$$

$$n(r,f)=n_0(r,f), \quad N(r,f)=N_0(r,f).$$

Нехай

$$\log f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m z^m$$

- розвинення в деякому околі точки $z=0$.

Позначимо

$$l_k(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log f(re^{i\theta}) d\theta, \quad k\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Додатну, неперервну, зростаючу та необмежену функцію $\lambda(r)$, $r>0$, називатимемо функцією зростання. Через $T(r,f)$ позначимо характеристику Неванлінни функції f [2,7].

Означення 1. *[1] Нехай λ - функція зростання. Ціла функція f називається функцією скінченного λ - типу, якщо існують додатні сталі A і B такі, що $T(r,f)\leqslant A\lambda(Br)$ для всіх $r>0$.*

Клас таких цілих функцій при фіксованій функції λ позначимо через Λ_E.

Означення 2. *Порядком Пойя [3] функції зростання λ називається величина*

$$\rho^* = \rho^*[\lambda] = \sup\{p > 0 : \overline{\lim_{r,\tau\to\infty}} \frac{\lambda(\tau r)}{\tau^p \lambda(r)} = +\infty\}.$$

Зауважимо, що $\rho^* < +\infty$ тоді і лише тоді, коли $\lambda(2r) \leqslant M\lambda(r)$ при деякому $M > 0$ і всіх $r > 0$.

Через ρ позначимо порядок функції зростання λ, тобто

$$\rho = \rho[\lambda] = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \lambda(r)}{\log r}.$$

Порядком цілої функції f назвемо порядок її неванліннівської характеристики.

Додатна неперервна функція $L(r), r \geqslant r_0$ називається повільно змінною, якщо $\lim\limits_{r\to\infty} L(cr)/L(r) = 1$ рівномірно на будь-якому сегменті $0 < a \leqslant c \leqslant b < \infty$.

З результату Ліндельофа [4] випливає така теорема.

Теорема L. *Нехай $\lambda(r) = r^\rho L(r)$, $\rho \in \mathbb{N}$, L - повільно змінна функція. Ціла функція f порядку не вищого ніж ρ належить класу Λ_E тоді і лише тоді, коли*

$$N(r, f) \leqslant a\lambda(r)$$

i

$$\left| \gamma_\rho + \frac{1}{\rho} \sum_{|a_j|\leqslant r} \frac{1}{a_j^\rho} \right| \leqslant aL(r),$$

при деякому $a > 0$ і всіх $r > 0$.

Мета цієї статті – узагальнити теорему L на випадок, коли λ є довільною функцією зростання скінченного порядку Пойя.

Лема 1. *[5] Правильні співвідношення*

$$l_0(r, f) = N(r, f), \tag{2}$$

$$l_k(r, f) = \gamma_k r^k + r^k \int_0^r \frac{n_k(t, f)}{t^{k+1}} dt, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$l_{-k}(r, f) = r^{-k} \int_0^r \frac{n_{-k}(t, f)}{t^{-k+1}} dt, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Позначимо

$$m_q(r, \log f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log f(re^{i\theta})|^q d\theta \right\}^{1/q}, \quad q \geqslant 1. \tag{5}$$

Теорема A. [1], [2,с.16]. *Нехай f - ціла функція. Якщо $f \in \Lambda_E$, то для довільного q, $1 \leqslant q < \infty$ існують $A > 0, B > 0$ такі, що*

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log|f(re^{i\theta})||^q d\theta \right\}^{1/q} \leqslant A\lambda(Br). \tag{6}$$

Якщо ж для всіх $r > 0$ при деяких $q \geqslant 1, A > 0, B > 0$ виконується нерівність (6), то $f \in \Lambda_E$.

Лема 2. *Наступні чотири твердження еквівалентні:*

1) $f \in \Lambda_E$;

2) $|l_k(r,f)| \leqslant A\lambda(Br), \quad k \in \mathbb{Z},$ (7)

при деяких додатних A, B *і всіх* $r > 0$;

3) $|l_k(r,f)| \leqslant \frac{A\lambda(Br)}{|k|+1}, \quad k \in \mathbb{Z},$ (8)

при деяких додатних A, B *і всіх* $r > 0$;

4) $m_q(r, \log f) \leqslant A_q\lambda(B_q r)$, $1 \leqslant q < +\infty$,

при деяких додатних A_q, B_q *і всіх* $r > 0$.

Доведення. Доведення леми 2 подамо за схемою 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 1).

Нехай

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|e^{-ik\theta}d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді [1], [2, с.10]

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2}\gamma_k r^k + \frac{1}{2k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left[\left(\frac{r}{a_j}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k\right], \quad k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

$$c_{-k}(r,f) = \overline{c}_k(r,f), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$c_0(r,f) = N(r,f)$$

для всіх $r > 0$.

Згідно з (3) коефіцієнти $l_k(r,f)$ можна подати у вигляді

$$l_k(r,f) = \gamma_k r^k + \frac{r^k}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k - \frac{n_k(r,f)}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Враховуючи (9), маємо

$$l_k(r,f) = 2c_k(r,f) - \frac{n_k(r,f)}{k} + \frac{1}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left(\frac{\overline{a}_j}{r}\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Звідси

$$|l_k(r,f)| \leqslant 2|c_k(r,f)| + 2\frac{n(r,f)}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

З 1) відповідно випливає, що

$$N(r,f) \leqslant A\lambda(Br), \quad r > 0,$$

при деяких додатних A, B. Зауважимо, що звідси [1], [2, с.13] $n(r,f) \leqslant A\lambda(eBr)$, $r > 0$. З 1) випливає також [2, с.14]

$$|c_k(r,f)| \leqslant A\lambda(Br), \quad k \in \mathbb{Z},$$

при деяких додатних сталих A, B і всіх $r > 0$. Отже, маємо 2) для $k = 0, 1, 2, 3\ldots.$

Покажемо, що 2) виконується і для від'ємних k. З (4) випливає, що

$$|l_{-k}(r,f)| \leqslant \int\limits_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n(t,f)}{t}dt \leqslant N(r,f), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отже, імплікацію 1) $\Longrightarrow$ 2) доведено.

Покажемо, що з 2) випливає 3). З (10) і (7) випливає

$$\left|\gamma_k + \frac{1}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k\right| \leqslant \frac{A_1\lambda(B_1 r)}{r^k}, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{11}$$

при деяких додатних A_1, B_1 і всіх $r>0$.

Отже,

$$\left|\gamma_k + \frac{1}{k}\sum_{|a_j|\leqslant rk^{\frac{1}{k}}}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k\right| \leqslant \frac{A_1\lambda(2B_1 r)}{kr^k}, \quad k\in\mathbb{N},$$

при деяких додатних A_1, B_1 і всіх $r>0$. Маємо

$$\left|\gamma_k r^k + \frac{r^k}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k + \frac{1}{k}\sum_{r\leqslant|a_j|\leqslant rk^{\frac{1}{k}}}\left(\frac{r}{a_j}\right)^k\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\gamma_k r^k + \frac{r^k}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k\right| - \frac{n(2r,f)}{k}, \quad k\in\mathbb{N}, \quad r>0.$$

Враховуючи (7), одержуємо

$$\left|\gamma_k r^k + \frac{r^k}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left(\frac{1}{a_j}\right)^k\right| \leqslant \frac{A_2\lambda(B_2 r)}{k}, \quad k\in\mathbb{N},$$

при деяких додатних A_2, B_2 і всіх $r>0$.

Звідси і з (10) випливає

$$|l_k(r,f)| \leqslant \frac{A\lambda(Br)}{k}, \quad k\in\mathbb{N},$$

при деяких додатних A, B і всіх $r>0$.

Покажемо, що така ж оцінка правильна і для $|l_{-k}(r,f)|, k\in\mathbb{N}$. Коефіцієнти $l_{-k}(r,f)$ можна подати у вигляді

$$l_{-k}(r,f) = -\frac{1}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\left(\frac{a_j}{r}\right)^k + \frac{1}{k}n_{-k}(r,f), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Тоді

$$|l_{-k}(r,f)| \leqslant \frac{2}{k}n(r,f) \leqslant \frac{A_1\lambda(B_1 r)}{k}, \quad k\in\mathbb{N},$$

при деяких додатних A_1, B_1 і всіх $r>0$.

Доведемо імплікацію 3) $\Longrightarrow$ 4). Нехай $q\geqslant 2$. Використовуючи нерівність Хаусдорфа-Юнг, одержуємо

$$m_q(r,\log f) \leqslant \left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|l_k(r,f)|^p\right\}^{1/p},$$

де $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, r>0$. Беручи до уваги (8), маємо

$$\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|l_k(r,f)|^p\right\}^{1/p}\leqslant\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{A\lambda(Br)}{|k|+1}\right)^p\right\}^{1/p}=A_q\lambda(B_qr), r>0.$$

Отже, $m_q(r,\log f)\leqslant A_q\lambda(B_qr)$ при деяких додатних A_q, B_q, всіх $r>0$ і $q\geqslant 2$. При $1\leqslant q\leqslant 2$ така нерівність випливає з останньої з врахуванням монотонності $m_q(r,f)$ по q. Зауважимо, що

$$m_q(r,\log|f|)\leqslant m_q(r,\log f).$$

Отже, з 4) випливає (6), звідки за теоремою А отримуємо 1).

Зауважимо, що імплікація 2) $\Longrightarrow$ 3) іншим способом була доведена в [6].

Доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай λ – функція зростання ,$\rho^*=\rho^*[\lambda]<+\infty$. Якщо $f\in\Lambda_E$, то існує стала $a>0$ така, що при всіх $r>0$ виконується*

$$N(r,f)\leqslant a\lambda(r) \tag{12}$$

і

$$\left|\gamma_k+\frac{1}{k}\sum_{|a_j|\leqslant r}\frac{1}{a_j^k}\right|\leqslant a\frac{\lambda(r)}{r^k} \tag{13}$$

при $k\in\mathbb{N}$.

Якщо ціла функція f порядку не вище ρ^* задовольняє умову (12) і умову (13) при $k\in[0,\rho^*]\bigcap\mathbb{N}$, то $f\in\Lambda_E$.

Доведення. Нехай $f\in\Lambda_E$. Тоді за лемою 2

$$|l_k(r,f)|\leqslant A\lambda(Br),\quad k\in\mathbb{Z}, \tag{14}$$

при деяких додатних A, B і всіх $r>0$.

Візьмемо $m_0\in\mathbb{N}$ таке, що $2^{m_0}>B$. Враховуючи нерівність $\lambda(2r)\leqslant M\lambda(r)$ при деякому $M>0$ і всіх $r>0$, маємо

$$|l_k(r,f)|\leqslant A\lambda(2^{m_0}r)\leqslant AM\lambda(2^{m_0-1}r)\leqslant AM^{m_0}\lambda(r),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Приймемо, що $AM^{m_0}=a$. Тоді (14) набуває вигляду

$$|l_k(r,f)|\leqslant a\lambda(r),\quad k\in\mathbb{Z},\quad r>0. \tag{15}$$

При $k=0$ маємо (12). З (11) і нерівності $A_1\lambda(B_1r)\leqslant a\lambda(r)$ при деякому $a>0$ і всіх $r>0$ випливає (13).

Нехай тепер f – ціла функція порядку не вище ρ^* і виконується (12). Тоді

$$|l_{-k}(r,f)|\leqslant N(r,f)\leqslant a\lambda(r),\quad k\in\mathbb{N}. \tag{16}$$

Позначимо $\lambda_1(r)=r^{\rho^*+\epsilon}, 2\epsilon=[\rho^*]+1-\rho.^*$, де $[\rho^*]$ – ціла частина від ρ^*. Оскільки порядок функції f не перевищує ρ^*, то $T(r,f)\leqslant Cr^{\rho^*+\epsilon},\quad r>r_\epsilon$ при деякому $C>0$. Тобто функція f є функцією скінченного λ_1-типу.

За лемою 2

$$|l_k(r,f)|\leqslant A\lambda_1(r),$$

при деякому $A>0$ і всіх $r>0$.

Згідно з (3), маємо

$$\left|\gamma_k + \int_0^r \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}dt\right| \leqslant A\frac{r^{\rho^*+\epsilon}}{r^k}. \tag{17}$$

Спрямовуючи r до $+\infty$ при $k > \rho^* + \epsilon$, одержуємо

$$\gamma_k = -\int_0^\infty \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}dt.$$

Отже,

$$l_k(r,f) = -r^k \int_r^\infty \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}dt, \quad k > \rho^*. \tag{18}$$

Враховуючи (15) при $k = 0$, маємо

$$n(t,f) \leqslant N(4t,f) \leqslant a\lambda(4r,f) \leqslant aM^2\lambda(r).$$

Тоді

$$|l_k(r,f)| \leqslant r^k \int_r^\infty \frac{n(t,f)}{t^{k+1}}dt \leqslant aM^2 r^k \int_r^\infty \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt, \quad k > \rho^*.$$

Зробимо заміну $t = r\tau$. Тоді

$$r^k \int_r^\infty \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt = r^k \int_1^{+\infty} \frac{\lambda(r\tau)}{\tau^{k+1}r^{k+1}} r d\tau = \int_1^{+\infty} \frac{\lambda(r\tau)}{\tau^{k+1}}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \lambda(r) \int_1^{+\infty} \frac{\lambda(r\tau)}{\tau^{k+1}\lambda(r)}d\tau.$$

Оскільки

$$\lambda(r\tau)/\lambda(r)\tau^{\rho^*+\epsilon} \leqslant c_1,$$

то

$$|l_k(r,f)| \leqslant \lambda(r)A_1 \int_1^\infty \frac{\lambda(r\tau)}{\tau^{k+1}\lambda(r)}d\tau \leqslant c_2\lambda(r) \int_1^{+\infty} \tau^{-k+\rho^*+\epsilon-1}d\tau =$$

$$= \frac{c_2\lambda(r)}{k-\rho^*-\epsilon} \leqslant \frac{2c_2}{[\rho^*]+1-\rho^*}\lambda(r) = c_3\lambda(r), \quad k > \rho^*. \tag{19}$$

Співвідношення (16), (13) при $k \in [0,\rho^*] \bigcap \mathbb{N}$ і (19) дають (15), звідки за лемою 2 маємо $f \in \Lambda_E$.

Означення 3. *Узагальненим уточненим порядком називається додатна, неперервно диференційовна на $(0,+\infty)$ функція $l(r)$ така, що $l'(r)r\log r \to 0$ при $r \to \infty$.*

Позначимо $\varlimsup\limits_{r\to\infty} l(r) = \beta$.

Лема 3. *Нехай $l(r)$ - узагальнений уточнений порядок, $\lambda(r) = r^{l(r)}$. Тоді $\rho^*[\lambda] = \beta$.*

Доведення. Порядок Пойя $\rho^*[\lambda]$ може бути визначений так:

$$\rho^*[\lambda] = \varlimsup_{r,A\to\infty} \frac{\log\lambda(Ar) - \log\lambda(r)}{\log A}.$$

При $A > 1$ маємо

$$\frac{\log(Ar)^{l(Ar)} - \log r^{l(r)}}{\log A} = \frac{l(Ar) - l(r)}{\log(Ar) - \log r}\log r + l(Ar). \tag{20}$$

Застосовуючи теорему Коші про середнє, одержуємо

$$\frac{l(Ar) - l(r)}{\log(Ar) - \log r}\log r = l'(r^*)r^*\log r = \frac{\log r}{\log r^*}l'(r^*)r^*\log r^*, \quad \text{де} \quad r < r^* < Ar.$$

Звідси та з (20) випливає $\rho^*[\lambda] = \beta$.

Теорема 2. *Нехай $l(r)$ - узагальнений уточнений порядок, $\lambda(r) = r^{l(r)}$,*

$$\varliminf_{r\to\infty} l(r) = \alpha, \quad \varlimsup_{r\to\infty} l(r) = \beta < +\infty.$$

Якщо ціла функція f порядку не вищого ніж β задовольняє умову (12) та умову (13) при $k \in [\alpha, \beta]\bigcap\mathbb{N}$, то $f \in \Lambda_E$.

Доведення. За теоремою 1 і лемою 3 досить показати, що (14) виконується при $k \in (0, \alpha)\bigcap\mathbb{N}$. Остання множина непорожня при $1 < \alpha$. Тоді при $k < \alpha$ маємо $r^k < r^{l(r)}$ при $r > r_0$, а також з огляду на (12)

$$|l_k(r,f)| \leqslant r^k|\gamma_k| + r^k\int\limits_{|a_1|}^{r}\frac{n(t,f)}{t^{k+1}}dt \leqslant |\gamma_k|r^{l(r)} + Ar^k\int\limits_{|a_1|}^{r}\frac{t^{l(t)}}{t^{k+1}}dt$$

при деякому $A > 0$.

З означення узагальненого уточненого порядку $l(r)$ випливає (див., наприклад, [7, с.91])

$$r^k\int\limits_{|a_1|}^{r}\frac{t^{l(t)}}{t^{k+1}}dt \leqslant A_1\frac{r^{l(r)}}{\alpha - k}.$$

Отже,

$$|l_k(r,f)| \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant\alpha}|\gamma_k|r^{l(r)} + A_2\frac{r^{l(r)}}{\alpha - k} \leqslant C\lambda(r), \quad k < \alpha$$

при деяких $A_2 > 0, C > 0$,що завершує доведення теореми 2.

Якщо $\alpha = \beta = \rho \in \mathbb{N}$, то $\lambda(r) = r^{l(r)}$, де $\lambda(r)$ – уточнений порядок, тобто $l(r) \to \rho$, $l'(r)r\ln r \to 0$ при $r \to \infty$. Тоді (див.,наприклад, [7,с.73]) $\lambda(r) = r^\rho L(r)$, де $L(r)$ повільно змінна.

Отже, з теореми 2 випливає теорема L.

---

1. *Rubel L.A., Taylor B.A.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions// Bull. Soc. Math. France. – 1968. – Vol.96. – P.53-96.

2. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции. – К., 1988.
3. *Drasin D., Shea D.F.* Polya peaks and the oscillation of positive functions// Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol.34. – N 2. – P.403-411.
4. *Lindelöf E.* Sur les fonctions entieres d'ordre entier// Ann. Sci. Ecole Normale Sup. – 1905. – Vol. 22. – P.365-395.
5. *Калинець Р.З., Кондратюк А.А.* Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $\mathbb{L}^p[0, 2\pi]$- метриці// Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50. – N 7. – С.889-896.
6. *Васильків Я.В.* Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $\mathbb{L}^p[0, 2\pi]$- метриці. I// Мат.студії. – 1999. – Т.12. – N 1. – С.37-58.
7. *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций. – М., 1970.

A. Brydun, O. Lyzun, R. Mytsyk

GENERRALIZATION OF LINDELÖF THEOREM FOR ENTIRE FUNTIONS

For an arbitrary entire function of finite order in the sense of Polya the generalization of Lindelöf theorem on boundedness of λ-type of the function is given. We also improve thus theorem in the case of generalized oscillating order.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.28–32 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.28–32*

УДК 519.21

Наталія Бугрій

ДЕЯКІ ПРОБЛЕМИ АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ВІДНОВЛЕННЯ

Розглянемо напівмарківський процес x_t зі скінченною кількістю станів $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$. Позначимо

$$\tau = \inf\{\ t > 0,\ \ x_0 \neq x_t\ \},\ F_{ij}(t) = P\{\ \tau \leqslant t,\ x_\tau = j \mid x_0 = i\ \},$$
$$F_i(t) = \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(t) = P\{\ \tau \leqslant t \mid x_0 = i\ \}.$$

Матриця $||p_{ij}||_{i,j=1,\ldots,m}$ з $p_{ij} = P\{\ x_\tau = j \mid x_0 = i\ \}$ вкладеного ланцюга Маркова нерозкладна і, отже, для неї існує єдиний стаціонарний розподіл $p_1, \ldots, p_m$.
Припустимо, що

$$1 - F_i(t) \sim a_i t^{-\alpha} L(t),\ i = 1, \ldots, m,\ \frac{1}{2} < \alpha < 1 \text{ при } t \to \infty, \tag{1}$$

де $L(t)$ – повільно змінна функція.
Запишемо векторне рівняння відновлення

$$q_i(t) = b_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t F_{ij}(du) q_j(t-u),\ i = 1, \ldots, m,\ t \geqslant 0 \tag{2}$$

Розв'язок (2) має вигляд

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t U_{ij}(du) b_j(t-u) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t U_{ij}(tdu) b_j(t(1-u)),\ i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

де $U_{ij}\{[0,x)\} = U_{ij}(x)$ – елементи матриці відновлення, яка відповідає векторному рівнянню відновлення, $b(x) = (b_j(x), j = 1, \ldots, m)$ – вектор, координати якого $b_j(x) : R_+ \to R_+,\ j = 1, \ldots, m$ є незростаючими функціями такими, що $b_j(0) < \infty,\ j = 1, \ldots, m$ і

$$b_j(t) \sim t^{-\beta_j} L(t),\ 0 \leqslant \beta_j < 1,\ j = 1, \ldots, m, \text{ при } t \to \infty. \tag{4}$$

Як видно з (3), асимптотична поведінка $q_i(t)$ рівняння (2) при $t \to \infty$ визначається властивостями матричної міри $U(tx) = ||U_{ij}(tx)||_{i,j=1,\ldots,m}$ і $b(tx)$ при $t \to \infty$.

Знайдемо асимптотику матричної міри $U(tx)$.

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x), \tag{5}$$

де $F^{0*}(x) = E$, E – одинична матриця.

Позначимо через

$$\hat{U}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} U(dx)$$

перетворення Лапласа для $U(x)$, а через

$$\hat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(dx)$$

перетворення Лапласа для $F(x)$.

Враховуючи (5) і властивості перетворення Лапласа, маємо

$$\hat{U}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\hat{F}(\lambda)\Big)^n = \Big(E - \hat{F}(\lambda)\Big)^{-1}.$$

Розглянемо послідовність матриць $\{\hat{F}(\frac{\lambda}{t})\}$ при λ фіксованих і $t \to \infty$. Це монотонна послідовність матриць з невід'ємними елементами, для якої $\hat{F}\left(\frac{\lambda}{t}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} P$, де $P = ||p_{ij}||_{i,j=1,\ldots,m}$ – матриця перехідних ймовірностей вкладеного ланцюга Маркова. Оскільки P нерозкладна з перроновим коренем, який дорівнює одиниці, лівим і правим власними векторами $p = (p_1, \ldots, p_m)$ і $1 = (1, \ldots, 1)$, то за лемою [1, с.599]

$$c_t \left(E - \hat{F}\left(\frac{\lambda}{t}\right)\right)^{-1} \xrightarrow[t\to\infty]{} ||1 \cdot p_j||_{i,j=1,\ldots,m},$$

де $c_t = 1 - (p, \hat{F}(\frac{\lambda}{t}) \cdot 1)$.

Розглянемо

$$\frac{1 - \hat{F}_i(\lambda)}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}(1 - F_i(x))dx$$

– перетворення Лапласа міри з монотонною щільністю $1 - F_i(x)$.

Використовуючи (1) і тауберову теорему [3, с.513], одержимо

$$\frac{1 - \hat{F}_i(\lambda)}{\lambda} \sim \frac{1}{\lambda^{1-\alpha}} \Gamma(1-\alpha) L\left(\frac{1}{\lambda}\right) a_i \text{ при } \lambda \to 0,$$

звідси

$$1 - \hat{F}_i(\lambda) \sim \lambda^\alpha \Gamma(1-\alpha) L\left(\frac{1}{\lambda}\right) a_i \text{ при } \lambda \to 0. \tag{6}$$

Скориставшись (6), знайдемо асимптотику c_t, $t \to \infty$:

$$c_t = 1 - \left(p, \hat{F}\left(\frac{\lambda}{t}\right) \cdot 1\right) = 1 - \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^m \hat{F}_{ij}\left(\frac{\lambda}{t}\right) = \sum_{i=1}^m p_i \left(1 - \hat{F}_i\left(\frac{\lambda}{t}\right)\right) \sim$$

$$\sim \sum_{i=1}^m p_i \left(\frac{\lambda}{t}\right)^\alpha \Gamma(1-\alpha) L\left(\frac{t}{\lambda}\right) a_i \sim t^{-\alpha} \lambda^\alpha \Gamma(1-\alpha) L(t) \sum_{i=1}^m a_i p_i.$$

З того, що

$$t^{-\alpha}\lambda^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)L(t)\sum_{i=1}^{m}a_ip_i\int_0^{\infty}e^{-\frac{\lambda}{t}x}U(dx)\xrightarrow[t\to\infty]{}||1\cdot p_j||_{i,j=1,\dots,m},$$

тобто

$$t^{-\alpha}L(t)\int_0^{\infty}e^{-\lambda u}U(tdu)\xrightarrow[t\to\infty]{}\frac{1}{\lambda^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)L(t)\sum\limits_{i=1}^{m}a_ip_i}||1\cdot p_j||_{i,j=1,\dots,m}$$

випливає

$$t^{-\alpha}L(t)U_{ij}(tdu)\xrightarrow[t\to\infty]{}\mu(du)p_j \tag{7}$$

в значенні слабої збіжності мір.

Міра $\mu(du)$ визначається перетворенням Лапласа

$$\int_0^{\infty}e^{-\lambda u}\mu(du)=\frac{1}{\lambda^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)\sum\limits_{i=1}^{m}a_ip_i}.$$

Враховуючи (7),

$$t^{-\alpha}L(t)U_{ij}(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}\mu(1)p_j \tag{8}$$

в значенні слабої збіжності мір, де $\mu(1)=\mu\{[0,1)\}$. За доведеним в [4, с.391]

$$\int_0^t U_{ij}(du)b_j(t-u)\sim\alpha B(\alpha,1-\beta_j)U_{ij}(t)b_j(t),\ \text{ при }\ t\to\infty.$$

Дослідимо асимптотичну поведінку $q_i(t),\ i=1,\dots,m$ при $t\to\infty$.

$$\lim_{t\to\infty}q_i(t)=\lim_{t\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\int_0^t U_{ij}(du)b_j(t-u)=\lim_{t\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\alpha B(\alpha,1-\beta_j)U_{ij}(t)b_j(t)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\alpha B(\alpha,1-\beta_j)\lim_{t\to\infty}U_{ij}(t)t^{-\alpha}L(t)\frac{1}{t^{-\alpha}L(t)}b_j(t).$$

З (8) одержуємо

$$\lim_{t\to\infty}U_{ij}(t)t^{-\alpha}L(t)=\mu(1)p_j,\ \ i,j=1,\dots,m.$$

Знайдемо

$$L_j=\lim_{t\to\infty}\frac{b_j(t)}{t^{-\alpha}L(t)},\ \ j=1,\dots,m.$$

З (4) випливає, що

$$L_j=\lim_{t\to\infty}\frac{t^{-\beta_j}L(t)}{t^{-\alpha}L(t)}=\lim_{t\to\infty}t^{\alpha-\beta_j}=\begin{cases}1, & \alpha=\beta_j,\\ 0, & \alpha<\beta_j,\\ \infty, & \alpha>\beta_j.\end{cases}$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} q_i(t) = \begin{cases} \alpha\mu(1)\sum\limits_{j=1}^{m} B(\alpha, 1-\beta_j)p_j, & \alpha = \beta_j, \\ 0, & \alpha < \beta_j, \\ \infty, & \alpha > \beta_j. \end{cases}$$

Звідси видно, що $\lim\limits_{t\to\infty} q_i(t)$ – скінченна $\Leftrightarrow$, коли $\alpha \leqslant \beta_j$, $i, j = 1, \ldots, m$. Замінимо умову (4) на

$$b_j(t) \sim t^{-\beta_j} L_{\beta_j}(t), \ 0 \leqslant \beta_j < 1, \ j = 1, \ldots, m \quad \text{при } t \to \infty, \tag{4'}$$

де $L_{\beta_j}(t)$, $j = 1, \ldots, m$ – повільно змінні функції.

Розглянемо

$$L_j^1 = \lim_{t\to\infty} \frac{b_j(t)}{t^{-\alpha}L(t)} = \lim_{t\to\infty} t^{\alpha-\beta_j}\frac{L_{\beta_j}(t)}{L(t)}, j = 1, \ldots, m.$$

Функції $L(t), L_{\beta_j}(t)$, $j = 1, \ldots, m$ представимо [3, с.342] у вигляді

$$a(t)\exp\left(\int_1^t \frac{\varepsilon(y)}{y}dy\right), \ a_j(t)\exp\left(\int_1^t \frac{\varepsilon_j(y)}{y}dy\right), \ j = 1, \ldots, m$$

відповідно, де $\varepsilon(y) \to 0$, $\varepsilon_j(y) \to 0$, $a(t) \to c < \infty$, $a_j(t) \to c_j < \infty$, $j = 1, \ldots, m$ при $t \to \infty$. Тоді

$$L_j^1 = \lim_{t\to\infty} t^{\alpha-\beta_j}\frac{a_j(t)}{a(t)}\exp\left(\int_1^t \frac{\varepsilon_j(y)-\varepsilon(y)}{y}dy\right) =$$

$$= \frac{c_j}{c}\lim_{t\to\infty} t^{\alpha-\beta_j}\exp\left(\int_1^t \frac{\varepsilon_j(y)-\varepsilon(y)}{y}dy\right), \ j = 1, \ldots, m.$$

1. Нехай $\alpha = \beta_j$. $L_j^1 = \frac{c_j}{c}\lim\limits_{t\to\infty}\exp\left(\int_1^t \frac{\varepsilon_j(y)-\varepsilon(y)}{y}dy\right)$, $j = 1, \ldots, m$. Досліджуватимемо такі випадки:

а) $\varepsilon_j(y) = \varepsilon(y)$. Тоді $L_j^1 = \dfrac{c_j}{c}$;

б) $\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) < 0$. Тоді $L_j^1 = \frac{c_j}{c}\lim\limits_{t\to\infty}\exp\left(-\int_1^t \frac{\varepsilon(y)-\varepsilon_j(y)}{y}dy\right) = 0$;

в) $\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) > 0$. Тоді $L_j^1 = \frac{c_j}{c}\lim\limits_{t\to\infty}\exp\left(\int_1^t \frac{\varepsilon_j(y)-\varepsilon(y)}{y}dy\right) = \infty$.

2. Нехай $\alpha < \beta_j$. Аналогічно розглянемо випадки:

а) $\varepsilon_j(y) = \varepsilon(y)$. Тоді $L_j^1 = \frac{c_j}{c}\lim\limits_{t\to\infty} t^{\alpha-\beta_j}\exp\left(\int_1^t \frac{\varepsilon_j(y)-\varepsilon(y)}{y}dy\right) = 0$;

б) $\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) < 0$. Тоді $L_j^1 = \frac{c_j}{c}\lim\limits_{t\to\infty} t^{\alpha-\beta_j}\exp\left(-\int_1^t \frac{\varepsilon(y)-\varepsilon_j(y)}{y}dy\right) = 0$;

в) $\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) > 0$. Тоді припустимо, що

$$\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) = d_1 y^{-k}, \ k > 0, \ d_1 = \text{const}. \tag{9}$$

Звідси

$$L_j^1 = \frac{c_j}{c} \lim_{t\to\infty} t^{\alpha-\beta_j} \exp\left(\int_1^t \frac{\varepsilon_j(y)-\varepsilon(y)}{y} dy\right) = \frac{c_j}{c} \lim_{t\to\infty} t^{\alpha-\beta_j} d_2 \exp\left(-\frac{d_1}{kt^k}\right) = 0,$$

де $d_2 = \exp\left(\frac{d_1}{k}\right)$.

3. Нехай $\alpha > \beta_j$. У цьому випадку $L_j^1 = \infty$ для довільних $\varepsilon_j(y), \varepsilon(y)$.

Запишемо умови, при яких $\lim_{t\to\infty} q_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$ скінченна.

Якщо $\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) = 0$, то

$$\lim_{t\to\infty} q_i(t) = \begin{cases} \frac{\alpha\mu(1)}{c} \sum_{j=1}^{m} B(\alpha, 1-\beta_j) c_j p_j, & \alpha = \beta_j, \\ 0, & \alpha < \beta_j. \end{cases}$$

Якщо $\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) < 0$, то $\lim_{t\to\infty} q_i(t) = 0$ при $\alpha \leqslant \beta_j$.

Якщо $\varepsilon_j(y) - \varepsilon(y) > 0$ і виконується (9), то $\lim_{t\to\infty} q_i(t) = 0$ при $\alpha < \beta_j$.

---

1. *Шуренков В. М., Єлейко Я. И.* Предельные распределения временных средних для полумарковского процесса с конечным числом состояний // Укр. мат. журн. – 1979. – Т.31. – N 5. – С. 598-603.
2. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – К., 1976.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М., 1967.
4. *Kevin K. Anderson, Krishna B. Athreya.* A renewal theorem in the infinite mean case // The Annals of Probability. – 1987. – Vol. 15. – N 1. – P. 388-393.

N. Buhrii

SOME PROBLEMS OF THE ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE RENEWAL EQUATION

An asymptotic of the solution of the renewal equation for semi-markov process with finite state space without finitness condition of mean stay times in states is found. There are established conditions under which this solution has a finite limit.

Стаття надійшла до редколегії 20.10.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.33–43

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.33–43

УДК 517.95

Олег Бугрій, Сергій Лавренюк

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ, ЯКЕ УЗАГАЛЬНЮЄ РІВНЯННЯ ПОЛІТРОПНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

Сильно нелінійним рівнянням з частинними похідними, які виникають у механіці суцільних середовищ, присвячено праці [1 – 3] та інші. До таких рівнянь відносяться і рівняння політропної фільтрації та різні їхні узагальнення [4], [5]. У цій праці ми розглянемо мішану задачу для рівняння, яке є узагальненням рівняння політропної пружної фільтрації у випадку неоднорідних середовищ. Це рівняння автори використовують для дослідження варіаційних нерівностей, що і зумовлює його специфічний вигляд.

Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$; $Q = \Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$; $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1,t_2)$, $t_1, t_2 \in [0,T], t_1 < t_2$; $n,\ N$ – довільні натуральні числа; $p, q \in C(\overline{\Omega})$,

$$1 < p_1 = \min_{\overline{\Omega}} p(x) \leqslant \max_{\overline{\Omega}} p(x) = p_2 < +\infty,$$
$$1 < q_1 = \min_{\overline{\Omega}} q(x) \leqslant \max_{\overline{\Omega}} q(x) = q_2 < +\infty;$$
$$r = \min\{p_1, q_1\}, s = \max\{p_2, q_2\};$$
$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1,\ \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1,\ x \in \overline{\Omega}.$$

Ми припускатимемо, що $r < 2$. Зауважимо, що умова неперервності на $\overline{\Omega}$ функцій p, q може бути замінена на умову 2 в теоремі 1.5 [5].

Через $[W]^N$ позначатимемо декартовий степінь, а через $\|\cdot;W\|$ – норму банахового простору W, якщо $u \in [W]^N$, то $u = \mathrm{colon}(u_1,\ldots,u_N)$, де $u_j \in W (j = \overline{1,N})$.

Нехай $L^{p(x)}(\Omega)$, $L^{q(x)}(\Omega)$, $W^{1,p(x)}(\Omega)$, $\overset{o}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)$ – узагальнені простори Лебега та Соболєва, введені в [6],

$$\rho_p(v) = \int\limits_{\Omega} |v|^{p(x)} dx;\ \ \|v; L^{p(x)}(\Omega)\| = \inf\{\lambda > 0 \ |\ \rho_p(v/\lambda) \leqslant 1\}.$$

Зауваження 1. Якщо функція v задовольняє нерівність $\rho_p(v) \leqslant K_1$, де $K_1 = \mathrm{const} > 0$, то $\|v; L^{p(x)}(\Omega)\| \leqslant \max\{1, K_1\}$.

Зауваження 2. Якщо $p(x) \leqslant q(x)$ при $x \in \Omega$, то $L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ і $\|\cdot; L^{p(x)}(\Omega)\| \leqslant (1 + |\Omega|)\|\cdot; L^{q(x)}(\Omega)\|$, де символ $\hookrightarrow$ означає неперервне вкладення.

Простори $[L^2(\Omega)]^N$, $[L^{q(x)}(\Omega)]^N$, $[W^{1,p(x)}(\Omega)]^N$ наділимо нормами

$$||u; [L^2(\Omega)]^N|| = \left(\sum_{j=1}^{N} ||u_j; L^2(\Omega)||^2\right)^{1/2},$$

$$||u; [L^{q(x)}(\Omega)]^N|| = \sum_{j=1}^{N} ||u_j; L^{q(x)}(\Omega)||,$$

$$||u; [W^{1,p(x)}(\Omega)]^N|| = ||u; [L^{p(x)}(\Omega)]^N|| + \sum_{i=1}^{n} ||u_{x_i}; [L^{p(x)}(\Omega)]^N||$$

відповідно. Аналогічно визначимо простори $[L^2(Q)]^N$,$[L^{q(x)}(Q)]^N$, $[L^{p(x)}(Q)]^N$.

Нехай X – замкнений підпростір простору $[W^{1,p(x)}(\Omega)]^N$, для якого виконуються (неперервні) вкладення $[\overset{\circ}{W}{}^{1,p(x)}(\Omega)]^N \hookrightarrow X \hookrightarrow [W^{1,p(x)}(\Omega)]^N$;

$$V = X \cap [L^{q(x)}(\Omega)]^N \cap [L^2(\Omega)]^N.$$

Тоді $V^* = X^* + \left[L^{\frac{q(x)}{q(x)-1}}(\Omega)\right]^N + [L^2(\Omega)]^N$.

Зауваження 3. З вибору простору V маємо $V \subset [L^2(\Omega)]^N$, де символ $\subset$ означає неперервне та щільне вкладення. Тому, ототожнивши $[L^2(\Omega)]^N$ зі спряженим до нього простором, ми можемо ототожнити його з деяким підпростором простору V^*. Тоді $V \subset [L^2(\Omega)]^N \subset V^*$.

Введемо простір

$$U(Q) = \Big\{u \mid u(t) \in V \text{ для майже усіх } t \in (0,T),\ u \in [L^2(Q)]^N \cap [L^{q(x)}(Q)]^N,$$
$$u_{x_i} \in [L^{p(x)}(Q)]^N,\ i = \overline{1,n}\Big\}$$

з нормою

$$||u; U(Q)|| = \sum_{i=1}^{n} ||u_{x_i}; [L^{p(x)}(Q)]^N|| + ||u; [L^2(Q)]^N|| + ||u; [L^{q(x)}(Q)]^N||.$$

Зауваження 4. Можна довести, що

$$L^{p_2}((0,T); L^{p(x)}(\Omega)) \subset L^{p(x)}(Q) \subset L^{p_1}((0,T); L^{p(x)}(\Omega)).$$

Тому $L^s((0,T);V) \subset U(Q) \subset L^r((0,T);V)$ і $[U(Q)]^* \subset L^{\frac{s}{s-1}}((0,T);V^*)$.

Аналогічно як в [7, с. 145], при потребі розглядатимемо функцію $u = u(x,t), (x,t) \in Q$, як функцію, яка кожному моменту часу $t \in (0,T)$ ставить у відповідність функцію змінної x: $u(t) = u(\cdot,t)$.

Позначимо через $(\cdot,\cdot)$ скалярний добуток в R^N, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ і $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ – скалярний добуток між V^* і V та між $[U(Q)]^*$ і $U(Q)$ відповідно.

Далі розглядатимемо функції, які задовольняють такі умови:

(A): $a_{ij} \in L^\infty(Q)$; $a_{ij}(x,t) \geqslant a_0$ для майже усіх $(x,t) \in Q$, $a_0 = \text{const} > 0$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,N}$;

(C): елементи $c_{km}(k,m = \overline{1,N})$ матриці C належать простору $L^\infty(Q)$ і $(C(x,t)\xi,\xi) \geqslant c_0|\xi|^2$, $c_0 = \text{const}$, для майже усіх $(x,t) \in Q$ і для усіх $\xi \in R^N$;

(F): $F \in [L^{q'(x)}(Q)]^N$;

(G): $g_j \in L^\infty(Q)$; $g_j(x,t) \geqslant g_0$, для майже усіх $(x,t) \in Q$, $g_0 = \text{const} > 0$, $j = \overline{1,N}$.

(U): $u_0 \in V$.

Нехай K – замкнена опукла множина в V, яка містить нульовий елемент, $P_K : [L^2(\Omega)]^N \to K$ – оператор проектування $[L^2(\Omega)]^N$ на K; $B : [L^2(\Omega)]^N \to [L^2(\Omega)]^N$ – оператор штрафу, який визначається за правилом: $Bw = w - P_K(w)$; сім'я операторів $\{A(t) \mid A(t) : V \to V^*$ для майже усіх $t \in (0,T)\}$ визначається рівністю

$$\langle A(t)u, v\rangle = \int\limits_\Omega \Big[\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n a_{ij}(x,t)|u_{j,x_i}(x)|^{p(x)-2} u_{j,x_i}(x) v_{j,x_i}(x) +$$

$$+ (C(x,t)u(x), v(x)) + \sum_{j=1}^N g_j(x,t)|u_j(x)|^{q(x)-2} u_j(x) v_j(x)\Big] dx, \quad u, v \in V;$$

оператори $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U(Q) \to [U(Q)]^*$ визначають так:

$$\langle\langle \mathcal{A}u, v\rangle\rangle = \int\limits_0^T \langle A(t)u(t), v(t)\rangle dt; \quad \langle\langle \mathcal{B}u, v\rangle\rangle = \int\limits_0^T \langle Bu(t), v(t)\rangle dt, \quad u, v \in U(Q);$$

$$\mathcal{F} \in [U(Q)]^*, \quad \langle\langle \mathcal{F}, u\rangle\rangle = \int\limits_Q (F(x,t), u(x,t)) dx dt, \; u \in U(Q).$$

Розглянемо задачу

$$u_t + \mathcal{A}u + \mathcal{B}u = \mathcal{F}, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2}$$

Означення. Розв'язком задачі (1), (2) називається функція $u \in U(Q) \cap$ $\cap C([0,T]; [L^2(\Omega)]^N)$, яка задовольняє рівняння (1) та умову (2).

Зауваження 5. Із зауваження 4 випливає, що ми можемо розглядати функцію u як розподіл на $(0,T)$ зі значеннями в V^* і тому похідну від u розумітимемо в сенсі простору $D^*((0,T); V^*)$.

Рівняння (1) розглядається в просторі $D^*((0,T); V^*)$. Тобто (1) означає, що $\int\limits_0^T \langle u_t(t) + A(t)u(t) + Bu(t) - F(t), v\rangle \varphi dt = 0$ для усіх $v \in V$ і для усіх $\varphi \in D(0,T)$.

Зауваження 6. Ми можемо трактувати (1) як рівність функціоналів у просторі $[U(Q)]^*$, де під похідною u_t будемо розуміти функціонал

$$\langle\langle u_t, w\rangle\rangle = \int\limits_0^T \langle u_t(t), w(t)\rangle dt, \text{ для усіх } w \in U(Q).$$

Теорема. *Нехай виконуються умови (A) - (U) і разом з тим функції* a_{ij}, g_j $(i = \overline{1,n}, j = \overline{1,N})$ *та коефіцієнти матриці* C *належать простору* $C([0,T]; L^\infty(\Omega))$.

Тоді існує єдиний розв'язок u *задачі (1), (2).*

Доведення. Використаємо метод Фаедо-Гальоркіна.

1) (Побудова гальоркінських наближень). Нехай $\{w^1, \dots, w^m, \dots\}$ – база простору V, $u^m(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_{km}(t) w^k(x)$, $(x,t) \in Q$, де $\varphi_{1m}(t), \dots, \varphi_{mm}(t)$ шукаємо як розв'язки задач

$$\left\langle \frac{\partial u^m}{\partial t}(t), w^\mu \right\rangle + \langle A(t) u^m(t), w^\mu \rangle + \langle B u^m(t), w^\mu \rangle =$$
$$= \int\limits_\Omega (F(x,t), w^\mu(x)) dx, \;\; 1 \leqslant \mu \leqslant m, \tag{3}$$
$$\varphi_{km}(0) = \varphi^0_{km}, \tag{4}$$

де φ^0_{km}, $k = 1, 2, \dots,$ – координати u_0 стосовно бази $\{w^\mu\}_{\mu=1}^\infty$ в $[L^2(\Omega)]^N$: $u^m(0) \equiv \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi^0_{km} w^k \to u_0$ в V при $m \to \infty$. Запишемо (3) у вигляді

$$\sum_{k=1}^m \varphi'_{km}(t)(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)} + \int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n a_{ij}(x,t) \Big| \sum_{k=1}^m \varphi_{km}(t) w^k_{j,x_i}(x) \Big|^{p(x)-2} \times$$
$$\times \sum_{k=1}^m \varphi_{km}(t) w^k_{j,x_i}(x) w^\mu_{j,x_i}(x) + \sum_{r,j=1}^N c_{rj}(x,t) \sum_{k=1}^m \varphi_{km}(t) w^k_j(x) w^\mu_r(x) +$$
$$+ \sum_{j=1}^N g_j(x,t) \Big| \sum_{k=1}^m \varphi_{km}(t) w^k_j(x) \Big|^{q(x)-2} \sum_{k=1}^m \varphi_{km}(t) w^k_j(x) w^\mu_j(x) \Bigg] dx +$$
$$+ \langle B \Big(\sum_{k=1}^m \varphi_{km}(t) w^k \Big), w^\mu \rangle = \int\limits_\Omega (F(x,t), w^\mu(x)) dx, \;\; 1 \leqslant \mu \leqslant m. \tag{5}$$

Нехай $\overline{\varphi}(t) = \mathrm{colon}(\varphi_{1m}(t), \dots, \varphi_{mm}(t))$. Тоді (5) перепишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^m \varphi'_{km}(t)(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)} = G_\mu(t, \overline{\varphi}(t)), \;\; \mu = \overline{1, m}. \tag{6}$$

З лінійної незалежності системи $\{w^\mu\}_{\mu=1}^\infty$ в V маємо, що матриця $[(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)}]$ невироджена ($\det[(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)}] \neq 0$). Тому система (6) може бути записана у вигляді

$$\overline{\varphi}'(t) = [(w^k, w^\mu)_{L^2(\Omega)}]^{-1} \overline{G}(t, \overline{\varphi}(t))). \tag{7}$$

Функція $\overline{G}(t, \overline{y}) = \mathrm{colon}(G_1(t, \overline{y}), \dots, G_m(t, \overline{y}))$, $t \in [0, T]$, $\overline{y} \in R^m$, є неперервною за $\overline{y}$ для майже усіх $t \in (0, T)$ і (з теореми Фубіні) вимірна за t при кожному фіксованому $\overline{y}$. Крім того, для кожного $l > 0$

$$|\overline{G}(t, \overline{y})| \leqslant m(t), \;\; \text{де} \;\; m \in L^1(0,T) \;\; \text{для усіх} \;\; \overline{y} : |\overline{y}| \leqslant l.$$

Тому з теореми Каратеодорі на деякому інтервалі $[0, t_0]$ існує абсолютно неперервна функція, яка є розв'язком задачі (7), (4). З апріорних оцінок, одержаних нижче, випливатиме, що цей розв'язок можна продовжити на весь відрізок $[0, T]$.

2) (Апріорні оцінки). Помножимо (3) на $\varphi_{\mu m}$ і підсумуємо за μ. Одержимо

$$\left\langle \frac{du^m}{dt}(t), u^m(t) \right\rangle + \int\limits_\Omega \Bigg[\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n a_{ij}(x,t) |u^m_{j,x_i}(x,t)|^{p(x)} + (C(x,t) u^m(x,t), u^m(x,t)) +$$

$$+\sum_{j=1}^{N} g_j(x,t)|u_j^m(x,t)|^{q(x)}\Big] dx + \langle Bu^m(t), u^m(t)\rangle = \int_\Omega (F(x,t), u^m(x,t))dx.$$

Тому зінтегрувавши цю рівність за t відрізком $[0,\tau]$ $(0 < \tau \leqslant t_0)$ й оцінивши доданки на підставі умов теореми, матимемо нерівність

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u^m(x,\tau)|^2 dx + \int_{Q_{0,\tau}} \Big[a_0 \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} |u_{j,x_i}^m(x,t)|^{p(x)} + c_0 \sum_{j=1}^{N} |u_j^m(x,t)|^2 +$$

$$+(g_0 - \varkappa)\sum_{j=1}^{N} |u_j^m(x,t)|^{q(x)}\Big] dx\, dt + \int_0^\tau \langle Bu^m(t), u^m(t)\rangle dt \leqslant C_0 M_0, \tag{8}$$

де $M_0 = \int\limits_Q \sum\limits_{j=1}^{N} |F_j(x,t)|^{q'(x)} dxdt + \int\limits_\Omega |u_0(x)|^2 dx$, $0 < \varkappa < g_0$, C_0 – стала, яка не залежить від m. Позначимо $y(\tau) = \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u(x,t)|^2 dxdt$. Тоді з (8) $\left(e^{2c_0 t} y(\tau)\right)' \leqslant 2C_0 M_0 e^{2c_0 \tau}$. Тому $y(\tau) \leqslant C_2$ і з (8) та з зауваження 1 одержимо оцінки

$$\int_\Omega |u^m(x,\tau)|^2\, dx \leqslant C_2,$$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} ||u_{j,x_i}^m; L^{p(x)}(Q_{0,\tau})|| + \sum_{j=1}^{N} ||u_j^m; L^2(Q_{0,\tau})|| + \sum_{j=1}^{N} ||u_j^m; L^{q(x)}(Q_{0,\tau})|| \leqslant C_2,$$

$$\int_0^\tau \langle Bu^m(t), u^m(t)\rangle\, dt \leqslant C_2,\ \ \tau \in (0, t_0), \tag{9}$$

де стала C_2 не залежить від m.

З оцінки (9_1) випливає, що розв'язок задачі (7), (4) можна продовжити на весь інтервал $[0,T]$ і що оцінки (9) можна отримати для $t_0 = T$.

Нехай $A_1 = \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Покажемо обмеженість норм $||A_1 u^m; [U(Q)]^*||$. Для довільного $v \in U(Q)$, використовуючи узагальнену нерівність Гельдера ([6, с. 594]), одержимо

$$|\langle\langle A_1 u^m, v\rangle\rangle| = |\int_Q \Big[\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x,t)|u_{j,x_i}^m(x,t)|^{p(x)-2} u_{j,x_i}^m(x,t) v_{j,x_i}(x,t) +$$

$$+(C(x,t)u^m(x,t), v(x,t)) + \sum_{j=1}^{N} g_j |u_j^m(x,t)|^{q(x)-2} u_j^m(x,t) v_j(x,t)\Big] dxdt +$$

$$+\langle\langle \mathcal{B}u^m, v\rangle\rangle| \leqslant C_3 \Big(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} ||\, |u_{j,x_i}^m|^{p(x)-1}; L^{p'(x)}(Q)|| \cdot ||v_{j,x_i}; L^{p(x)}(Q)|| +$$

$$+\sum_{j=1}^{N} ||u_j^m; L^2(Q)|| \cdot ||v_j; L^2(Q)|| + \sum_{j=1}^{N} ||\, |u_j^m|^{q(x)-1}; L^{q'(x)}(Q)|| \cdot ||v_j; L^{q(x)}(Q)|| +$$

$$+||\mathcal{B}u^m;[U(Q)]^*||\cdot||v;U(Q)||\Big),$$

де C_3 – стала не залежить від m. Оператор $\mathcal{B}$ є обмеженим. Тому з (9_2) випливає, що $||\mathcal{B}u^m;[U(Q)]^*||\leqslant||\mathcal{B}||\cdot||u^m;U(Q)||\leqslant C_4$ і $|\langle\langle A_1u^m,v\rangle\rangle|\leqslant C_5||v;U(Q)||$; сталі C_4, C_5 не залежать від m. Отже,

$$||A_1u^m;[U(Q)]^*||\leqslant C_5. \tag{10}$$

3) (Граничний перехід). Покажемо, що послідовність $\{u^m\}$ одностайно неперервна на [0,T]. Для цього достатньо виконати цю властивість на відрізках $[0,T_2]$ і $[T_1,T]$, де $0\leqslant T_1\leqslant T_2\leqslant T$. Зауважимо, що $u^m(0)\to u_0$ в V при $m\to\infty$. Тому існує стала $C_6>0$

$$||u^m(0);V||\leqslant C_6 \text{ для усіх } m. \tag{11}$$

Нехай $0\leqslant T_1<T_2\leqslant T$, $\delta\in(0,T-T_2)$. Домножимо (3) на $(\varphi_{\mu m}(0)-\varphi_{\mu m}(t))$, підсумуємо за μ від 1 до m та зінтегруємо за t від 0 до δ:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|u^m(x,\delta)-u^m(x,0)|^2\,dx=\int\limits_0^\delta\langle Bu^m(t),u^m(0)-u^m(t)\rangle\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_{0,\delta}}\Bigg[\sum_{j=1}^N\sum_{i=1}^n a_{ij}(x,t)|u^m_{j,x_i}(x,t)|^{p(x)-2}u^m_{j,x_i}(x,t)(u^m_{j,x_i}(x,0)-u^m_{j,x_i}(x,t))+$$

$$+(C(x,t)u^m(x,t),u^m(x,0)-u^m(x,t))+\sum_{j=1}^N g_j(x,t)|u^m_j(x,t)|^{q(x)-2}u^m_j(x,t)\times$$

$$\times(u^m_j(x,0)-u^m_j(x,t))-(F(x,t),u^m(x,0)-u^m(x,t))\Bigg]dxdt.$$

Розглянемо доданок

$$\int\limits_{Q_{0,\delta}}a_{ij}(x,t)|u^m_{j,x_i}(x,t)|^{p(x)-2}u^m_{j,x_i}(x,t)(u^m_{j,x_i}(x,0)-u^m_{j,x_i}(x,t))dxdt=$$

$$=\int\limits_{Q_{0,\delta}}a_{ij}(x,t)|u^m_{j,x_i}(x,0)|^{p(x)-2}u^m_{j,x_i}(x,0)(u^m_{j,x_i}(x,0)-u^m_{j,x_i}(x,t))dxdt-$$

$$-\int\limits_{Q_{0,\delta}}a_{ij}(x,t)(|u^m_{j,x_i}(x,0)|^{p(x)-2}u^m_{j,x_i}(x,0)-|u^m_{j,x_i}(x,t)|^{p(x)-2}u^m_{j,x_i}(x,t))\times$$

$$\times(u^m_{j,x_i}(x,0)-u^m_{j,x_i}(x,t))dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{Q_{0,\delta}}a_{ij}(x,t)|u^m_{j,x_i}(x,0)|^{p(x)-2}u^m_{j,x_i}(x,0)(u^m_{j,x_i}(x,0)-u^m_{j,x_i}(x,t))dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_7\int\limits_{Q_{0,\delta}}|u^m_{j,x_i}(x,0)|^{p(x)-1}|u^m_{j,x_i}(x,0)-u^m_{j,x_i}(x,t)|dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_8\delta+C_7\int\limits_{Q_{0,\delta}}|u^m_{j,x_i}(x,0)|^{p(x)-1}|u^m_{j,x_i}(x,t)|dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_9\left(\delta+\int\limits_0^\delta \|\,|u^m_{j,x_i}(0)|^{p(x)-1};L^{p'(x)}(\Omega)\|\cdot\|u^m_{j,x_i}(t);L^{p(x)}(\Omega)\|dt\right)\leqslant$$

$$\leqslant C_9\left(\delta+\delta^{\frac{p_1-1}{p_1}}\|\,|u^m_{j,x_i}(0)|^{p(x)-1};L^{p'(x)}(\Omega)\|\cdot\|u^m_{j,x_i};L^{p_1}((0,T);L^{p(x)}(\Omega))\|dt\right),$$

$i=\overline{1,n}, j=\overline{1,N}$. З (8) випливає, що

$$\rho_{p'}(|u^m_{j,x_i}(T_1)|^{p(x)-1})=\int\limits_\Omega |u^m_{j,x_i}(x,T_1)|^{p(x)}dx\leqslant C_{10},$$

де стала C_{10} не залежить від m. Тому (див. зауваження 1)

$$\|\,|u^m_{j,x_i}(T_1)|^{p(x)-1};L^{p'(x)}(\Omega)\|\leqslant \max\{1,C_{10}\}.$$

Оскільки $L^{p(x)}(Q)\hookrightarrow L^{p_1}((0,T);L^{p(x)}(\Omega))$ і множина $\{u^m_{j,x_i}\}_{k=1}^\infty$ обмежена в просторі $L^{p(x)}(Q)$, то ця множина обмежена і в $L^{p_1}((0,T);L^{p(x)}(\Omega))$. Отже, $\|u^m_{j,x_i};L^{p_1}((0,T);L^{p(x)}(\Omega))\|\leqslant C_{11}$, де стала C_{11} не залежить від m. Тому для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta_0>0$ таке, що для довільного $\delta\in(0,\delta_0)$ і довільних m

$$\int\limits_{Q_{0,\delta}} a_{ij}(x,t)|u^m_{j,x_i}(x,t)|^{p(x)-2}u^m_{j,x_i}(x,t)(u^m_{j,x_i}(x,0)-u^m_{j,x_i}(x,t))dxdt<\varepsilon$$

для $i=\overline{1,n}, j=\overline{1,N}$. Аналогічні оцінки зробимо для доданків, що містять C та g_j, $(j=\overline{1,N})$, а за рахунок обмеженості і монотонності оператора B і для доданка, що містить оператор B. Крім того, для досить малих δ

$$\int\limits_{Q_{0,\delta}}(F(x,t),u^m(x,0)-u^m(x,t))dxdt\leqslant C_{12}\|F;L^{q'(x)}(Q_{0,\delta})\|\times$$

$$\times\|u^m(0)-u^m;L^{q(x)}(Q_{0,\delta})\|\leqslant C_{13}\|F;L^{q'(x)}(Q_{0,\delta})\|<\varepsilon,$$

бо інтеграл множиною малої міри є малим. Отже, для $\varepsilon>0$ існує $\delta_1>0$ не залежне від m таке, що для довільного $\delta\in(0,\delta_1)$

$$\int\limits_\Omega |u^m(x,\delta)-u^m(x,0)|^2\,dx<\varepsilon. \tag{12}$$

З (3) та монотонності B для $t\in[0,T_2]$ $(\delta\in(0,T-T_2))$, легко одержуємо оцінку

$$\int\limits_\Omega |u^m(x,t+\delta)-u^m(x,t)|^2\,dx\leqslant\int\limits_\Omega|u^m(x,\delta)-u^m(x,0)|^2\,dx+$$

$$+2\int\limits_{Q_{0,t}}(F(x,\tau+\delta)-F(x,\tau),u^m(x,\tau+\delta)-u^m(x,\tau))dxd\tau-$$

$$-2\int\limits_0^t\langle A(\tau+\delta)u^m(\tau+\delta)-A(\tau)u^m(\tau),u^m(\tau+\delta)-u^m(\tau)\rangle\,d\tau. \tag{13}$$

Перший доданок в (13) оцінюємо за допомогою (12). До другого доданка застосуємо оцінку Гельдера. Функція F неперервна в середньому. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_2 \in (0, T - T_2)$ таке, що для довільного $\delta \in (0, \delta_2)$

$$\int_{Q_{0,T_2}} |F(x, t+\delta) - F(x,t)|^{q'(x)} dx dt < \varepsilon.$$

Третій доданок зобразимо у вигляді

$$-2 \int_{T_1}^{t} \langle A(\tau+\delta) u^m(\tau+\delta) - A(\tau) u^m(\tau), u^m(\tau+\delta) - u^m(\tau) \rangle \, d\tau =$$

$$= -2 \int_{T_1}^{t} \langle A(\tau+\delta) u^m(\tau+\delta) - A(\tau+\delta) u^m(\tau), u^m(\tau+\delta) - u^m(\tau) \rangle \, d\tau -$$

$$-2 \int_{T_1}^{t} \langle (A(\tau+\delta) - A(\tau)) u^m(\tau), u^m(\tau+\delta) - u^m(\tau) \rangle \, d\tau$$

Перший доданок оцінимо за допомогою оцінки

$$\langle A(t)v_1 - A(t)v_2, v_1 - v_2 \rangle \geqslant c_0 \int_\Omega |v_1 - v_2|^2 dx, \quad v_1, v_2 \in V, \ t \in [0, T]. \tag{14}$$

Функції $a_{ij} \in C([0,T]; L^\infty(\Omega))$ $(i = \overline{1,n}, j = \overline{1,N})$. Тому існує $\delta_3 \in (0, T - T_2)$ таке, що для довільного $\delta \in (0, \delta_3)$: $||a_{ij}(\tau+\delta) - a_{ij}(\tau); L^\infty(\Omega)|| < \varepsilon$ для усіх $\tau \in [0, T_2]$. Аналогічні оцінки одержуємо для функцій g_j $(j = \overline{1,N})$ та елементів матриці C. Тому

$$|-2 \int_{0}^{t} \langle (A(\tau+\delta) - A(\tau)) u^m(\tau), u^m(\tau+\delta) - u^m(\tau) \rangle \, d\tau| =$$

$$= 2| \int_{Q_{0,t}} \Big[\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}(\tau+\delta) - a_{ij}(\tau)) |u^m_{j,x_i}(\tau)|^{p(x)-2} u^m_{j,x_i}(\tau) (u^m_{j,x_i}(\tau+\delta) - u^m_{j,x_i}(\tau)) +$$

$$+ ((C(\tau+\delta) - C(\tau)) u^m(\tau), u^m(\tau+\delta) - u^m(\tau)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} (g_j(\tau+\delta) - g_j(\tau)) |u^m_j(\tau)|^{q(x)-2} u^m_j(\tau) (u^m_j(\tau+\delta) - u^m_j(\tau)) \Big] dx dt| \leqslant C_{14}\varepsilon.$$

Тоді для досить малих $\delta > 0$ з (13) матимемо

$$\int_\Omega |u^m(x, t+\delta) - u^m(x,t)|^2 \, dx \leqslant C_{15} \Big(\varepsilon + \int_0^t \int_\Omega |u^m(x, \tau+\delta) - u^m(x,\tau)|^2 dx d\tau \Big)$$

Звідси, на підставі леми Гронуола [7, с. 191] випливає, що послідовність $\{u^m\}$ одностайно неперервна на відрізку $[0, T_2]$. Тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_4 \in (0, T - T_2)$ таке, що для довільного $\delta \in (0, \delta_4)$

$$\int_\Omega |u^m(x, t+\delta) - u^m(x,t)|^2 \, dx < \varepsilon, \text{ для усіх } t \in [0, T_2]. \tag{15}$$

Аналогічно як (13) для $t \in [T_1, T]$, $\delta \in (0, T_1)$ одержуємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega} |u^m(x,t) - u^m(x,t-\delta)|^2\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |u^m(x,T_1) - u^m(x,T_1-\delta)|^2\,dx +$$

$$+2\int\limits_{Q_{T_1,t}} (F(x,\tau) - F(x,\tau-\delta), u^m(x,\tau) - u^m(x,\tau-\delta))dxd\tau -$$

$$-2\int\limits_{T_1}^{t} \langle A(\tau)u^m(\tau) - A(\tau-\delta)u^m(\tau-\delta), u^m(\tau) - u^m(\tau-\delta)\rangle\,d\tau.$$

З (15) випливає, що перший доданок у цій нерівності менший за ε при $\delta \in (0, \delta_4)$. Решту доданків оцінимо аналогічно як у випадку одержання (15). Отже, $\{u^m\}$ – одностайно неперервна на відрізку $[0, T]$. Тому з цієї послідовності можна вибрати підпослідовність збіжну в $C([T_1, T]; [L^2(\Omega)]^N)$. З цієї послідовності на підставі оцінок (9), (10) можна виділити таку підпослідовність $\{u^{m_k}\} \subset \{u^m\}$, що

$$u^{m_k} \to u \quad * - \text{слабко в } L^\infty((0,T); [L^2(\Omega)]^N),$$
$$A_1 u^{m_k} \to \chi \quad \text{слабко в } [U(Q)]^*$$

при $k \to \infty$. Крім того,

$$u^{m_k}(t) \to u(t) \quad \text{сильно в } [L^2(\Omega)]^N \text{ рівномірно за } t \in [0, T]$$

при $k \to \infty$. Тому $u(0) = u_0$. Оскільки функції u^{m_k} – неперервні, то $u \in C([0,T]; [L^2(\Omega)]^N)$.

Домножимо (3) на функцію $\varphi \in C^1([0, T])$, зінтегруємо за t від 0 до T і перший доданок одержаної рівності зінтегруємо частинами

$$-\int\limits_0^T \langle u^{m_k}(t), w^\mu\rangle\varphi' dt + \int\limits_0^T \langle (A(t) + B)u^{m_k}(t), w^\mu\rangle\varphi dt = \int\limits_Q (F(x,t), w^\mu(x))\varphi dxdt +$$

$$+\int\limits_{\Omega} (u^{m_k}(x,0), w^\mu(x))\varphi(0)dx - \int\limits_{\Omega} (u^{m_k}(x,T), w^\mu(x))\varphi(T)dx, \ \mu \in N.$$

Переходячи в цій рівності до границі при $m \to +\infty$, матимемо

$$-\int\limits_0^T \langle u(t), w^\mu\rangle\varphi' dt + \int\limits_0^T \langle \chi(t), w^\mu\rangle\varphi dt = \int\limits_Q (F(x,t), w^\mu(x))\varphi dxdt +$$

$$+\int\limits_{\Omega} (u_0(x), w^\mu(x))\varphi(0)dx - \int\limits_{\Omega} (u(x,T), w^\mu(x))\varphi(T)dx.$$

Оскільки $\{w^\mu\}_{\mu=1}^\infty$ база в V, то

$$-\int\limits_0^T \langle u(t), v\rangle\varphi' dt + \int\limits_0^T \langle \chi(t), v\rangle\varphi dt = \int\limits_Q (F(x,t), v(x))\varphi dxdt +$$

$$+\int_\Omega (u_0(x), v(x))\varphi(0)dx - \int_\Omega (u(x,T), v(x))\varphi(T)dx \tag{16}$$

для усіх $v \in V$. Звідси, якщо φ фінітна на $(0,T)$, то

$$\langle u_t(t), v\rangle + \langle \chi(t), v\rangle = \langle F(t), v\rangle \text{ для усіх } v \in V \text{ для майже усіх } t \in (0,T).$$

Тому $u_t + \chi = \mathcal{F}$ і $u_t \in [U(Q)]^*$.

Згідно з [1, с. 384] оператор B є монотонним, обмеженим і семінеперервним. Можна показати, що для оператора A теж виконуються ці властивості. Тому аналогічно як в [5, с. 650] показуємо, що $\chi = A_1 u$.

Існування доведено.

4) (Єдиність). Нехай u_1, u_2 розв'язки задачі (1), (2). Позначимо $u = u_1 - u_2$. Тоді з (1) та монотонності оператора B одержимо

$$\langle\langle u_t, u\rangle\rangle + \langle\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle\rangle = 0.$$

Зінтегрувавши перший доданок частинами на підставі оцінки (14), матимемо

$$\int_\Omega |u(x,t)|^2 dx + c_0 \int_{Q_{0,t}} |u(x,t)|^2 dxdt \leqslant 0, \ \ t \in (0,T].$$

Зробивши перетворення такі, як при виведенні оцінок (9) одержимо, що $u(x,t) = 0$ майже скрізь в Q.

Зауваження 7. Ми розглянули досить загальний вигляд рівняння (1). Проте це зумовлено лише нашим бажанням, а не методом доведення. Наголосимо на деяких моментах поданого доведення. Принциповим є щільність вкладення $V \subset [L^2(\Omega)]^N$. Досягти цього вдалося завдяки специфічному вибору простору V, який відповідно був зумовлений виглядом рівняння (1). Якщо ми розглянемо задачу (1), (2), де в операторі $\mathcal{A}$ візьмемо $C \equiv 0$, $g_j \equiv 0\, (j = \overline{1,N})$ і в рівнянні (1) $\mathcal{B} \equiv 0$, $\mathcal{F} \in [L^2(\Omega)]^N$, то вибравши $V = X \cap [L^2(\Omega)]^N$ ми і тут одержимо щільне вкладення $V \subset [L^2(\Omega)]^N$. Доведення теореми підходить майже дослівно для цього випадку, якщо ми позначимо

$$U(Q) = \left\{u \mid u \in [L^2(Q)]^N,\ u_{x_i} \in [L^{p(x)}(Q)]^N,\ i = \overline{1,n}, u(t) \in V, t \in [0,T]\right\}$$

Відмінність полягатиме лише в іншому способі одержання оцінок (9).

---

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
2. *Калашников А.С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи матем. наук. – 1987. – Т.42. – Вып. 2 – С. 135-176.
3. *Шишков А.Е.* Об оценках скорости распространения возмущений в квазилинейных дивергентных вырождающихся параболических уравнений высокого порядка // Укр. мат. журн. – 1992. – Т.44. –N 10. – С.1451-1456.
4. *Бокало М.М., Сікорський В.М.* Про властивості розв'язків задачі без початкових умов для рівнянь, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації // Вісн. Львів. ун-ту. – 1998. – Вип. 51 – С. 85-98.

5. *Самохин В.Н.* Об одном классе уравнений обобщающих уравнения политропной фильтрации// Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т.32. – N 5 – С. 643-651.

6. *Kovacik O., Rakosnic Z., Rakosnic J.* On space $L^{p(x)}, W^{1,p(x)}$// Czechsl. Math. J. – 1991. – Vol.41. – N 4. – P.592–618.

7. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

O. Buhrii, S. Lavrenyuk

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION OF POLITROPIC FILTRATION TYPE

Initial-boundary value problem for the parabolic equation of politropic filtration type is studied. There are obtained the existence and uniqueness conditions of the solution of this problem.

Стаття надійшла до редколегії 02.07.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.44-47

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.44-47

УДК 517.535

Ярослав Васильків

ЗРОСТАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ СЕРЕДНІХ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Для вивчення властивостей аргументів аналітичних в одиничному крузі функцій з нулями в точках $\{a_\nu = |a_\nu|e^{i\alpha_\nu},\ \nu \in \mathbb{N}\}$, $a_\nu \neq 0$, $|a_\nu| < 1$, у праці [1] (див. також [2]) введена функція

$$p\left(re^{i\theta}\right) = \int_0^r \sum_{|a_\nu|\leqslant t} \mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta-\alpha_\nu)}\right) t^{-1} dt, \quad 0 < r < 1, \quad \theta \in [0, 2\pi], \tag{1}$$

яка ефективно описує розподіл послідовності $\{a_\nu\}$ за модулями та аргументами, де

$$\mathcal{P}(r, w) = \operatorname{Re}\frac{r+w}{r-w}, \quad |w| < r,$$

– ядро Пуассона.

Нехай $\mathcal{Z} = \{a_\nu = |a_\nu|e^{i\alpha_\nu},\ a_\nu \neq 0,\ \nu \in \mathbb{N}\}$ довільна послідовність комплексних чисел з єдиною точкою скупчення на нескінченності.

Означення. *Функцію* $p\left(re^{i\theta}\right)$, $0 < r < +\infty$, $\theta \in [0, 2\pi]$, *задану співвідношенням (1), назвемо функцією розподілу послідовності* $\mathcal{Z}$.

Позначимо

$$n(r, \mathcal{Z}) = \sum_{|a_\nu|\leqslant r} 1, \quad N(r, \mathcal{Z}) = \int_0^r n(t, \mathcal{Z}) t^{-1} dt,$$

$$m_q(r, p) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p^q\left(re^{i\theta}\right) d\theta\right\}^{1/q}, \ 0 < r < +\infty,\ 1 \leqslant q < +\infty,$$

а також $1/q + 1/q' = 1$. Зауважимо, що $m_1(r, p) = N(r, \mathcal{Z})$.

У праці [2] (див. доведення теореми 1) для функції $p(z)$, $r = |z| < 1$, доведено такий результат, який залишається в силі для $r = |z| < +\infty$ і який сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. *Нехай* $\mathcal{Z}$ *довільна послідовність комплексних чисел . Тоді для довільного* $1 \leqslant q < +\infty$

$$m_q(r, p) \leqslant \int_0^r \left(\frac{r+t}{r-t}\right)^{1/q'} \frac{n(t, \mathcal{Z})}{t} dt, \quad 0 < r < +\infty. \tag{2}$$

Нехай

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \rho[\mathcal{Z}] \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\log n(r, \mathcal{Z})}{\log r}.$$

Через $B(x, y)$, $x, y > 0$, позначимо бета–функцію Ейлера.

Наслідок 1. *Нехай $\mathcal{Z}$ послідовність комплексних чисел така, що $0 < \rho < +\infty$. Тоді для довільного $1 \leqslant q < +\infty$*

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{m_q(r,p)}{n(r,\mathcal{Z})} \leqslant 2^{1/q'} B(\rho, 1/q).$$

Використовуючи міркування, подібні до запропонованих у [2], також доведемо такий результат.

Теорема 2. *Нехай $\mathcal{Z}$ послідовність комплексних чисел , що зосереджена на скінченній системі k променів. Тоді для довільного $1 < q < +\infty$*

$$m_q(r,p) \geqslant \frac{r^{1/q'}}{2k} \int_0^r \frac{n(t,\mathcal{Z})}{(r-t)^{1/q'}} \frac{dt}{t}. \tag{3}$$

Наслідок 2. *Нехай $\mathcal{Z}$ послідовність комплексних чисел, що зосереджена на скінченній системі k променів така, що $0 < \rho < +\infty$. Тоді для довільного $1 < q < +\infty$*

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{m_q(r,p)}{n(r,\mathcal{Z})} \geqslant \frac{1}{2k} B(\rho, 1/q). \tag{4}$$

Якщо ж, окрім того, $n(r,\mathcal{Z}) \sim r^\rho$, $r \to +\infty$, то

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{m_q(r,p)}{n(r,\mathcal{Z})} \geqslant \frac{1}{2k} B(\rho, 1/q). \tag{5}$$

Нагадаємо (див. [3]), що послідовність $\{r_n\}$, $r_n \to +\infty$, називається послідовністю піків Пойя порядку $0 < \rho < +\infty$ для $n(r,\mathcal{Z})$, якщо

$$n(r,\mathcal{Z}) \leqslant \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho - \varepsilon_n} n(r_n, \mathcal{Z}), \quad 1 \leqslant r \leqslant r_n, \tag{6}$$

для деякої послідовності $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0+$, $n \to +\infty$.

Доведення наслідку 1. З огляду на співвідношення (2) та (6), для послідовності піків Пойя $\{r_n\}$ порядку $0 < \rho < +\infty$ для $n(r,\mathcal{Z})$ одержуємо

$$m_q(r_n,p) \leqslant n(r_n,\mathcal{Z}) \int_0^{r_n} \left(\frac{r_n+t}{r_n-t}\right)^{1/q'} \left(\frac{t}{r_n}\right)^{\rho-\varepsilon_n} \frac{dt}{t} = n(r_n,\mathcal{Z}) \int_0^1 \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{1/q'} \times$$
$$\times y^{\rho-1-\varepsilon_n} dy \leqslant 2^{1/q'} n(r_n,\mathcal{Z}) B(\rho-\varepsilon_n, 1/q), \quad 1/q + 1/q' = 1, \quad 1 \leqslant q < +\infty,$$

що імплікує

$$\varliminf_{r \to +\infty} \frac{m_q(r,p)}{n(r,\mathcal{Z})} \leqslant \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{m_q(r_n,p)}{n(r_n,\mathcal{Z})} \leqslant 2^{1/q'} B(\rho, 1/q).$$

Доведення теореми 2. Нехай послідовність $\mathcal{Z}$ зосереджена на скінченній системі k променів: $\{te^{i\varphi_j}\}_{j=1}^k$, $0 \leqslant \varphi_1 < \cdots < \varphi_k < 2\pi$, $0 < t \leqslant r < +\infty$; $n_j(r)$ – кількість точок послідовності $\mathcal{Z}$ (з урахуванням їхньої кратності) на промені $\{te^{i\varphi_j}\}$, $0 < t \leqslant\leqslant r < +\infty$. Очевидно, що $\sum_{j=1}^k n_j(r) = n(r,\mathcal{Z})$. У цьому випадку функція $p(z)$ (див. співвідношення (1)) набуде вигляду

$$p\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{j=1}^k \int_0^r \frac{n_j(t)}{t} \mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta-\varphi_j)}\right) dt.$$

Для довільного $1 < q < +\infty$ приймемо

$$g\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2kr}\sum_{j=1}^{k}\int_0^r \left|\frac{r+\rho e^{i(\theta-\varphi_j)}}{r-\rho e^{i(\theta-\varphi_j)}}\right|^{1/q'} d\rho.$$

Враховуючи інтегральну нерівність Мінковського [4, с. 24] та нерівності

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{r+\rho e^{ix}}{r-\rho e^{ix}}\right| dx \leqslant 1+\frac{2}{\pi}\log\frac{r+\rho}{r-\rho},$$

$$\int_0^r \log\frac{r+\rho}{r-\rho}d\rho = 2\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2m+1}\int_0^r\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2m+1}d\rho = r\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)(m+1)} \leqslant$$

$$\leqslant r\left(1+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m(m+1)}\right) \leqslant \frac{3}{2}r,$$

знаходимо

$$m_{q'}(r,g) \leqslant \frac{1}{2kr}\sum_{j=1}^{k}\int_0^r d\rho\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{r+\rho e^{i(\theta-\varphi_j)}}{r-\rho e^{i(\theta-\varphi_j)}}\right| d\theta\right\}^{1/q'} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2r}\int_0^r\left(1+\frac{2}{\pi}\log\frac{r+\rho}{r-\rho}\right)^{1/q'} d\rho \leqslant \frac{1}{2r}\left(r+\frac{3}{\pi}r\right) < 1.$$

Тоді, застосовуючи нерівність Гельдера, для всіх $1 < q < +\infty$, $0 < r < +\infty$, одержуємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\left(re^{i\theta}\right) g\left(re^{i\theta}\right)\, d\theta \leqslant m_q(r,p)m_{q'}(r,g) \leqslant m_q(r,p). \tag{7}$$

Але функція $|F(z)|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $F(z) = (1+z)(1-z)^{-1}$ субгармонійна в крузі $\{|z| < 1\}$. Тому [4, с. 72]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|F\left(\frac{\rho}{r}e^{ix}\right)\right|^\alpha \mathcal{P}\left(\frac{\rho}{r},\frac{\rho t}{r^2}e^{ix}\right) dx \geqslant \left|F\left(\frac{\rho t}{r^2}\right)\right|^\alpha = \left(\frac{r^2+\rho t}{r^2-\rho t}\right)^\alpha,\quad 0 < t,\rho < r.$$

З урахуванням цього факту, нерівність (7) набуде вигляду

$$m_q(r,p) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\left(re^{i\theta}\right) g\left(re^{i\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2kr}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\int_0^r \frac{n_j(t)}{t}dt\int_0^r d\rho\frac{1}{2\pi}\times \tag{8}$$

$$\times\int_0^{2\pi}\left|\frac{r+\rho e^{i(\theta-\varphi_l)}}{r-\rho e^{i(\theta-\varphi_l)}}\right|^{1/q'}\mathcal{P}\left(r,te^{i(\theta-\varphi_j)}\right) d\theta \geqslant \frac{1}{2k}\int_0^r\frac{n(t,Z)}{t}\frac{dt}{r}\int_0^r\left(\frac{r^2+\rho t}{r^2-\rho t}\right)^{1/q'} d\rho.$$

Зауважимо, що

$$\frac{1}{r}\int_0^r\left(\frac{r^2+\rho t}{r^2-\rho t}\right)^{1/q'} d\rho = \int_0^1\left(\frac{r+xt}{r-xt}\right)^{1/q'} dx \geqslant r^{1/q'}\int_0^1\frac{dx}{(r-xt)^{1/q'}} =$$

$$= r^{1/q'}\frac{r^{1/q}}{t}q\frac{(1-t/r)^{1/q'}-1+t/r}{(1-t/r)^{1/q'}} \geqslant \frac{r^{1/q'}}{(r-t)^{1/q'}}.$$

Звідси та з (8) отримуємо (3).

Для доведення наслідку 2 використаємо таке поняття (див. [5]): послідовність $\{r_n\}$, $r_n \to +\infty$ називається послідовністю піків Пойя порядку $0 < \rho < +\infty$ другого роду для $n(r, \mathcal{Z})$, якщо нерівність

$$n(r,\mathcal{Z}) \geqslant \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho} (1-\varepsilon_n) n(r_n,\mathcal{Z}), \quad a_n^{-1} r_n \leqslant r \leqslant a_n r_n, \tag{9}$$

виконується для деяких $a_n \to +\infty$, $\varepsilon_n \to 0+$, $n \to +\infty$.

Доведення наслідку 2. З огляду на співвідношення (3) та (9), на послідовності піків Пойя $\{r_n\}$ другого роду для $n(r, \mathcal{Z})$ маємо

$$\frac{m_q(r_n,p)}{n(r_n,\mathcal{Z})} \geqslant \frac{1}{2kn(r_n,\mathcal{Z})} \int_{a_n^{-1} r_n}^{r_n} \frac{n(t,\mathcal{Z})}{(1-t/r_n)^{1/q'}} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{(1-\varepsilon_n)}{2k} \int_{a_n^{-1}}^{1} y^{\rho-1}(1-y)^{-1/q'} dy,$$

звідки негайно випливає (4).

Далі, якщо $n(r,\mathcal{Z}) \sim r^{\rho}$, $r \to +\infty$, то з (3) одержимо

$$\frac{m_q(r,p)}{n(r,\mathcal{Z})} \geqslant \frac{1}{2kn(r,\mathcal{Z})} \int_0^r \frac{n(t,\mathcal{Z})}{(1-t/r)^{1/q'}} \frac{dt}{t} \sim \frac{1}{2k} \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{\rho} \frac{dt}{t(1-t/r)^{1/q'}} =$$
$$= \frac{1}{2k} \int_0^1 x^{\rho-1}(1-x)^{-1/q'} dx = \frac{1}{2k} B(\rho, 1/q), \quad r \to +\infty,$$

що імплікує (5).

---

1. *Васильків Я.В., Кондратюк А.А.* Про обмеженість середніх квадратичних логарифмів добутків Бляшке// Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51. – N 2. – С. 255–259.
2. *Васильків Я.В., Кондратюк А.А.* Інтегральні середні логарифмів добутків Бляшке// Вісн. Львів. ун-ту. – 1999. – Вип. 53. – С. 52–61.
3. *Shea D.F., Wainger S.* Growth problems for a class of entire functions via singular integral estimates// Ill. J. Math. – 1981. – Vol. 25. – N 1. – P. 42–50.
4. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М., 1984.
5. *Drasin D., Shea D.F.* Polya peaks and the oscillation of positive functions// Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 24. – N 2. – P. 404–411.

Ya. Vasylkiv

GROWTH OF INTEGRAL MEANS OF DISTRIBUTION FUNCTIONS FOR SEQUENCES

A notion of distribution function for a sequence of complex number is introduced. Unimprovable estimates for growth of ratio of integral means of arbitrary order for such functions with respect to the counting function of points of a sequence are established.

Стаття надійшла до редколегії 15.07.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 56. С. 48–57

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 2000. Vol. 56. P. 48–57

УДК 517.927.25+512.928.5

Андрій Гайдис

ПРО СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНУ ЗАДАЧУ ШТУРМА–ЛІУВІЛЛЯ

Вступ. У праці вивчається асимптотика власних елементів сім'ї самоспряжених операторів з дискретним спектром, які сильно збігаються до оператора множення на функцію. Загалом граничний оператор має неперервний спектр, і тоді власні функції операторів збігаються до узагальнених власних функцій граничного оператора тільки в деякому умовному сенсі [1,2]. Ми ж вивчаємо ситуацію, коли цей оператор є оператором множення на кусково сталу функцію. Він має два власні значення, яким відповідають два нескінченновимірні власні підпростори. Досліджується механізм "заповнення" цих підпросторів власними функціями допограничних операторів. У розділі 2 методом примежевого шару будується асимптотика власних функцій, які відповідають неперервним за малим параметром власним значенням λ_k^ε. Доведено, що в границі такі власні функції утворюють базу лише одного з підпросторів. Основний результат праці міститься в розділах 3,4, де з використанням методу ВКБ розвинень доведено існування та побудована асимптотика збіжних послідовностей власних елементів вигляду $\lambda^\varepsilon_{k(\varepsilon)}$, $u^\varepsilon_{k(\varepsilon)}$, де $k(\varepsilon) \to \infty$. Границі таких послідовностей заповнюють другий інваріантний підпростір.

1. Постановка задачі та деякі властивості

Нехай (a,b) – інтервал в $\mathbb{R}$ і $c \in (a,b)$. Розглянемо задачу на власні значення

$$-\varepsilon^2 y_\varepsilon'' + (U(x) - \lambda_\varepsilon) y_\varepsilon = 0 \qquad x \in (a,b), \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(a) = y_\varepsilon(b) = 0, \tag{2}$$

де ε – малий додатний параметр, а потенціал U має вигляд

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \in (a,c) \\ q^2, & x \in (c,b) \end{cases}$$

для деякої сталої $q > 0$. Рівняння (1) не виконується в точці $x = c$, тому додамо умови спряження

$$[y_\varepsilon]_{x=c} = [y_\varepsilon']_{x=c} = 0, \tag{3}$$

де $[f]_{x=c} = f(c+0) - f(c-0)$ – стрибок функції f в точці $x = c$.

Зауважимо, що власні функції задачі (1)–(3) можна записати в явному вигляді, де власні значення є коренями деяких трансцендентних рівнянь. Однак це лише частково допомагає в дослідженні задачі.

Ми вивчатимемо асимптотичну поведінку власних значень λ_ε та власних функцій y_ε задачі (1)–(3) при $\varepsilon \to 0$.

У просторі Соболєва $H_0^1(a,b)$ введемо неперервну білінійну форму

$$a_\varepsilon(u,v) = \varepsilon^2 \int_a^b u'(x)v'(x)\,dx + q^2 \int_c^b u(x)v(x)\,dx$$

та норму $\|u\|_\varepsilon = a_\varepsilon(u,u)^{1/2}$. Тоді задачі (1)–(3) відповідає обмежений оператор $\mathrm{A}_\varepsilon : H_0^1(a,b) \to H_0^1(a,b)$, що породжений цією формою

$$a_\varepsilon(\mathrm{A}_\varepsilon\, u, v) = (u,v)_{L_2(a,b)}, \quad \text{для всіх } v \in H_0^1(a,b).$$

Цей оператор при кожному $\varepsilon > 0$ є компактним та самоспряженим щодо скалярного добутку $a_\varepsilon(\cdot,\cdot)$. Нехай $0 < \lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon < \cdots < \lambda_n^\varepsilon < \ldots$ – послідовність власних значень задачі (1)–(3), а $\{y_n^\varepsilon\}_{n=1}^\infty$ – система відповідних власних функцій.

Лема 1. *Для кожного натурального n власне значення λ_n^ε є неперервною функцією параметра $\varepsilon \in (0,1)$. Крім того, існує така стала C_n, що*

$$\lambda_n^\varepsilon \leqslant C_n \varepsilon^2.$$

Доведення. Неперервність власних значень одержуємо з варіаційного принципу Куранта та неперервності форми $a_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ за змінною ε. Нехай $\{\varphi_k \in H_0^1(a,b) | k = \overline{1,n}\}$ – деяка ортогональна в $L_2(a,b)$ система функцій така, що для всіх $k = \overline{1,n}$ виконується $\operatorname{supp}\varphi_k \subset (a,c)$ і система похідних $\{\varphi_k'\}$ також ортогональна в $L_2(a,b)$.

Позначимо через P_ε підпростір, породжений власними функціями $y_1^\varepsilon, \ldots, y_{n-1}^\varepsilon$ задачі (3)–(5), а через $P_\varepsilon^\perp$ – його ортогональне доповнення в $L_2(a,b)$. Тоді існує такий ненульовий вектор $(\alpha_1^\varepsilon, \ldots, \alpha_n^\varepsilon)$, що функція $v = \sum_{k=1}^n \alpha_k^\varepsilon \varphi_k$ належить $P_\varepsilon^\perp$. Тому

$$\lambda_n^\varepsilon = \inf_{u \in P_\varepsilon^\perp \cap H_0^1(a,b)} \frac{a_\varepsilon(u,u)}{\|u\|^2_{L_2(a,c)}} \leqslant \frac{a_\varepsilon(v,v)}{\|v\|^2_{L_2(a,b)}} =$$

$$= \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n \frac{(\alpha_k^\varepsilon)^2 \|\varphi_k'\|^2_{L_2(a,c)}}{\sum\limits_{i=1}^n (\alpha_i^\varepsilon)^2 \|\varphi_i\|^2_{L_2(a,c)}} \leqslant \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n \frac{\|\varphi_k'\|^2_{L_2(a,c)}}{\|\varphi_k\|^2_{L_2(a,c)}} = C_n \varepsilon^2.$$

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай власна функція y_n^ε є нормованою в $H_0^1(a,b)$, тоді її звуження на інтервал (c,b) справджує оцінку*

$$\|y_n^\varepsilon\|_{L_2(c,b)} \leqslant C\varepsilon.$$

Доведення. Для функції y_n^ε правильна тотожність

$$\varepsilon^2 \int_a^b y^{\varepsilon\,\prime} \varphi'\,dx + q^2 \int_c^b y^\varepsilon \varphi\,dx = \lambda_\varepsilon \int_a^b y^\varepsilon \varphi\,dx, \qquad \varphi \in H_0^1(a,b). \tag{4}$$

Тоді
$$q^2\|y_n^\varepsilon\|^2_{L_2(c,b)} = \lambda_n^\varepsilon\|y_n^\varepsilon\|^2_{L_2(a,b)} - \varepsilon^2\|y_n^{\varepsilon\prime}\|^2_{L_2(a,b)}, \tag{5}$$
і залишається скористатися лемою 1. Лему доведено.

2. Асимптотика власних значень при фіксованому номері

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Введемо позначення $\lambda_\varepsilon = \lambda_n^\varepsilon$ і $y_\varepsilon = y_n^\varepsilon$. Асимптотичні розвинення власних значень шукатимемо у вигляді
$$\lambda_\varepsilon \sim \varepsilon^2(\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots + \varepsilon^n\lambda_n + \dots), \tag{6}$$
а власних функцій – у вигляді регулярного ряду на інтервалі (a, c)
$$y_\varepsilon(x) \sim v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \dots + \varepsilon^n v_n(x) + \dots, \qquad x \in (a, c), \tag{7}$$
і методом примежевого шару на інтервалі (c, b)
$$y_\varepsilon(x) \sim e^{-\varepsilon^{-1}q(x-c)}(\varepsilon w_1(x) + \varepsilon^2 w_2(x) + \dots + \varepsilon^n w_n(x) + \dots), \quad x \in (c, b). \tag{8}$$

Підставимо розвинення (6)–(8) у задачу (1)–(3). Зокрема, одержимо
$$v_0'' + \lambda_0 v_0 = 0, \quad x \in (a, c); \qquad v_0(a) = 0, \quad v_0(c) = 0. \tag{9}$$
Отже, головні члени асимптотики λ_0 і v_0 є власними елементами задачі Штурма-Ліувілля (9), спектр якої складається з послідовності простих додатних власних значень. Виберемо власне значення λ_0 цієї задачі. Тоді власна функція однозначно визначається умовами $\|v_0\|_{L_2(a,c)} = 1$ і $v_0'(a) > 0$.

Тоді функція w_1 є розв'язком задачі Коші
$$w_1' = 0, \quad x \in (c, b); \qquad w_1(c) = -q^{-1}v_0'(c),$$
тобто $w_1(x) = -q^{-1}v_0'(c)$. Зауважимо, що кожна частинна сума асимптотичного ряду (8) є експоненціально мала в околі точки $x = b$, тому крайова умова $y_\varepsilon(b) = 0$ не накладає ніяких обмежень на функції $w_k(x)$.

Далі функція v_1 задовольняє задачу
$$v_1'' + \lambda_0 v_1 = -\lambda_1 v_0, \quad x \in (a, c); \quad v_1(a) = 0, \quad v_1(c) = -q^{-1}v_0'(c). \tag{10}$$
Число λ_1 знайдемо з умови існування розв'язку цієї задачі, а саме
$$\lambda_1 = -q^{-1}(v_0'(c))^2.$$
Зауважимо, що перша поправка λ_1 є від'ємною. Тоді задача (10) має єдиний розв'язок, підпорядкований умові $(v_1, v_0)_{L_2(a,c)} = 0$.

Припустимо, що знайдено коефіцієнти рядів λ_i, v_i для $i \leqslant k-1$ і w_i для $i \leqslant k$. Тоді функція v_k є розв'язком задачі
$$\begin{gathered} v_k'' + \lambda_0 v_k = -\lambda_k v_0 - \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i v_{k-i}, \\ v_k(a) = 0, \ v_k(c) = q^{-1}(w_{k-1}'(c) - v_{k-1}'(c)). \end{gathered} \tag{11}$$

Задача (11) має розв'язок тоді і лише тоді, коли

$$\lambda_k = q^{-1}(w'_{k-1}(c) - v'_{k-1}(c))v'_0(c). \tag{12}$$

Виберемо розв'язок v_k так, щоб $(v_k, v_0)_{L_2(a,c)} = 0$. Далі можна знайти функцію w_{k+1} як розв'язок задачі

$$\begin{gathered} w'_{k+1} = (2q)^{-1}\bigl(w''_k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i w_{k-i}\bigr), \quad x \in (c,b), \\ w_k(c) = q^{-1}(w'_{k-1}(c) - v'_{k-1}(c)), \end{gathered} \tag{13}$$

тобто

$$w_{k+1}(x) = \frac{1}{q}(w'_k(c) - v'_k(c)) + \frac{1}{2q}\int\limits_c^x (w''_k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i w_{k-i})\, dt.$$

Отже, ми завершили побудову формальних асимптотик.

Введемо тепер позначення для часткових сум розвинень (6)–(8):

$$\lambda_N(n,\varepsilon) = \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \varepsilon^i,$$

$$S_N(x,n,\varepsilon) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{N} v_i(x)\varepsilon^i, & x \in (a,c), \\ e^{-\varepsilon^{-1}q(x-c)} \sum\limits_{i=1}^{N} w_i(x)\varepsilon^i, & x \in (c,b), \end{cases}$$

де λ_0 – n-не власне значення задачі (9), а v_0 – відповідна власна функція.

Обґрунтування побудованих асимптотик проводиться за класичною схемою [3]. Можна показати, що λ_N^{-1} і S_N є "майже власним значенням" та "майже власним вектором" оператора A_ε, звідки і випливатиме теорема 1. Ми опустимо всі проміжні міркування і сформулюємо лише кінцевий результат.

Теорема 1. *Нехай λ_n^ε – n-не власне значення задачі (1)–(3), а y_n^ε – власна функція, що йому відповідає. Тоді виконуються оцінки*

$$\begin{gathered} |\varepsilon^{-2}\lambda_n^\varepsilon - \lambda_N(n,\varepsilon)| \leqslant C_1(N,n)\varepsilon^{N+1}, \\ \|y_n^\varepsilon - u_N(x,n,\varepsilon)\|_{H_0^1(a,b)} \leqslant C_2(N,n)\varepsilon^N, \end{gathered}$$

де $u_N(x,n,\varepsilon) = S_N(x,n,\varepsilon) + \tilde{u}_N(x,n,\varepsilon)$, а функція $\tilde{u}_N(x,n,\varepsilon)$ задовольняє оцінку

$$|\tilde{u}_N(x,n,\varepsilon)| \leqslant C_3(N,n)e^{-\varepsilon^{-1}q(b-c)}.$$

3. Побудова асимптотик високочастотних власних коливань

Ще раз звернемось до асимптотик (7) і (8). Як бачимо, граничні функції

$$y_0(x) = \begin{cases} v_0(x), & x \in (a,c) \\ 0, & x \in (c,b) \end{cases}$$

не утворюють повної системи в $L_2(a,b)$, хоча для кожного $\varepsilon > 0$ система $\{y_n^\varepsilon\}$ такою властивістю володіє. Цей факт підказує нам, що можливі інші стійкі форми власних функцій. Для їхнього знаходження використаємо те, що асимптотики (7) і (8) не є рівномірними стосовно номера n.

Нехай $\varepsilon_k \to +0$ – послідовність малого параметра, $\lambda_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ – деяка послідовність власних значень задачі (1)–(3) така, що існує $\lim\limits_{\varepsilon_k \to +0} \lambda_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k} = \lambda_0 \in (0,\infty)$, а $y_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ – послідовність відповідних власних функцій, нормованих в $H_0^1(a,b)$.

Означення. *Казатимемо, що послідовність $y_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ моделює високочастотні власні коливання, якщо існує границя y_0 послідовності $y_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ в просторі $L_2(a,b)$, причому $y_0\big|_{(c,b)} \neq 0$.*

Наші дослідження будуть присвячені пошуку послідовностей, що моделюють високочастотні власні коливання. Термін високочастотні власні коливання ми запозичили з праць [4–7], де вперше вивчалися подібні проблеми.

Надалі для спрощення запису замість $\lambda_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$, $y_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ писатимемо ξ_k, y_k.

Лема 3. *Замикання множини $\{(\varepsilon, \lambda_n^\varepsilon) \mid \varepsilon \in (0,1),\ n \in \mathbf{N}\}$ в площині $\mathbf{R}^2_{\varepsilon\lambda}$ містить промінь $\{(0,\lambda) \mid \lambda \geqslant 0\}$.*

Доведення. Нехай $\lambda_0 > 0$ – довільне число, а $K_\sigma(\lambda_0)$ – круг радіуса σ з центром у точці $(0,\lambda_0)$, де $\sigma > 0$ – довільне число.

Зафіксуємо $\varepsilon_0 < \sigma$. Згідно з властивостями спектра задачі Штурма–Ліувілля, знайдеться таке власне значення $\lambda_n^{\varepsilon_0}$, що $\lambda_n^{\varepsilon_0} > \lambda_0$. Оскільки λ_n^ε – неперервна функція параметра ε і $\lambda_n^\varepsilon \leqslant C\varepsilon^2$, то її графік обов'язково перетне вибраний круг. Лему доведено.

Отже, кожне число $\lambda_0 \in (0,+\infty)$ є границею деякої послідовності власних значень задачі (1)-(3). Однак при цьому послідовність відповідних власних функцій не обов'язково моделює високочастотні власні коливання. Справді, нехай $y_k \to y_0$ в $L_2(a,b)$, причому $\operatorname{supp} y_0 \cap (c,b) \neq \emptyset$. Функцію $\varphi \in C_0^\infty(c,b)$ виберемо так, щоб $(y_0,\varphi)_{L_2(a,b)} \neq 0$ і перепишемо рівність (4) у такому вигляді

$$-\varepsilon_k^2 (y_k, \varphi'')_{L_2(c,b)} = (\xi_k - q^2)(y_k, \varphi)_{L_2(c,b)}.$$

Звідси видно таке: якщо y_k має ненульову границю в $L_2(c,b)$, то $|\xi_k - q^2| \leqslant C\varepsilon_k^2$.

Лема 4. *Якщо послідовність власних значень ξ_k задачі (1)–(3) задовольняє оцінку $|\xi_k - q^2| \leqslant C\varepsilon_k^2$ по деякій послідовності $\varepsilon_k \to +0$, то послідовність відповідних власних функцій, нормованих в $H_0^1(a,b)$, є нескінченно малою в $L_2(a,c)$.*

Доведення. Твердження цієї леми випливає з рівності (5).

Для побудови асимптотик власних функцій на інтервалі (a,c) використаємо метод ВКБ–наближень. Враховуючи попередні твердження, асимптотичні розвинення власних елементів шукатимемо у вигляді

$$\xi_k \sim q^2 + \varepsilon_k^2 \xi_2 + \varepsilon_k^3 \xi_3 + \dots + \varepsilon_k^n \xi_n + \dots \tag{14}$$

$$y_k(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n(x) \cos \varepsilon_k^{-1} S(x) + h_n(x) \sin \varepsilon_k^{-1} S(x) \right) \varepsilon^n, \quad x \in (a,c), \tag{15}$$

$$y_k(x) \sim u_0(x) + \varepsilon_k u_1(x) + \dots + \varepsilon_k^n u_n(x) + \dots, \quad x \in (c,b), \tag{16}$$

де $S(x) = \alpha x + \beta$, $u_0 \neq 0$.

Підставимо ці розвинення у задачу (1)–(3). Тоді $\alpha = q$, а u_0 та ξ_2 є власними елементами задачі Штурма–Ліувілля

$$u_0'' + \xi_2 u_0 = 0, \quad x \in (c, b), \quad u_0(c) = 0, \ u_0(b) = 0. \tag{17}$$

Виберемо яке-небудь власне значення задачі (17). Власну функцію визначимо умовами: $\|u_0\|_{L_2(c,b)} = 1$ і $u_0'(c) > 0$.

Далі функції g_1 і h_1 є розв'язками диференціальних рівнянь $g_1' = 0$, $h_1' = 0$, тобто $g_1(x) \equiv A_1$, $h_1(x) \equiv B_1$; крім того, сталі A_1 і B_1 є розв'язком неоднорідної алгебраїчної системи лінійних рівнянь

$$A_1 \cos \varepsilon_k^{-1}(qa + \beta) + B_1 \sin \varepsilon_k^{-1}(qa + \beta) = 0,$$
$$-A_1 \sin \varepsilon_k^{-1}(qc + \beta) + B_1 \cos \varepsilon_k^{-1}(qc + \beta) = q^{-1} u_0'(c),$$

визначник якої $\Delta = -q \cos \varepsilon_k^{-1} q(c - a)$. Послідовність $\varepsilon_k \to +0$ виберемо так, щоб ця система завжди мала розв'язок, тобто $\Delta \neq 0$: $\varepsilon_k^{-1} q(c-a) = \delta + 2\pi k$, $\delta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Крім того, вимагатимемо, щоб розв'язок не залежав від номера k. Цього можна досягнути, прийнявши, що $\beta = -qa$. Отже, при зроблених припущеннях розв'язки мають вигляд: $A_1 = 0$, $B_1 = \frac{u_0'(c)}{q \cos \delta}$.

Функція u_1 є розв'язком задачі

$$u_1'' + \xi_2 u_1 = -\xi_3 u_0, \quad x \in (c, b), \quad u_1(c) = q^{-1} u_0'(c) \operatorname{tg} \delta, \ u_1(b) = 0.$$

Сталу ξ_3 знайдемо з умови розв'язності цієї задачі: $\xi_3 = -q^{-1}(u_0'(c))^2 \operatorname{tg} \delta$. Функцію u_1 однозначно визначимо умовою: $(u_1, u_0)_{L_2(c,b)} = 0$.

Нехай знайдено коефіцієнти u_k, g_k і h_k для всіх $k \leqslant n - 1$ та ξ_k при $k \leqslant n + 1$. Тоді функції g_n і h_n задовольняють диференціальні рівняння

$$g_n' = \frac{1}{2q}(h_{n-1}'' + \sum_{i=2}^{n+1} \xi_i h_{n-i+1}), \qquad h_n' = -\frac{1}{2q}(g_{n-1}'' + \sum_{i=2}^{n+1} \xi_i g_{n-i+1}).$$

Звідси знаходимо

$$g_n(x) = \frac{1}{2q} \int_a^x (h_{n-1}'' + \sum_{i=2}^{n+1} \xi_i h_{n-i+1}) \, dt + A_n,$$
$$h_n(x) = -\frac{1}{2q} \int_a^x (g_{n-1}'' + \sum_{i=2}^{n+1} \xi_i g_{n-i+1}) \, dt + B_n,$$

де $A_n = 0$, $B_n = \frac{1}{q \cos \delta}(u_{n-1}'(c) - (g_{n-1}'(c) - \frac{1}{2} \int_a^c (h_{n-1}''(t) + \sum_{i=2}^{n+1} \xi_i h_{n-i+1}(t)) \, dt) \cos \delta -$ $-(h_{n-1}'(c) - q g_n(c)) \sin \delta)$.

Функція u_n є розв'язком такої задачі:

$$u_n'' + \xi_2 u_n = -\xi_{n+2} u_0 - \sum_{i=3}^{n+1} \xi_i u_{n-i+2},$$
$$u_n(c) = g_n(c) \cos \delta + h_n(c) \sin \delta, \quad u_n(b) = 0.$$

Сталу ξ_{n+2} знайдемо так само, як і ξ_3: $\xi_{n+2} = (g_n(c)\cos\delta + h_n(c)\sin\delta)u_0'(c)$. Функцію u_n визначимо однозначно умовою $(u_n, u_0)_{L_2(c,b)} = 0$. Отже, ми повністю побудували формальні асимптотики.

4. Обґрунтування високочастотних асимптотичних розвинень

У розділі 3 ми побудували асимптотичні розвинення, але не визначили об'єкта апроксимації. Це пов'язано з тим, що визначити цей об'єкт ми зможемо лише за допомогою побудованих розвинень.

Лема 5. *Нехай послідовність власних значень ξ_k задачі (1)-(3) задовольняє рівність $\xi_k = q^2 + \xi_2\varepsilon_k^2 + \tilde{\xi}_k\varepsilon_k^3$, де ξ_2 - деяке власне значення задачі (17), а величина $\tilde{\xi}_k$ має скінченну границю при $k \to \infty$, і нехай відповідні власні функції є нормованими в $H^1(c,b)$. Тоді величини ${\varepsilon_k}^{-1}|y_k(c)|$ та $|y_k'(c)|$ мають скінченні границі при $\varepsilon_k \to +0$.*

Доведення. На інтервалі (c,b) власна функція y_k задовольняє диференціальне рівняння $-\varepsilon_k^2 y_k'' + q^2 y_k = \xi_k y_k$; крім того, $y_k(b) = 0$. Тому

$$y_k(x) = B_k \sin \varepsilon_k^{-1}\sqrt{\xi_k - q^2}(x-b) = B_k \sin(\sqrt{\xi_2} + \alpha_k)(x-b), \quad x \in (c,b), \tag{18}$$

причому існує $\lim {\varepsilon_k}^{-1}\alpha_k < \infty$. Згідно з умовою леми $\|y_k\|_{H^1(c,b)} = 1$, а тому величина B_k має скінченну границю при $k \to \infty$.

Далі $y_k(c)$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} y_k(c) = B_k \left(\sin\sqrt{\xi_2}(c-b)\cos\alpha_k(c-b) + \cos\sqrt{\xi_2}(c-b)\sin\alpha_k(c-b)\right) = \\ = B_k \cos\sqrt{\xi_2}(c-b)\sin\alpha_k(c-b). \end{aligned} \tag{19}$$

Тут ми використали той факт, що ξ_2 є власним значенням задачі (17). Твердження леми випливає з рівностей (19) і (18).

Наслідок. *За умов леми 5 послідовність $\|y_k\|_{H^1(a,b)}/\|y_k\|_{H^1(c,b)}$ має скінченну границю при $k \to \infty$.*

Доведення. На інтервалі (a,c) функцію $y_k(x)$ можна подати у вигляді

$$y_k(x) = y_k(c)\cos\frac{\sqrt{\xi_k}}{\varepsilon_k}(x-c) + y_k'(c)\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\xi_k}}\sin\frac{\sqrt{\xi_k}}{\varepsilon_k}(x-c).$$

Звідси і випливає твердження наслідку.

Задачі (17), так само як і задачі (1)-(3), відповідає компактний, самоспряжений, додатно визначений, лінійний оператор $\mathrm{A}_0 : H_0^1(c,b) \to H_0^1(c,b)$ заданий рівністю

$$a_0(\mathrm{A}_0\, u, v) = (u,v)_{L_2(c,b)} \qquad \text{для всіх } v \in H_0^1(c,b),$$

де $a_0(u,v) = (u',v')_{L_2(c,b)}$.Через $\|u\|_0$ позначимо $\sqrt{a_0(u,u)}$.

Лема 6. *Нехай виконуються умови леми 5. Тоді існує така функція $\tilde{u}_k$, що виконується нерівність*

$$\left\| \mathrm{A}_0\, u_k - \frac{\varepsilon_k^2}{\xi_k - q^2} u_k \right\|_0 \leqslant C_1 \varepsilon_k,$$

де $u_k(x) = y_k(x) + \tilde{u}_k(x)$, *а функція* $\tilde{u}_k$ *задовольняє оцінку*

$$\|\tilde{u}_k\|_{H^1(c,b)} \leqslant C_2\varepsilon_k.$$

Доведення. Згідно з лемою 5 функція $\tilde{u}_k(x) = y_k(c)\frac{x-b}{b-c}$ задовольняє потрібну оцінку; крім того, зауважимо, що функція $u_k(x) = y_k(x) + \tilde{u}_k(x)$ належить простору $H_0^1(c,b)$.

Оскільки множина $C_0^\infty(c,b)$ скрізь щільна в $H_0^1(c,b)$, то досить показати, що

$$\left|a_0(\mathrm{A}_0\, u_k - \frac{\varepsilon_k^2}{\xi_k - q^2}u_k, \varphi)\right| \leqslant C_1\varepsilon_k\|\varphi\|_{H_0^1(c,b)}.$$

Справді,

$$\left|a_0(\mathrm{A}_0\, u_k, \varphi) - \frac{\varepsilon_k^2}{\xi_k - q^2}a_0(u_k, \varphi)\right| = \left|(u_k, \varphi)_{L_2(c,b)} - \left(\xi_2^{-1} + O(\varepsilon_k)\right)(u_k', \varphi')_{L_2(c,b)}\right| \leqslant$$
$$\xi_2^{-1}\left|(y_k', \varphi')_{L_2(c,b)} - \xi_2(y_k, \varphi)_{L_2(c,b)}\right| + O(\varepsilon_k)\|\varphi\|_{H_0^1(c,b)}.$$

Потрібна оцінка випливає з тотожності (4) та умови леми. Лему доведено.

Лема 7. *Нехай послідовність власних значень* ξ_k *задачі (1)–(3) задовольняє рівність* $\xi_k = q^2 + \xi_2\varepsilon_k^2 + \tilde{\xi}_k\varepsilon_k^3$, *де* ξ_2 *– деяке власне значення задачі (17), а величина* $\tilde{\xi}_k$ *має скінченну границю при* $k \to \infty$ *і нехай відповідні власні функції* y_k *є нормованими в* $H_0^1(a,b)$. *Тоді послідовність* y_k *має ненульову границю в* $L_2(c,b)$.

Доведення. Згідно з лемою 4 звуження послідовності функцій y_k на інтервал (a,c) є нескінченно малою в $L_2(a,c)$. Ми пронормуємо власні функції y_k в просторі $H^1(c,b)$ і покажемо, що ця послідовність збігається до власної функції u_0 задачі (17), що відповідає власному значенню ξ_2, оскільки за наслідком з леми 5 нормування послідовності y_k в просторах $H^1(a,b)$ і $H^1(c,b)$ – еквівалентні.

Підберемо додатне число d_1 так, щоб на відрізку $\left[\frac{\varepsilon_k^2}{\xi_k - q^2} - d_1, \frac{\varepsilon_k^2}{\xi_k - q^2} + d_1\right] = \left[\frac{1}{\xi_2 + \tilde{\xi}_k\varepsilon_k} - d_1, \frac{1}{\xi_2 + \tilde{\xi}_k\varepsilon_k} + d_1\right]$ було лише одне власне значення оператора A_0, а саме ξ_2^{-1}. Тоді при досить малих ε_k матимемо $\|u_0 - u_k\|_0 \leqslant C_3\varepsilon_k$ [3]. Враховуючи малість функції $\tilde{u}_k$, остаточно одержуємо

$$\|u_0 - y_k\|_{H^1(c,b)} \leqslant C_4\varepsilon_k.$$

Лему доведено.

Лема 8. *Нехай* ξ_2 *– деяке власне значення задачі (17). Тоді існує таке число* $d_2 > 0$, *що при достатньо малих* ε_k *на відрізку* $\left[\frac{1}{q^2 + \xi_2\varepsilon_k^2} - d_2\varepsilon_k^3, \frac{1}{q^2 + \xi_2\varepsilon_k^2} + d_2\varepsilon_k^3\right]$ *є не більше одного власного значення оператора* $\mathrm{A}_{\varepsilon_k}$.

Доведення. Припустимо, що це не так. Тоді існує послідовність малого параметра $\varepsilon_k \to +0$, дві послідовності власних значень задачі (1)–(3) $\lambda_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ та $\lambda_{m(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ такі, що для них виконуються умови леми 8, причому $n(\varepsilon_k) \neq m(\varepsilon_k)$. Згідно з лемою 7 послідовності відповідних власних функцій $y_{n(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$ та $y_{m(\varepsilon_k)}^{\varepsilon_k}$, нормованих в $H_0^1(a,b)$, мають одну і ту ж ненульову границю в $L_2(a,b)$, а саме

$$\begin{cases} 0, & x \in (a,c) \\ u_0(x), & x \in (c,b) \end{cases}.$$

Але це неможливо, оскільки при кожному ε_k функції $y^{\varepsilon_k}_{n(\varepsilon_k)}$ та $y^{\varepsilon_k}_{m(\varepsilon_k)}$ ортогональні в $L_2(a,b)$. Лему доведено.

Введемо тепер позначення для часткових сум розвинень (14)–(16):

$$\xi_N(\varepsilon_k) = \sum_{n=0}^{N} \xi_n \varepsilon_k^n, \quad \xi_0 = q^2, \ \xi_1 = 0,$$

$$S_N(x,\varepsilon_k) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{N} \left(g_n(x)\cos q\varepsilon_k^{-1}(x-a) + h_n(x)\sin q\varepsilon_k^{-1}(x-a)\right)\varepsilon_k^n, & x \in (a,c), \\ \sum\limits_{n=0}^{N} u_n(x)\varepsilon_k^n, & x \in (c,b), \end{cases}$$

де послідовність ε_k була вибрана при побудові асимптотик.

Зауважимо, що функція S_N належить до $H_0^1(a,b)$.

Лема 9. *Для кожного натурального N існує стала C_N така, що виконується нерівність*

$$\|A_{\varepsilon_k} S_N - \xi_N(\varepsilon_k)^{-1} S_N\|_{\varepsilon_k} \leqslant C_N \ \varepsilon_k^{N-1}.$$

Доведення цієї леми аналогічне до доведення леми 6.

Теорема 2. *Нехай ε_k – послідовність визначена при побудові асимптотик. Тоді існує така послідовність власних значень ξ_k задачі (1)–(3), що виконується оцінка*

$$|\xi_k - \xi_N(\varepsilon_k)| \leqslant C_N \ \varepsilon_k^{N+1},$$

а послідовність відповідних власних функцій моделює високочастотні власні коливання; крім того, виконується оцінка:

$$\|y_k - S_N\|_{H_0^1(a,b)} \leqslant \tilde{C}_N \ \varepsilon_k^{N-4},$$

зокрема функції y_k мають швидкоосцилюючий характер на інтервалі (a,c).

Доведення. Твердження цієї теореми випливає з лем 8 та 9 [3].

Отже, з теореми 1 зокрема випливає, що границі власних функцій задачі (1)–(3) при фіксованому номері власного значення утворюють базу власного підпростору V_0 оператора множення на функцію $U(x)$, що відповідає меншому власному значенню $\lambda = 0$. Проекції цих власних функцій на власний підпростір V_{q^2}, що відповідає більшому власному значенню $\lambda = q^2$, є малими за нормою $\|\cdot\|_{H^1(c,b)}$.

Аналогічно, границі послідовностей власних функцій задачі (1)–(3), що моделюють високочастотні власні коливання, утворюють базу простору V_{q^2}, а їхні проекції на V_0 є швидкоосцилюючими функціями з малою амплітудою.

---

1. *Маслов В. П.* Теория возмущений при переходе от дискретного спектра к непрерывному// Докл. АН СССР. – 1956. – Т.109ю – N2. – С.267–270.

2. *Маслов В. П.* Метод теории возмущений для отыскания спектра обыкновенных дифференциальных операторов с малым параметром при старшей производной// Докл. АН СССР. – 1956. – Т.111. – N5.– С.977–980.

3. *Вишик М. И., Люстерник А. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром// Успехи мат. наук. – 1957. – Т.12. – N 5. – С.3–122.
4. *Lobo-Hidalgo M., Sanchez-Palencia E.* Low and high frequency vibration in stiff problems// in De Giorgy 60th Birthday, Partial differential Equations and the Calculus of Variations. – Birkhaüser, 1990. – Vol.2. – P.729–742.
5. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.* Vibration and Coupling of Continuous Systems. Asymptotic Methods. – Springer Verlag, 1989.
6. *Sanchez-Palencia E.* Asymptotic and spectral properties of a class of singular-stiff problems// J. Math. Pures Appl. – 1992. – Vol. 71. – P.379–406.
7. *Lobo M., Perez E.* High frequency vibrations in a stiff problem// Math. Methods. Appl. Sci. – 1997. – Vol 7. – N 2. – P.291–311.
8. *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнение Шредингера.– М., 1983.
9. *Головатий Ю.Д., Головач І.А.* Про асимптотику глобальних власних коливань сильно неоднорідної струни// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип.48. – С.88–99.

A. Haidys

ON A SINGULARLY PERTURBED STURM–LIOUVILLE PROBLEM

We study the behaviour of eigenvalues and eigenvectors of the one-parameter family of selfadjoint operators with discrete spectrum. This family converges strongly to the operator of multiplication by a piecewise constant function. Complete asymptotic expansions of eigenvalues and corresponding eigenvectors that are continuous with respect to the parameter are constructed. Other eigenvector limits are found and their complete asymptotic expansions are constructed.

Стаття надійшла до редколегії 10.03.2000

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.58–71

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.58–71

УДК 517.95

Галина Доманська

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ СИСТЕМИ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ У НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Крайові задачі для псевдопараболічних рівнянь є математичною моделлю багатьох фізичних та механічних процесів (фільтрація рідини в середовищах з подвійною пористістю [1], передача тепла в гетерогенному середовищі [2], перенесення вологи в ґрунті [3] та ін.). Загальна теорія таких рівнянь ґрунтовно викладена в працях [4,5]. Вивченню мішаних задач присвячено [6-8]. Задача Коші для псевдопараболічних рівнянь теж детально досліджувалась. Зокрема, Рандел [9] показав, що розв'язок задачі Коші для псевдопараболічного рівняння може бути єдиним лише в класі функцій, які зростають не швидше, ніж $e^{\alpha|x|}$ при $|x| \to \infty$, де число α залежить від коефіцієнтів рівняння.

Якщо фізичний процес, який описується вищезгаданими математичними моделями, розпочався давно і початкові умови перестають впливати на хід процесу, то природно виникає задача без початкових умов. Вивченню саме таких задач в обмежених областях присвячені праці [10-12], у необмежених – [13].

У запропонованій праці розглянуто систему псевдопараболічних варіаційних нерівностей без початкових умов у необмеженій (за просторовими змінними) області. Визначено умови існування та єдиності розв'язку зазначеної задачі.

Нехай Ω – необмежена область в R^n з межею Γ; існує $\{\Omega_\tau\}$ – сім'я обмежених підобластей області Ω, які залежать від параметра $\tau \in \Pi$ (тут Π – зліченна підмножина множини додатних дійсних чисел), і мають такі властивості:

1) $\Omega = \bigcup\limits_{\tau\in\Pi} \Omega_\tau$;

2) $\tau \leqslant \tau' \Rightarrow \Omega_\tau \subset \Omega_{\tau'}$;

3) $\partial\Omega_\tau = \Gamma^1_\tau \cup \Gamma^2_\tau$, де $\Gamma^1_\tau, \Gamma^2_\tau$ – кусково-гладкі гіперповерхні; $\mathrm{mes}\{\Gamma^1_\tau \cap \Gamma^2_\tau\} = 0$, $\Gamma^1_\tau \neq \oslash$, $\Gamma^1_\tau \cap \Gamma \neq \oslash$, $\forall \tau \in \Pi$;

4) $\Gamma = \bigcup\limits_{\tau\in\Pi} \Gamma^1_\tau$.

Нехай $Q_T = \Omega \times (-\infty, T]$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $\Omega_\tau = \Omega \times \{t = \tau\}$, $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T$. В області Q_T розглянемо систему псевдопараболічних варіаційних нерівностей

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[(v_t - f(x,t), v_t + v - u_t - u) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha v_t + B_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha v, D^\beta \times$$

$$\times (v_t + v - u_t - u)) - \sum_{|\alpha|=1} (C_\alpha(x,t) D^\alpha u, v_t + v - u_t - u) + (C(x,t) v, v_t + v - u_t -$$

$$- u) - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}(v_t - u_t), D^{\beta}(v_t - u_t)\right) - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \Big(\Big(B_{\alpha\beta}(x,t) -$$

$$- \frac{1}{2}B_{\alpha\beta t}(x,t) - \frac{\mu}{2}\left(A_{\alpha\beta}(x) + B_{\alpha\beta}(x,t)\right)\Big) D^{\alpha}(v-u), D^{\beta}(v-u)\Big) - |v_t - u_t|^2 -$$

$$- \left(\left(C(x,t) - \frac{1}{2}C_t(x,t) - \frac{\mu}{2}\left(C(x,t) + I\right)\right)(v-u), v-u\right) - \tag{1}$$

$$- \lambda \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_t + B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u, v_t + v - u_t - u\right)\frac{x^{\beta}}{|x|}\Bigg] e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} G(v-u)e^{-\lambda|x|+\mu t_2}dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} G(v-u)e^{-\lambda|x|+\mu t_1}dx,$$

де $G(v) = ((C(x,t)+I)v, v) + \sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=1} \left((A_{\alpha\beta}(x) + B_{\alpha\beta}(x,t))\, D^{\alpha}v, D^{\beta}v\right)$. Тут I, $A_{\alpha\beta}(x)$, $B_{\alpha\beta}(x,t)$, $C_{\alpha}(x,t)$, $C(x,t)$ – квадратні матриці розміру $m\times m$ і, крім того, I – одинична; $u = (u_1, ..., u_m)^T$, $v = (v_1, ..., v_m)^T$, $f(x,t) = (f_1(x,t), ..., f_m(x,t))^T$; $D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$; $x^{\beta} = x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$; $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в R^m; $|\cdot|$ – модуль в R^m, а якщо йтиметься про просторову змінну x, то через $|\cdot|$ будемо також позначати і модуль в R^n; $\{\lambda, \mu\} \subset R_+$.

Введемо необхідні для подальшого дослідження простори. Через $\overset{\circ}{H}{}^1_{\lambda}(\Omega)$ позначимо замикання простору $C_0^{\infty}(\Omega)$ за нормою

$$\|w\|_{\lambda} = \left(\int\limits_{\Omega}\left[|w|^2 + \sum_{|\alpha|=1}|D^{\alpha}w|^2\right]e^{-\lambda|x|}dx\right)^{\frac{1}{2}};$$

$H^1_{\lambda}(\Omega)$ – простір Соболєва з вагою $e^{-\lambda|x|}$. У випадку $\lambda = 0$ індекс λ опускатимемо і писатимемо $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ та $H^1(\Omega)$.

Через $L^r_{\mu}((t_1,t_2);X)$, $1 < r < \infty$, будемо позначати простір функцій $w : (t_1,t_2) \to X$, для яких

$$\|w\|_{\mu} = \left(\int\limits_{t_1}^{t_2}\|w(t)\|^r_X e^{\mu t}dt\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

де X – банахів простір [4]; $L^r_{\mu,\text{loc}}((-\infty,T];X)$ - простір функцій, які належать до $L^r_{\mu}((t_1,t_2);X)$ для довільного інтервалу $(t_1,t_2) \subset (-\infty,T]$. Аналогічно можна ввести і простори $H^1_{\mu}((t_1,t_2);X)$ та $H^1_{\mu,\text{loc}}((-\infty,T];X)$.

Нехай простір V такий, що $\overset{\circ}{H}{}^1_{\lambda}(\Omega) \subset V \subset H^1_{\lambda}(\Omega)$; V^* – простір, спряжений до V;

$$W = \left\{w : w \in L^2_{\text{loc}}\left((-\infty,T];L^2_{\lambda}(\Omega)\right); w_t \in L^2_{\text{loc}}\left((-\infty,T];L^2_{\lambda}(\Omega)\right)\right\}.$$

Означення. *Розв'язком задачі (1) називатимемо функцію u, яка має такі властивості:*

1) $u \in H^1_{\mu,\text{loc}}((-\infty,T];V)$;

2) *функція u задовольняє нерівність (1) для майже всіх $(t_1, t_2) \subset (-\infty, T]$ і для довільної функції v такої, що $\{v, D^\alpha v \,|\, |\alpha| = 1\} \subset W$, $\{v, v_t\} \subset V$ для майже всіх $t \in (-\infty, T]$.*

Для спрощення подальших записів введемо ще кілька позначень:

$$\hat{A} = \max_{|\alpha|=|\beta|=1} \sup_{Q_T} \|A_{\alpha\beta}(x)\|^2; \quad \hat{B} = \max_{|\alpha|=|\beta|=1} \sup_{Q_T} \|B_{\alpha\beta}(x,t)\|^2;$$
$$\hat{C} = \max_{|\alpha|=1} \sup_{Q_T} \|C_\alpha(x,t)\|^2.$$

Говоритимемо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови (A_0), (B_0), (B_1), (C_0), (C_1), (C_2), якщо

$$(A_0): a_0 \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^2 \leqslant \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (A_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha, \xi_\beta) \leqslant a^0 \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^2, \quad \forall x \in \Omega;$$
$$A_{\alpha\beta}(x) = A_{\beta\alpha}(x), \; A_{\alpha\beta}(x) = A^*_{\alpha\beta}(x), \; \forall x \in \Omega; \; A_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega); \; a_0 > 0;$$
$$(B_0): b_0 \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^2 \leqslant \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (B_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha, \xi_\beta) \leqslant b^0 \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^2, \quad \forall (x,t) \in Q_T;$$
$$B_{\alpha\beta}(x,t) = B_{\beta\alpha}(x,t), \; B_{\alpha\beta}(x,t) = B^*_{\alpha\beta}(x,t), \; \forall (x,t) \in Q_T;$$
$$B_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega); \; b_0 > 0;$$
$$(B_1): \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (B_{\alpha\beta t}(x,t)\xi_\alpha, \xi_\beta) \leqslant b^1 \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^2, \quad \forall (x,t) \in Q_T;$$
$$(C_0): c_0|\xi|^2 \leqslant (C(x,t)\xi, \xi) \leqslant c^0|\xi|^2, \quad \forall (x,t) \in Q_T; \quad C \in L^\infty(\Omega); \; c_0 > 0;$$
$$(C_1): (C_t(x,t)\xi, \xi) \leqslant c^1|\xi|^2, \quad \forall (x,t) \in Q_T;$$
$$(C_2): C_\alpha \in L^\infty(\Omega)$$

для довільних векторів ξ, ξ_α, ξ_β з R^m, $|\alpha| = |\beta| = 1$.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови (A_0), (B_0), (B_1), (C_0), (C_1), (C_2) та існують такі додатні числа λ і μ, що справджуються нерівності*

$$\left(2b_0 - b^1 - 2\left(a^0 + b^0\right)\mu\right) > 0;$$
$$\left(2b_0 - b^1 - 2\left(a^0 + b^0\right)\mu\right)\left(2c_0 - c^1 - 2\left(c^0 + 1\right)\mu\right) > 2\hat{C}n;$$
$$0 < \lambda < \frac{1}{4n}\left(-1 - \frac{2\hat{C}}{\hat{B}} + \left[\left(\frac{2\hat{C}}{\hat{B}} - 1\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{4}{\hat{B}n}\left(2b_0 - b^1 - 2\left(a^0 + b^0\right)\mu\right)\left(2c_0 - c^1 - 2\left(c^0 + 1\right)\mu\right)\right]^{1/2}\right).$$

Тоді система (1) не може мати більше одного розв'язку, що задовольняє умову

$$\lim_{t \to -\infty} \left(e^{\mu t} \|u(t, \cdot)\|_{H^1_\lambda(\Omega)}\right) = 0. \tag{2}$$

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки u_1 та u_2 задачі (1). Оскільки $\{u_i, D^\alpha u_i \,|\, |\alpha| = 1, i = 1,2\} \subset W$, то згідно з теоремою 1.17 [4] $\{u_i, D^\alpha u_i \mid |\alpha| =$

$1, i = 1,2\} \subset C\left((-\infty, T]\,; L^2_\lambda(\Omega)\right)$ та існують інтеграли

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (u_i, u_{it}) e^{-\lambda|x|+\mu t} dxdt, \qquad \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (D^\alpha u_i, D^\beta u_{it}) e^{-\lambda|x|+\mu t} dxdt, \quad i = 1,2.$$

Для функцій $\{u_i, D^\alpha u_i \,|\, |\alpha| = 1, i = 1,2\} \subset L^2_{\mu,\mathrm{loc}}\left((-\infty, T]\,; V\right) \bigcap C\left((-\infty, T]\,; L^2_\lambda(\Omega)\right)$, що задовольняють (1), правильними є такі оцінки (при $f = f_1, f = f_2, u = u_1 - u_2, v = (u_1 + u_2)/2$):

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (f_1 - f_2, u_t + u)\, e^{-\lambda|x|+\mu t} dxdt \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_2}} G(u) e^{-\lambda|x|+\mu t_2} dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_1}} G(u) \times$$

$$\times\, e^{-\lambda|x|+\mu t_1} dx + \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[\left(1 - \frac{n\varepsilon}{2} - \lambda n^2 \varepsilon\right) |u_t|^2 + \left(a_0 - \frac{\lambda n \hat{A}}{\varepsilon}\right) \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_t|^2 + \right.$$

$$+ \frac{2b_0 - b^1 - \mu(a^0 + b^0) - \frac{2\lambda n \hat{B}}{\varepsilon} - \frac{2\hat{C}}{\varepsilon}}{2(a^0 + b^0)} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left((A_{\alpha\beta}(x) + B_{\alpha\beta}(x,t)) D^\alpha u, D^\beta u\right) +$$

$$\left. + \frac{2c_0 - c^1 - \mu(1 + c^0) - n\varepsilon - 2\lambda n^2 \varepsilon}{2(1 + c^0)} \left((I + C(x,t))u, u\right) \right] e^{-\lambda|x|+\mu t} dxdt.$$

Позначимо

$$y(t) = \int\limits_{\Omega} G(u) e^{-\lambda|x|+\mu t} dx. \tag{3}$$

Враховуючи умови теореми та останню нерівність і використовуючи (3), отримуємо, що для довільних чисел t_1 та t_2, де $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T$,

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) dt + \mu \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t) dt \leqslant 0. \tag{4}$$

З (4) випливає, що для майже всіх $t \in (-\infty, T]$ справджується нерівність $y'(t) + \mu y(t) \leqslant 0$. Домножимо її на $e^{\mu t}$, зінтегруємо в межах від t_1 до t_2 і одержимо, що

$$y(t_2) e^{\mu t_2} \leqslant y(t_1) e^{\mu t_1}. \tag{5}$$

Перейдемо в нерівності (5) до границі при $t_1 \to -\infty$ і використаємо умову теореми. Одержимо, що для довільного $t_2 \in (-\infty, T]$ правильною є оцінка $y(t_2) e^{\mu t_2} \leqslant 0$, тобто

$$\int\limits_{\Omega_{t_2}} \left[\left((I + C(x,t))(u_1 - u_2), u_1 - u_2\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left((A_{\alpha\beta}(x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\; B_{\alpha\beta}(x,t)\right) D^\alpha(u_1 - u_2), D^\alpha(u_1 - u_2)\right)\Big] e^{-\lambda|x|} dx \leqslant 0$$

для всіх $t_2 \in (-\infty, T]$. А звідси випливає, що $u_2 = u_1$ майже скрізь в Q_T. Теорему доведено.

Для визначення умов існування розв'язку задачі (1) буде використано метод штрафу. Відомо [14], що оператор штрафу B задається формулою

$$B(u) = J(u),$$

де J – оператор двоїстості між просторами V і V^*; а також, що B є монотонним, обмеженим та ліпшиць-неперервним. У даному випадку оператор двоїстості, отже, і оператор штрафу є лінійним.

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються всі умови теореми 1 і, крім того,*

$$0 < \lambda < -\frac{1}{4n} + \frac{1}{4n}\min\left\{\left[1 + \frac{4}{\hat{A}n}(2-\mu)(2a_0 - \mu)\right]^{1/2}, -\frac{2\hat{C}}{\hat{B}} + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{2\hat{C}}{\hat{B}} - 1\right)^2 + \frac{4}{\hat{B}n}\left(2b_0 - b^1 - 2\left(a^0 + b^0\right)\mu\right)\left(2c_0 - c^1 - 2\left(c^0 + 1\right)\mu\right)\right]^{1/2}\right\};$$

$f \in L^2_\mu\left((-\infty, T]; L^2_\lambda(\Omega)\right)$. *Тоді існує розв'язок задачі (1), який задовольняє умову (2).*

Доведення. Розглянемо допоміжну задачу: потрібно довести існування розв'язку задачі Фур'є для системи

$$u_t - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D^\beta\left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_t\right) - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D^\beta\left(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u\right) - \sum_{|\alpha|=1} C_\alpha(x,t)D^\alpha u +$$
$$+ C(x,t)u + \gamma B(u + u_t) = f(x,t) \tag{6}$$

в області Q_T, де B – оператор штрафу, $\gamma > 0$. Для цього в області $Q^*_{t_0,T} = \Omega^* \times [t_0, T]$, де $\Omega^* \subset \{\Omega_\tau\}_{\tau\in\Pi}$ дослідимо систему

$$u_t - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D^\beta\left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_t\right) - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D^\beta\left(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u\right) - \sum_{|\alpha|=1} C_\alpha(x,t)D^\alpha u +$$
$$+ C(x,t)u + \gamma B(u + u_t) = f^*_{t_0}(x,t) \tag{7}$$

з такими початковими та крайовими умовами:

$$u|_{t=t_0} = 0, \tag{8}$$

$$u|_{\partial\Omega^*\times[t_0,T]} = 0. \tag{9}$$

Тут

$$f^*_{t_0}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q^*_{t_0,T}; \\ 0, & (x,t) \in Q_T \setminus Q^*_{t_0,T}. \end{cases}$$

Розв'язок задачі (7)-(9) шукатимемо методом Гальоркіна. Нехай $\{\hat{\varphi}^{*,k}\}$ – фундаментальна система функцій, визначених на Ω. Ортогоналізуємо її стосовно скалярного добутку

$$(v, w)_A = \int_{\Omega^*}\left[(v, w) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha v, D^\beta w\right)\right]dx$$

і позначимо через $\{\varphi^{*,k}\}$ отриману систему. Приймемо, що

$$u^{*,N}(x,t) := \sum_{s=1}^{N} c_k^N(t)\varphi^{*,k}(x), \qquad x \in \Omega^*, \quad t \in (t_0, T),$$

де $c_k^N(t)$, $k = 1, ..., N$ визначають із системи рівнянь

$$\sum_{k=1}^{N} \left(c_k^N(t)\right)' \left[\int\limits_{\Omega^*} \left[\left(\varphi^{*,k}(x), \varphi^{*,s}(x)\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha \varphi^{*,k}(x), D^\beta \varphi^{*,s}(x)\right)\right] dx + \right.$$
$$\left. + \gamma\langle B(\varphi^{*,k}(x)), \varphi^{*,s}(x)\rangle\right] = -\sum_{k=1}^{N} c_k^N(t) \left[\int\limits_{\Omega^*} - \sum_{|\alpha|=1} \left(C_\alpha(x,t) D^\alpha \varphi^{*,k}(x), \varphi^{*,s}(x)\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(B_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha \varphi^{*,k}(x), D^\beta \varphi^{*,s}(x)\right) + \left(C(x,t)\varphi^{*,k}(x), \varphi^{*,s}(x)\right)\right] dx + \tag{10}$$
$$+ \gamma \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t) \langle B(\varphi^{*,k}(x)), \varphi^{*,s}(x)\rangle + \int\limits_{\Omega^*} \left(f_{t_0}^*(x,t), \varphi^{*,s}(x)\right) dx, \qquad s = 1, ..., N$$

та умов

$$c_s^N(t_0) = 0, \qquad s = 1, ..., N. \tag{11}$$

Домножимо кожне з рівнянь системи (10) на $\left(c_s^N(t)\right)' + c_s^N(t)$ відповідно, підсумуємо ці рівняння та зінтегруємо відрізком $[\tau, T]$, $\tau > t_0$. Отримаємо

$$\int\limits_{Q^*_{\tau,T}} \left[\left(u_t^{*,N}, u_t^{*,N} + u^{*,N}\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_t^{*,N} + B_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u^{*,N}, D^\beta \times \right.\right.$$
$$\left.\left(u_t^{*,N} + u^{*,N}\right)\right) - \sum_{|\alpha|=1} \left(C_\alpha(x,t) D^\alpha u^{*,N}, u_t^{*,N} + u^{*,N}\right) + \tag{12}$$
$$\left. + \left(C(x,t)u^{*,N}, u_t^{*,N} + u^{*,N}\right)\right] dxdt + \gamma \int\limits_{\tau}^{T} \langle B(u_t^{*,N} + u^{*,N}), u_t^{*,N} + u^{*,N}\rangle dt =$$
$$= \int\limits_{Q^*_{\tau,T}} \left(f_{t_0}^*(x,t), u_t^{*,N} + u^{*,N}\right) dxdt.$$

З оцінок

$$I_1 = \int\limits_{Q^*_{\tau,T}} \left[\left(u_t^{*,N}, u_t^{*,N} + u^{*,N}\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_t^{*,N} + B_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u^{*,N},\right.\right.$$
$$\left.\left. D^\beta \left(u_t^{*,N} + u^{*,N}\right)\right) + \left(C(x,t)u^{*,N}, u_t^{*,N} + u^{*,N}\right)\right] dxdt \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^*_\tau} G(u^{*,N}) dx + \int\limits_{Q^*_{\tau,T}} \left[\left|u_t^{*,N}\right|^2 + \left(\left(C(x,t) - \frac{1}{2}C_t(x,t)\right) u^{*,N}, u^{*,N}\right) + \right.$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_t^{*,N},D^{\beta}u_t^{*,N}\right)+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}((B_{\alpha\beta}(x,t)-$$

$$-\left.\left.\frac{1}{2}B_{\alpha\beta t}(x,t)\right)D^{\alpha}u^{*,N},D^{\beta}u^{*,N}\right)\Big]\,dxdt,$$

$$I_2=\int\limits_{Q^*_{\tau,T}}\sum_{|\alpha|=1}\left(C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u^{*,N},u_t^{*,N}+u^{*,N}\right)dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{Q^*_{\tau,T}}\left[\frac{\hat{C}}{\varepsilon}\sum_{|\alpha|=1}\left|D^{\alpha}u^{*,N}\right|^2+\frac{\varepsilon n}{2}\left|u^{*,N}\right|^2+\frac{\varepsilon n}{2}\left|u_t^{*,N}\right|^2\right]dxdt,$$

$$I_3=\int\limits_{\tau}^{T}\langle B(u_t^{*,N}+u^{*,N}),u_t^{*,N}+u^{*,N}\rangle dt\geqslant 0,$$

$$I_4=\int\limits_{Q^*_{\tau,T}}\left(f^*_{t_0}(x,t),u_t^{*,N}+u^{*,N}\right)dxdt\leqslant\int\limits_{Q^*_{\tau,T}}\left[\frac{1}{\delta}\left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2+\frac{\delta}{2}\left|u_t^{*,N}\right|^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta}{2}\left|u^{*,N}\right|^2\right]dxdt$$

та з рівності (12) знаходимо

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^*_{\tau}}G(u^{*,N})dx+\int\limits_{Q^*_{\tau,T}}\left[\left(1-\frac{\varepsilon n}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\left|u_t^{*,N}\right|^2+\right.$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_t^{*,N},D^{\beta}u_t^{*,N}\right)-\frac{\hat{C}}{\varepsilon}\sum_{|\alpha|=1}\left|D^{\alpha}u^{*,N}\right|^2+ \tag{13}$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(\left(B_{\alpha\beta}(x,t)-\frac{1}{2}B_{\alpha\beta t}(x,t)\right)D^{\alpha}u^{*,N},D^{\beta}u^{*,N}\right)+$$

$$\left.+\left(\left(C(x,t)-\frac{1}{2}C_t(x,t)-I\left(\frac{\varepsilon n}{2}+\frac{\delta}{2}\right)\right)u^{*,N},u^{*,N}\right)\right]dxdt\leqslant\int\limits_{Q^*_{\tau,T}}\left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2dxdt.$$

Зауважимо, що для числа μ, яке задовольняє умови теореми, можна підібрати таке $\varepsilon>0$, що справджуватиметься нерівність

$$0<\mu<\min\left\{\frac{2c_0-c^1-\varepsilon n-\delta}{1+c^0},\frac{2b_0-b^1-\frac{2\hat{C}}{\varepsilon}}{a^0+b^0},2-\varepsilon n-\delta,2a_0\right\}. \tag{14}$$

Після заміни

$$y(\tau)=\int\limits_{Q^*_{\tau,T}}\left[G(u^{*,N})+|u_t^{*,N}|^2+\sum_{|\alpha|=1}\left|D^{\alpha}u_t^{*,N}\right|^2\right]dxdt$$

одержимо

$$y'(\tau) + \mu y(\tau) \leqslant \frac{2}{\delta} \int\limits_{Q^*_{\tau,T}} \left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2 dxdt$$

або

$$\frac{d}{d\tau}\left(y(\tau)e^{\mu\tau}\right) \leqslant \frac{d}{d\tau}\left(\frac{2}{\delta}\int\limits_{t_1}^{\tau} e^{\mu\theta} \int\limits_{Q^*_{\theta,T}} \left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2 dxdtd\theta\right). \tag{15}$$

Зінтегруємо останню нерівність відрізком $[t_1, t_2] \subset [t_0, T]$. Одержимо

$$y(t_2) \leqslant y(t_1)e^{\mu(t_1-t_2)} + \frac{2}{\delta}\int\limits_{t_1}^{t_2} e^{\mu(\theta-t_2)} \int\limits_{Q^*_{\theta,T}} \left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2 dxdtd\theta$$

і ще раз використаємо оцінку (13). Після цих перетворень (15) набуде вигляду

$$\int\limits_{Q^*_{t_2,T}} \left[G(u^{*,N}) + |u^{*,N}_t|^2 + \sum_{|\alpha|=1}\left|D^\alpha u^{*,N}_t\right|^2\right] dxdt \leqslant e^{\mu(t_1-t_2)} \int\limits_{Q^*_{t_1,T}} \left[G(u^{*,N}) + \right.$$

$$\left. + |u^{*,N}_t|^2 + \sum_{|\alpha|=1}\left|D^\alpha u^{*,N}_t\right|^2\right] dxdt + \frac{2}{\delta}\int\limits_{t_1}^{t_2} e^{\mu(\theta-t_2)} \int\limits_{Q^*_{\theta,T}} \left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2 dxdtd\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{\mu(t_1-t_2)}}{\mu}\left(\int\limits_{\Omega^*_{t_1}} \left[G(u^{*,N})) + |u^{*,N}_t|^2 + \sum_{|\alpha|=1}\left|D^\alpha u^{*,N}_t\right|^2\right] dx + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\delta}\int\limits_{Q^*_{t_1,T}} \left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2 dxdt\right) + \frac{2}{\delta}\int\limits_{t_1}^{t_2} e^{\mu(\theta-t_2)} \int\limits_{Q^*_{\theta,T}} \left|f^*_{t_0}(x,t)\right|^2 dxdtd\theta.$$

Отже, одержано оцінку

$$\|u^{*,N}\|_{H^1((t_0,T);H^1(\Omega^*))} \leqslant M^*, \tag{16}$$

де стала M^* залежить лише від $f^*_{t_0}$ та вибраного δ. Отже, з $\{u^{*,N}\}$ в області $Q^*_{t_0,T}$ можна вибрати підпослідовність $\{u^{*,N_k}\}$ таку, що $u^{*,N_k} \to u^*$ слабко в $H^1\left((t_0,T);H^1(\Omega^*)\right)$. Продовжимо u^* нулем на $Q_T \setminus Q^*_{t_0,T}$. Тоді для довільної функції $w \in H^1_{\mu,\mathrm{loc}}\left((-\infty,T]\,;H^1_\lambda(\Omega)\right)$ на довільному інтервалі $(t_1,t_2) \subset (-\infty,T]$ справджується рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[(u^*_t, w) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u^*_t + B_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^*, D^\beta w\right) + (C(x,t)u^*, w) - \right.$$

$$\left. - \sum_{|\alpha|=1}\left(C_\alpha(x,t)D^\alpha u^*, w\right)\right] dxdt + \gamma\int\limits_{t_1}^{t_2}\langle B(u^* + u^*_t), w\rangle dt = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left(f^*_{t_0}(x,t), w\right) dxdt. \tag{17}$$

Приймемо в (17) $w = (u_t^* + u^*)e^{-\lambda|x|+\mu t}$, $t_1 = \tau$, перегрупуємо доданки та зінтегруємо частинами. Отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} G(u^*)e^{-\lambda|x|+\mu t_2}dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} G(u^*)e^{-\lambda|x|+\mu\tau}dx+$$
$$+\int\limits_{Q_{\tau,t_2}}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_t^*, D^\beta D^\beta u_t^*\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\Bigg(\Bigg(B_{\alpha\beta}(x,t) - \frac{1}{2}B_{\alpha\beta t}(x,t)-$$
$$-\frac{\mu}{2}\left(A_{\alpha\beta}(x) + B_{\alpha\beta}(x,t)\right)\Bigg)D^\alpha u^*, D^\beta u^*\Bigg) - \sum_{|\alpha|=1}\left(C_\alpha(x,t)D^\alpha u^*, u_t^* + u^*\right)+ \tag{18}$$
$$+\left(\left(C(x,t) - \frac{1}{2}C_t(x,t) - \frac{1}{2}\left(I + C(x,t)\right)\right)u^*, u^*\right) + |u_t^*|^2 -$$
$$-\lambda\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_t^* + B_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^*, u_t^* + u^*\right)\frac{x^\beta}{|x|}\Bigg]e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt =$$
$$= \int\limits_{Q_{\tau,t_2}}\left(f_{t_0}^*(x,t), u_t^* + u^*\right)e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt.$$

Після нескладних перетворень із рівності (18) можна одержати таку оцінку:

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} G(u^*)e^{-\lambda|x|+\mu\tau}dx + \int\limits_{Q_{\tau,t_2}}\Bigg[|u_t^*|^2\left(1 - \frac{\delta}{2} - \frac{\varepsilon n}{2} - \varepsilon n^2\lambda\right) +$$
$$+\frac{2b_0 - b^1 - \mu(a^0 + b^0) - \frac{2\lambda\hat{B}n}{\varepsilon} - \frac{2\hat{C}}{\varepsilon}}{2(a^0 + b^0)}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(\left(A_{\alpha\beta}(x) + B_{\alpha\beta}(x,t)\right)D^\alpha u^*, D^\beta u^*\right) +$$
$$+\frac{2c_0 - c^1 - \mu(1 + c^0) - \delta - \varepsilon n - 2\varepsilon n^2\lambda}{2(1 + c^0)}\left(\left(I + C(x,t)\right)u^*, u^*\right) + \tag{19}$$
$$+\left(a_0 - \frac{\lambda\hat{A}n}{\varepsilon}\right)\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u_t^*|^2\Bigg]e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt \leqslant \frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_{\tau,t_2}}\left|f_{t_0}^*(x,t)\right|^2 e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt.$$

Враховуючи умови теореми, з (19) отримуємо нерівність

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[G(u^*) + |u_t^*|^2 + \sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u_t^*|^2\Bigg]e^{-\lambda|x|+\mu\tau}dx+$$
$$+\frac{\mu}{2}\int\limits_{Q_{\tau,t_2}}\Bigg[G(u^*) + |u_t^*|^2 + \sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u_t^*|^2\Bigg]e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt \leqslant \tag{20}$$
$$\leqslant \frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_{\tau,t_2}}\left|f_{t_0}^*(x,t)\right|^2 e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt \leqslant \frac{1}{\delta}\int\limits_{Q_{\tau,t_2}}|f(x,t)|^2 e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt.$$

З останньої нерівності аналогічними до вищенаведених міркуваннями приходимо до оцінки

$$\|u^*\|_{H^1_\mu\left((-\infty,T];H^1_\lambda(\Omega)\right)} \leqslant M, \tag{21}$$

де стала M залежить лише від функції f та вибраного δ.

Не обмежуючи загальності, приймемо, що $\Pi = N$, $\Omega_k = \{x \in \Omega : |x| < k\}$. Тоді для довільного $k \in N$ задача (7)-(9) має слабкий розв'язок u^k в області $Q^k = \Omega_k \times [T-k, T]$. Продовжимо цей розв'язок нулем на $Q_T \setminus Q^k$. Оскільки $\Omega^* \subset \{\Omega_k\}$, то для кожного u^k, $k \in N$ правильна оцінка (21) і тому в Q^1 з послідовності $\{u^k\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{u^{k,1}\}$, що $u^{k,1} \to u_1$ слабко в $H^1_\mu\left([T-1,T]; H^1_\lambda(\Omega_1)\right)$.

В Q^2 з $\{u^{k,1}\}$ вибираємо підпослідовність $\{u^{k,2}\}$, яка теж слабко збігається до деякого u_2 в $H^1_\mu\left([T-2,T]; H^1_\lambda(\Omega_2)\right)$ і т.д. При такому виборі очевидним є те, що u_s є продовженням u_k на Q^s при $s > k$ і $u_k = u_s$ в Q^k.

Тепер виберемо діагональну підпослідовність $\{u^{k,k}\}$ і визначимо функцію u так: $u(x,t) = u_k(x,t)$, якщо $(x,t) \in Q^k$.

З вищенаведених міркувань та з вибору $\{u^{k,k}\}$ і u легко бачити, що $u^{k,k} \to u$ слабко в $H^1_\mu\left((-\infty,T]; H^1_\lambda(\Omega)\right)$. Також очевидно, що знайдена функція u і буде розв'язком задачі Фур'є для системи рівнянь (6) в Q_T, тобто для будь-яких проміжків $(t_1,t_2) \in (-\infty,T]$ та довільної функції $w \in H^1_\mu\left((-\infty,T]; H^1_\lambda(\Omega)\right)$ виконується

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[(u_t,w) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha u_t + B_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u, D^\beta w\right) + (C(x,t)u,w) -$$

$$- \sum_{|\alpha|=1} \left(C_\alpha(x,t)D^\alpha u, w\right)\Bigg]\, dxdt + \gamma\int\limits_{t_1}^{t_2} \langle B(u+u_t), w\rangle dt = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (f(x,t),w)\, dxdt. \tag{22}$$

Оскільки мета цієї праці – дослідити умови існування розв'язку системи варіаційних нерівностей, то перейдемо від задачі Фур'є для системи (6) до задачі (1) так: приймемо в (22) $w = (v_t + v - u_t - u)e^{-\lambda|x|+\mu t}$. Після звичайного інтегрування частинами та перегрупування доданків отримуємо

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[(v_t - f(x,t), v_t + v - u_t - u) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha v_t + B_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha v,\right.$$

$$\left.D^\beta\left(v_t + v - u_t - u\right)\right) - \sum_{|\alpha|=1} \left(C_\alpha(x,t)D^\alpha u, v_t + v - u_t - u\right) - |v_t - u_t|^2 +$$

$$+ (C(x,t)v, v_t + v - u_t - u) - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x)D^\alpha\left(v_t - u_t\right), D^\beta\left(v_t - u_t\right)\right) -$$

$$- \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(\left(B_{\alpha\beta}(x,t) - \frac{1}{2}B_{\alpha\beta t}(x,t) - \frac{\mu}{2}\left(A_{\alpha\beta}(x) + B_{\alpha\beta}(x,t)\right)\right) D^\alpha(v-u),\right.$$

$$\left.D^\beta(v-u)\right) - \left(\left(C(x,t) - \frac{1}{2}C_t(x,t) - \frac{\mu}{2}\left(C(x,t) + I\right)\right)(v-u), v-u\right) - \tag{23}$$

$$- \lambda \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u_t + B_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u, v_t + v - u_t - u\right) \frac{x^\beta}{|x|} \Bigg] e^{-\lambda|x|+\mu t} dx dt +$$

$$+ \gamma \int_{t_1}^{t_2} \langle B(u_t + u), (v_t + v - u_t - u) e^{-\lambda|x|+\mu t} \rangle dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\Omega_{t_2}} G(v-u) e^{-\lambda|x|+\mu t_2} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{t_1}} G(v-u) e^{-\lambda|x|+\mu t_1} dx = 0.$$

З властивостей оператора штрафу B у цьому випадку випливає, що

$$\gamma \int_{t_1}^{t_2} \langle B(u_t + u) - B(v_t + v), (v_t + v - u_t - u) e^{-\lambda|x|+\mu t} \rangle dt \leqslant 0,$$

тобто для кожного конкретного γ існує розв'язок u^γ нерівності (1).

Оскільки для $\{u^\gamma\}$ правильна оцінка (21), то на підставі леми Фату одержимо, що для всіх $(T_1, T_1) \subset (-\infty, T]$

$$\int_{T_1}^{T_2} \liminf_{\gamma \to 0} \|u^\gamma(x,t)\|_V^2 \, dt \leqslant M_1,$$

тому для майже всіх $t \in [T_1, T_2]$

$$\liminf_{\gamma \to 0} \|u^\gamma(x,t)\|_V^2 < \infty.$$

Тоді існує $\tilde{T} \in [T_1, T_2]$ таке, що $\liminf\limits_{\gamma \to 0} \left\| u^\gamma(x, \tilde{T}) \right\|_V^2 < M_2$. Не обмежуючи загальності, вважатимемо $\tilde{T} = T_1$. Нехай тоді $\{u^{\gamma_m}\}$ – послідовність, для якої

$$\liminf_{\gamma \to 0} \|u^\gamma(x, T_1)\|_V^2 = \liminf_{m \to \infty} \|u^{\gamma_m}(x, T_1)\|_V^2 .$$

Тоді $\|u^{\gamma_m}(x, T_1)\|_V^2 \leqslant M_3$ для всіх $m \in N$. Зауважимо, що оцінка (21) не залежить від γ_m. Тому існує функція u, яка є слабкою границею $\{u^{\gamma_m}\}$ в просторі $H_\mu^1\left((-\infty, T]; H_\lambda^1(\Omega)\right)$ при $m \to \infty$.

Запишемо нерівність (1) для u^{γ_m}:

$$\int_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[\left(v_t - f(x,t), v_t + v - u_t^{\gamma_m} - u^{\gamma_m}\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha v_t + B_{\alpha\beta}(x,t) \times\right.$$

$$\left. \times \; D^\alpha v, D^\beta \left(v_t + v - u_t^{\gamma_m} - u^{\gamma_m}\right)\right) - \sum_{|\alpha|=1} \left(C_\alpha(x,t) D^\alpha u^{\gamma_m}, v_t + v - u_t^{\gamma_m} - u^{\gamma_m}\right) +$$

$$+ \left(C(x,t) v, v_t + v - u_t^{\gamma_m} - u^{\gamma_m}\right) - |v_t - u_t^{\gamma_m}|^2 - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha (v_t - \right.$$

$$\left. - \; u_t^{\gamma_m}), D^\beta \left(v_t - u_t^{\gamma_m}\right)\right) - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \left(\left(B_{\alpha\beta}(x,t) - \frac{1}{2} B_{\alpha\beta t}(x,t) - \right.\right. \qquad (24)$$

$$-\frac{\mu}{2}\left(A_{\alpha\beta}(x)+B_{\alpha\beta}(x,t)\right)\Big) D^{\alpha}(v-u^{\gamma_m}), D^{\beta}(v-u^{\gamma_m})\Big)-$$
$$-\left(\left(C(x,t)-\frac{\mu}{2}(C(x,t)+I)-\frac{1}{2}C_t(x,t)\right)(v-u^{\gamma_m}), v-u^{\gamma_m}\right)-$$
$$-\lambda\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_t^{\gamma_m}+B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u^{\gamma_m}, v_t+v-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m}\right)\frac{x^{\beta}}{|x|}\Bigg]\times$$
$$\times e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}}G(v-u^{\gamma_m})e^{-\lambda|x|+\mu t_2}dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}}G(v-u^{\gamma_m})e^{-\lambda|x|+\mu t_1}dx.$$

У нерівності (24) перейдемо до границі при $t_1\to-\infty$, приймемо $t_2=T$, $v=u$ і перепишемо її так:

$$\int\limits_{Q_T}\Bigg[(u_t-f(x,t), u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m})+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_t+B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u,$$
$$D^{\beta}\left(u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m}\right))+(C(x,t)u, u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m})-$$
$$-\sum_{|\alpha|=1}\left(C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}\left(u^{\gamma_m}-u\right), u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m}\right)-\sum_{|\alpha|=1}(C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u, u_t+u-$$
$$-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m})-\left|u_t^{\gamma_m}-u_t\right|^2-\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}\left(u_t^{\gamma_m}-u_t\right), D^{\beta}\left(u_t^{\gamma_m}-u_t\right)\right)-$$
$$-\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(\left(B_{\alpha\beta}(x,t)-\frac{1}{2}B_{\alpha\beta t}(x,t)-\frac{\mu}{2}\left(A_{\alpha\beta}(x)+B_{\alpha\beta}(x,t)\right)\right)D^{\alpha}\left(u^{\gamma_m}-u\right),\right.$$
$$\left.D^{\beta}\left(u^{\gamma_m}-u\right)\right)-\left(\left(C(x,t)-\frac{1}{2}C_t(x,t)-\frac{\mu}{2}\left(I+C(x,t)\right)\right)\left(u^{\gamma_m}-u\right), u^{\gamma_m}-u\right)-$$
$$-\lambda\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}\left(u_t^{\gamma_m}-u_t\right)+B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}\left(u^{\gamma_m}-u\right), u_t+u-u_t^{\gamma_m}-\right.$$
$$\left.-u^{\gamma_m}\right)\frac{x^{\beta}}{|x|}-\lambda\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\left(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_t+B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u, u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m}\right)\frac{x^{\beta}}{|x|}\Bigg]\times$$
$$\times e^{-\lambda|x|+\mu t}dxdt\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T}G\left(u^{\gamma_m}-u\right)e^{-\lambda|x|+\mu T}dx.$$

Після нескладних перетворень в останній нерівності зробимо ще один граничний перехід:

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_{Q_T}\Bigg[(u_t-f(x,t), u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m})+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_t+B_{\alpha\beta}(x,t)\times$$
$$\times D^{\alpha}u, D^{\beta}\left(u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m}\right))+(C(x,t)u, u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m})-$$
$$-\sum_{|\alpha|=1}(C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u, u_t+u-u_t^{\gamma_m}-u^{\gamma_m})-\lambda\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u_t+B_{\alpha\beta}(x,t)\times$$

$$\times D^{\alpha}u, u_t + u - u_t^{\gamma_m} - u^{\gamma_m}) \frac{x^{\beta}}{|x|}\Big] e^{-\lambda|x|+\mu t} dxdt \geqslant \lim_{m\to\infty} \Bigg\{ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_T} G\left(u^{\gamma_m} - u\right) \times$$

$$\times e^{-\lambda|x|+\mu T} dx + \int\limits_{Q_T} \Bigg[\left(1 - \frac{\varepsilon n}{2} - \lambda n^2 \varepsilon\right) \left|u_t^{\gamma_m} - u_t\right|^2 + \sum_{|\alpha|=1} \left|D^{\alpha}\left(u_t^{\gamma_m} - u_t\right)\right|^2 \times +$$

$$\times \left(a_0 - \frac{\lambda \hat{A} n}{\varepsilon}\right) + \left(b_0 - \frac{b^1}{2} - \frac{\mu(a^0 + b^0)}{2} - \frac{\hat{C}}{\varepsilon} - \frac{\lambda \hat{B} n}{\varepsilon}\right) \sum_{|\alpha|=1} \left|D^{\alpha}\left(u^{\gamma_m} - u\right)\right|^2 +$$

$$+ \left(c_0 - \frac{c^1}{2} - \frac{\mu(1 + c^0)}{2} - \frac{\varepsilon n}{2} - \lambda n^2 \varepsilon\right) \left|(u^{\gamma_m} - u)\right|^2 \Bigg] e^{-\lambda|x|+\mu t} dxdt \Bigg\}. \qquad (25)$$

Враховуючи накладені вище умови, з нерівності (25) одержуємо

$$0 \geqslant \lim_{m\to\infty} \left[\int\limits_{\Omega_T} G\left(u^{\gamma_m} - u\right) e^{-\lambda|x|+\mu T} dx + \mu \int\limits_{Q_T} G\left(u^{\gamma_m} - u\right) e^{-\lambda|x|+\mu t} dxdt \right],$$

тобто

$$\lim_{m\to\infty} \|u^{\gamma_m} - u\|_{H^1_{\lambda}(\Omega)} = 0.$$

Тому перехід до границі при $m \to \infty$ у нерівності (24) є обґрунтованим. Отже, знайдена функція u є розв'язком нерівності (1). Теорему доведено.

---

1. *Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. мат. и мех. – 1960. – Т.24. – Вып. 5.– С.852-864.
2. *Рубинштейн Л.И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. География и геофизика. – 1948. – Т.12. – N.I. – С.27–45.
3. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. – М., 1976.
4. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
5. *Showalter R.E.* Pseudoparabolic partial differential equations: Doct. diss. Univ. III. – 1968. – 75 p.p.// Dissert. Abstrs. – 1969. – B29. – N.8. – P.2994.
6. *Showalter R.E.* Partial differential equations of Sobolew-Galperin type // Pacif. J. Math. – 1969. – Vol.31. – N.3. – P.787–793.
7. *Rundell W.* The solution of initial–boundary value problem for pseudoparabolic partial differential equations// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1976. – A74. – P.311–326.
8. *Rundell W., Stecher M.* A method of ascent for parabolic and pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. – 1976. – Vol.7. – N.6. – P.898–912.
9. *Rundell W.* The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – Vol.76. – N.2. – P.253–257.

10. *Колінько М.О., Лавренюк С.П.* Єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї нелінійної псевдопараболічної системи // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип.45. – С.71–77.

11. *Lavrenyuk S.P., Kolinko M.O.* Fourier problem for linear Sobolev-Halperin system // Demonstratio mathematica. – 1998. – Vol.31. – N1. – P.26–32.

12. *Лавренюк С.П., Пташник М.Б.* Деякі нелінійні псевдопараболічні варіаційні нерівності без початкових умов // Укр. мат. журн. – 1999. – Т.51. – N3. – С.328–337.

13. *Доманська Г.П.* Задача Фур'є для однієї псевдопараболічної системи // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.49. – С.104–112.

14. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М., 1972.

G. Domans'ka

THE FOURIER PROBLEM FOR THE SYSTEM OF PSEUDOPARASBOLIC VARIATIONAL INEQUALITIES IN UNBOUNDED DOMAIN

A problem without initial data for the system of pseudoparabolic variational inequalities in unbounded (on space variables) domain is considered. The existence and the uniqueness of the solution of this problem are proved.

Стаття надійшла до редколегії 23.06.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.72–79

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.72–79

УДК 531

Петро Доманський

ОЦІНКИ БЕЗПЕЧНОГО СТОСОВНО ДВОХ МІР НАВАНТАЖЕННЯ ПРУЖНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ

Постановка задачі про безпечне навантаження пружних тіл належить Холдену (J.T.Hol-den, 1964) [1]. Дослідження її було продовжено в публікаціях Бітті (M.F.Beatty, 1969-1971) (див. [2]). Для оцінки критичних навантажень суттєво використовують нерівності Корна, Холдена, Бітті, а також умови сталості в об'ємі тіла тензора напружень Коші і міри деформації Фінгера. Параметри безпечного навантаження визначають через сталу Корна, точне значення якої відоме лише для кулі. У цій праці постановка задачі про безпечне навантаження природно одержана в процесі загального дослідження стійкості руху пружних тіл за двома конкретними мірами. Розв'язання її для пружного за Гріном тіла (без обмежень на напружено-деформований стан) зведено до знаходження екстремалей певної ізопериметричної задачі і дослідження додатної знакосталості інтегральної квадратичної форми на цих екстремалях.

1. Формулювання задачі. Розглянемо ізотропне пружне тіло K. Розрізняємо три конфігурації цього тіла: γ_0, γ_τ, γ_τ^*. Першу з них назвемо відліковою, а дві інші – актуальними. Відлікова γ_0-конфігурація вважається природною (недеформованою), коли в тілі відсутні напруження і деформації. Область відлікової конфігурації і поверхню, що її обмежує, позначатимемо через X_0 і ∂X_0 відповідно. Актуальну γ_τ-конфігурацію назвемо базовою (незбуреною). Вона виникла внаслідок дії на тіло K з моменту часу $\tau = \tau_0$ масових і поверхневих сил, які задані на всій поверхні тіла K. Другу актуальну γ_τ^* -конфігурацію, яка відповідає збуренню початкових умов у γ_τ-конфігурації, будемо називати збуреною. Місце точки $k_0 \in K$ в γ_0, γ_τ, γ_τ^*-конфігураціях визначаємо радіусом-векторами $\vec{r_0} = \vec{r_0}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $\vec{r} = \vec{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau) = \vec{r_0} + \vec{u_0}$, $\vec{r_*} = \vec{r_*}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau) = \vec{r_0} + \vec{u_*}$ відповідно, де $\vec{u_0}$, $\vec{u_*}$ – вектори переміщень із γ_0 в γ_τ і γ_τ^* -конфігурації; $\{\xi^i\}$ – лагранжеві координати, за які приймаємо координати місця точки $k_0 \in K$ у відліковій конфігурації в єдиній для всіх конфігурацій нерухомій у просторі прямокутній декартовій системі координат, $\vec{r_0} = \xi^1 \vec{\ni}_1^0 + \xi^2 \vec{\ni}_2^0 + \xi^3 \vec{\ni}_3^0 \equiv \xi^i \vec{\ni}_i^0$. Напружений стан γ_τ і γ_τ^*-конфігурацій визначаємо тензорами напружень Піоли-Кірхгофа $\hat{P}_0 = \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r})$ і $\hat{P}_* = \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r_*})$ відповідно, де $\hat{P}_0$ – тензорна функція, що характеризує зв'язок між тензором напружень і градієнтом місця; $\vec{\nabla}_0 = \vec{\ni}_0^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ – набла-оператор Гамільтона в γ_0-конфігурації; $\left\{\vec{\ni}_0^i\right\}$ – база, біортогональна до бази $\left\{\vec{\ni}_i^0\right\}$; "$\otimes$" – операція тензорного (зовнішнього) добутку. Приймаємо, що $\vec{u_*} = \vec{u_0} + \vec{u}$, $\hat{P}_* = \hat{P}_0 + \hat{P}$. Величини $\hat{P}$ і $\vec{u}$ назвемо збуренням (варіацією) тензора напружень Піоли-Кірхгофа і вектора переміщення в γ_τ-конфігурації відповідно.

Вважаючи, що напружено-деформований стан γ_τ-конфігурації відомий, у праці [3] виведено рівняння стійкості руху тіла K стосовно збурень

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P} + \rho_0(\vec{f}_* - \vec{f}_0) = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}, \tag{1}$$

де $\vec{f}_0$ – вектор масових сил; $\vec{f}_*$ – його значення в γ_τ^*-конфігурації; ρ_0 – густина розподілу маси щодо γ_0-конфігурації; " $\cdot$ " – операція скалярного (внутрішнього) множення.

Введемо силовий тензор [4] в γ_τ -конфігурації

$$\hat{B} = \int\limits_{X_0} \rho_0 \vec{f}_0 \otimes \vec{r} dV_0 + \int\limits_{\partial X_0} \vec{g}_0 \otimes \vec{r} d\Sigma_0.$$

Тут $\vec{g}_0 = \vec{g} d\Sigma / d\Sigma_0$; $\vec{g}$ – вектор поверхневих сил, віднесений до одиниці площі γ_τ-конфігурації; $d\Sigma_0, d\Sigma$ – площі елементарної поверхні в γ_0 і γ_τ -конфігураціях відповідно. У праці [4] показано, що подвоєна кососиметрична частина цього тензора визначається через головний момент $\vec{m}_0$ масових і поверхневих сил, а саме:

$$\hat{B} - \hat{B}^T = \hat{I} \times \vec{m}_0, \tag{2}$$

де $\hat{I}$ – одиничний тензор, "$\times$" – операція векторного множення, індексом " T " позначено операцію транспонування.

Надалі масове і поверхневе навантаження вважаємо "мертвим". Тоді $\vec{f}_* = \vec{f}_0$, $\vec{g} d\Sigma = \vec{g}_* d\Sigma_*$, де $\vec{g}_*$ – значення вектора поверхневих сил в γ_τ^*-конфігурації, $d\Sigma_*$ – площа елементарної поверхні в γ_τ^*-конфігурації. Внаслідок цього рівняння стійкості руху (1) набуде вигляду

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P} = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}. \tag{3}$$

Можна також показати, що

$$\hat{B}_* - \hat{B}_*^T = \hat{B} - \hat{B}^T + \int\limits_{X_0} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial^2 \vec{u}_0}{\partial \tau^2} \otimes \vec{u} - \vec{u} \otimes \frac{\partial^2 \vec{u}_0}{\partial \tau^2} \right) + \right.$$
$$\left. + \hat{P}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \hat{P}_0 \right] dV_0, \tag{4}$$

де $\hat{B}_*$ – силовий тензор в γ_τ^* -конфігурації.

Якщо лінеаризувати рівняння стійкості руху (3) в околі базової конфігурації, тобто наближено прийняти, що $\hat{P} = \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}_*) - \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) \approx \hat{P}_0^\bullet(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0)$, де $\hat{P}_0^\bullet$ – лінійна стосовно аргумента $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$ функція, то одержимо лінеаризоване рівняння стійкості руху при великих (скінченних) початкових деформаціях

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P}_0^\bullet = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}. \tag{5}$$

У тих випадках, коли певні компоненти тензора деформації є нехтовно малими, можна виділити інші спрощені варіанти лінеаризованих рівнянь стійкості руху, зокрема, при малих початкових деформаціях.

Рівняння (5) при будь-яких граничних умовах стосовно збурень має розв'язок $\vec{u} \equiv 0$. При дослідженні стійкості цього розв'язку за міри відхилення базового розв'язку від збуреного приймаємо функціонали

$$d_0[h(\cdot,\tau)] = \int\limits_{X_0} \left[\vartheta \vec{u}^2 + \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)^2 + |\hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0| \right] dV_0, \tag{6}$$

$$d[h(\cdot,\tau)] = \int\limits_{X_0} \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)^2 dV_0, \tag{7}$$

визначені на функціях $h(\vec{r_0},\tau) = \left(\vec{u}(\vec{r_0},\tau), \frac{\partial \vec{u}(\vec{r_0},\tau)}{\partial \tau} \right)$, де $\vec{u}$ – розв'язки рівняння (5), ϑ – розмірна стала. Очевидно, що $d_0[0] = d[0] = 0$.

Означення 1. *Розв'язок $\vec{u} \equiv 0$ називаємо стійким за мірами (6), (7), якщо*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall h)\,(\forall \tau \geqslant \tau_0)\,[d_0\,[h(\cdot,\tau_0)] < \delta \Longrightarrow d\,[h(\cdot,\tau)] < \varepsilon]\,.$$

Розглянемо функціонал

$$V[h(\cdot,\tau)] = \int\limits_{X_0} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)^2 + \hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 \right] dV_0. \tag{8}$$

Функціонали d і V є неперервними в момент часу $\tau = \tau_0$ за мірою d_0 при $d_0 = 0$ [5] і функціонал (8) є додатно означеним за мірою d, якщо виконується нерівність

$$W[\vec{u}] = \int\limits_{X_0} \hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 dV_0 \geqslant 0. \tag{9}$$

Якщо врахувати, що для тензора $\hat{P}_0^{\bullet}$ характерною є властивість взаємності [4] і використати формулу Гауса-Остроградського, то можна показати, що

$$\frac{dV}{d\tau} = \int\limits_{X_0} \left[2 \left(\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} - \vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet} \right) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + \hat{L} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 \right] dV_0 + 2 \int\limits_{\partial X_0} \vec{n_0} \cdot \hat{P}_0^{\bullet} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} d\Sigma_0, \tag{10}$$

де $\hat{L} = \hat{P}_0^{\bullet} \left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u_0} \right)$ – лінійна тензорна функція (вона дорівнює нулю, коли градієнт $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u_0}$ базового розв'язку не залежить від часу), $\vec{n_0}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні ∂X_0.

Збурення вектора переміщення $\vec{u}$, які згідно з їхнім означенням, повинні узгоджуватися з в'язями, що накладаються на тіло, підпорядкуємо додатковим обмеженням, а саме: на тій частині поверхні $\partial X_1 \subset \partial X_0$, на якій задано вектор переміщення, вимагаємо, щоб

$$\vec{u} = 0. \tag{11}$$

Аналогічно, якщо на $\partial X_2 \subset \partial X_0$ задається i-на компонента вектора переміщення, то на ∂X_2

$$\vec{\ni}_i^{\,0} \cdot \vec{u} = 0. \tag{12}$$

Оскільки поверхневе навантаження тіла K є "мертвим", а збурення вектора переміщення підпорядковуються додатковим обмеженням (11), (12), то з теореми про стійкість руху за двома мірами систем із розподіленими параметрами [5,6] і формул (9), (10) випливає теорема 1.

Теорема 1. *Якщо градієнт базового розв'язку $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u_0}$ не залежить від часу, то достатньою умовою стійкості розв'язку $\vec{u} \equiv 0$ рівняння (5) за мірами (6), (7) є виконання нерівності (9).*

На базовий розв'язок накладатимемо сильніші обмеження, ніж це передбачено в теоремі 1, а саме: приймаємо, що сам вектор $\vec{u_0}$ не залежить від часу. Нехай, крім того, поверхневе навантаження тіла K є таким, що його головний момент в γ_τ і γ_τ^*-конфігураціях дорівнює нулю. Тоді, згідно з (2) і (4), збурення вектора переміщення повинні підпорядковуватися співвідношенню

$$\int\limits_{X_0} \left(\hat{P}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \hat{P}_0 \right) dV_0 = 0. \tag{13}$$

Означення 2. *Навантаження тіла K, для якого виконується нерівність (9) при будь-яких збуреннях вектора переміщення $\vec{u}$, що справджують рівняння (13), називаємо безпечним.*

Таке означення безпечного навантаження було запропоновано Холденом. Ми його одержали в результаті дослідження стійкості нульового розв'язку лінеаризованого рівняння стійкості руху (5) за мірами (6), (7). Тому так означене безпечне навантаження можна назвати безпечним навантаженням тіла K стосовно мір (6), (7). Якщо замість (6), (7) вибрати інші міри відхилення базового розв'язку від збуреного $d_{0н}, d_н$, то забезпечення виконання достатніх умов стійкості руху за новими мірами приведе, взагалі кажучи, до заміни інтегральної умови (9) іншою і як наслідок одержимо постановку задачі про безпечне навантаження стосовно мір $d_{0н}$ і $d_н$. Зауважимо, що нові постановки задач про безпечне стосовно двох мір навантаження пружних тіл можна отримати, якщо запропонувати відмінні, від наведених вище, обмеження на характер зовнішньої дії, що призведе до інших, ніж (13), в'язей на збурення вектора переміщення.

Задачу про відшукання безпечного (згідно з означенням 2) навантаження можна звести до знаходження екстремалей квадратичного функціонала $W[u]$ при лінійних ізопериметричних умовах (13). Якщо після цього знайти значення функціонала $W[u]$ на знайдених екстремалях, то з умови, що воно є більшим або дорівнює нулю, знайдемо область зміни параметрів силового навантаження, яка є областю стійкості тіла K.

2. Формулювання задачі для циліндричного тіла. Приймаємо, що в γ_0-конфігурації тіло K є циліндричним сталого поперечного перерізу D, два характерні розміри якого значно менші від висоти. Положення точок осі тіла будемо характеризувати радіусом-вектором $\vec{r}_{30} = \xi^3 \vec{\ni}_3^0$, де ξ^3 - осьова координата $(0 \leqslant \xi^3 \leqslant l)$, $\vec{\ni}_3^0$ – базовий орт у напрямі цієї осі. Положення довільної точки $x_0 \in X_0$ визначаємо радіусом-вектором

$$\vec{r}_0 = \vec{R}_0 + \vec{r}_{30}, \quad \vec{R}_0 = \vec{R}_0(\xi^1, \xi^2) = \xi^\alpha \vec{\ni}_\alpha^0 \quad (\alpha = 1, 2), \quad (\xi^1, \xi^2) \in D.$$

Подамо збурення вектора переміщення $\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{r}_{30} + \vec{R}_0; \tau\right)$ у вигляді розвинення за заданою базою тензорних функцій $\left\{\hat{\Phi}^{(i-1)}\left(\vec{R}_0\right)\right\}$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \cdot \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{30}; \tau), \tag{14}$$

де індекси "$(i-1)$" та "(i)" свідчать про ранг тензорних функцій, "$\overset{i}{\cdot}$" означає i-кратний внутрішній добуток тензорів.

Як випливає з формули Тейлора для відображення одного нормованого простору в інший за базу можна вибрати, зокрема, систему тензорних функцій $\left\{\vec{R}_0^n\right\}$, де $\vec{R}_0^n$ – n-кратний зовнішній (тензорний) добуток вектора $\vec{R}_0$ на себе.

Підставимо (14) в (9) і (13). В результаті одержимо відповідно

$$W[\vec{u}] = W_1\left[\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}\right] = \int_0^l \sum_{m,n=1}^{N} \left(\hat{M}^{(m+n)} \overset{m+n}{\cdot} \hat{P}_3^{(n)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(m)}}{\partial \xi^3} + \right.$$

$$\left. + \delta^{\alpha\beta} \hat{K}_\alpha^{(m+n)} \overset{m+n}{\cdot} \hat{P}_\beta^{(n)} \otimes \hat{u}^{(m)}\right) d\xi^3 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{15}$$

$$\int_0^l \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{A}^{(i+2)} \overset{i}{\cdot} \hat{u}^{(i)} + \hat{B}^{(i+2)} \overset{i}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(i)}}{\partial \xi^3}\right) d\xi^3 = 0. \tag{16}$$

Тут

$$\hat{M}^{(m+n)} = \int_D \vec{\ni}_0^k \otimes \hat{\Phi}^{(m-1)} \otimes \vec{\ni}_k^0 \otimes \hat{\Phi}^{(n-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{A}^{(i+2)} = \int_D p^{\alpha j} \hat{S}_j^{(3)} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0,$$

$$\hat{K}_\alpha^{(m+n)} = \int_D \vec{\ni}_0^k \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(m-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \vec{\ni}_k^0 \otimes \hat{\Phi}^{(n-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{B}^{(i+2)} = \int_D p^{3j} \hat{S}_j^{(3)} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} d\Sigma_0,$$

$\hat{S}_j^{(3)} = \vec{\ni}_j^0 \otimes \hat{I} - \vec{\ni}_0^k \otimes \vec{\ni}_j^0 \otimes \vec{\ni}_k^0$, $\quad \hat{P}_j^{(n)}$ – коефіцієнти розвинення векторів $\vec{P}_j^\bullet = \vec{\ni}_j^0 \cdot \hat{P}_0^\bullet$ за базою $\left\{\hat{\Phi}^{(n-1)}\right\}$, $\quad p^{kn}$ – компоненти тензора $\hat{P}_0$, $\quad \delta^{\alpha\beta}$ – символи Кронекера.

Якщо знайти екстремалі ізопериметричної задачі (15), (16) і підставити їх в (15), то одержимо квадратичну форму стосовно сталих інтегрування. З умови додатної знакосталості одержаної квадратичної форми знайдемо область зміни параметрів силового навантаження, яка є областю стійкості тіла K, а параметри силового навантаження, які належать цій області, є параметрами безпечного навантаження.

3. Циліндричне тіло під дією осьового навантаження. Нехай циліндричне тіло зі стандартного матеріалу другого порядку [7] перебуває під дією рівномірно розподіленого граничними поперечними перерізами осьового стискуючого навантаження інтенсивності N_0. Бічну поверхню вважаємо вільною від силових навантажень. Нехай область D має площу s_0 і її моменти інерції стосовно обох координатних осей є однаковими і дорівнюють J, а відцентровий момент і моменти першого порядку дорівнюють нулю. Знайдемо умови безпечного навантаження.

Тензор Піоли-Кірхгофа для вибраного матеріалу є многочленом третього степеня стосовно градієнта $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0$. Обмежимося розглядом одного з варіантів лінеаризованої теорії стійкості руху при малих початкових деформаціях: розглянемо тензор Піоли-Кірхгофа з точністю до членів другого порядку

$$\hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) = (\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0) \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) + \frac{\lambda}{2} \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \hat{I} + \mu \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0, \tag{17}$$

де

$$\hat{T}(\vec{u}_0) = \lambda \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{I} + 2\mu \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0), \qquad \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) = (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 + \vec{u}_0 \otimes \vec{\nabla}_0)/2$$

-тензор напружень Коші і тензор деформації лінійної теорії пружності; λ, μ – сталі Ляме.

Тепер $\hat{P}_0^{\bullet}$ є лінійною функцією градієнта базового розв'язку

$$\hat{P}_0^{\bullet}(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0) = (\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0) \cdot \hat{T}(\vec{u}) + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) +$$
$$+ \lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \hat{I} + \mu(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0).$$

За базовий виберемо розв'язок відповідної задачі, сформульованої в рамках статичної лінійної теорії пружності [4]

$$\vec{u_0} = Q\left[\nu\left(\xi^1 \vec{\ni}_1^0 + \xi^2 \vec{\ni}_2^0\right) - \xi^3 \vec{\ni}_3^0\right], \tag{19}$$

де $Q = N_0/Es_0$, $\nu = \lambda/(2(\lambda+\mu))$ – коефіцієнт Пуассона, $E = 2\mu(1+\nu)$ – модуль пружності.

Для спрощення обчислень знехтуємо деформацією базової конфігурації, тобто замість формул (17), (18) приймаємо, що

$$\hat{P}_0 = \hat{T}(\vec{u}_0), \quad \hat{P}_0^{\bullet} = \hat{T}(\vec{u}) + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \hat{T}(\vec{u}_0).$$

Із (19) знаходимо

$$\hat{T}(\vec{u}_0) = -QE \vec{\ni}_3^0 \otimes \vec{\ni}_3^0.$$

За базу розвинення збурення вектора переміщення виберемо $\left\{\vec{R}_0^n\right\}$ і обмежимося у формулі (14) двома доданками, тобто приймаємо, що $\vec{u} = \hat{u}^{(1)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{u}^{(2)}$. Нехай $\hat{u}^{(1)} = u_k \vec{\ni}_0^k$, $\hat{u}^{(2)} = u_{\alpha k} \vec{\ni}_0^\alpha \otimes \vec{\ni}_0^k$. Для випадку, що розглядається, формули (15), (16) наберуть відповідно вигляду

$$W_1\left[\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}\right] = s_0 \int_0^l \left\{\lambda(u_{11}+u_{22})\left(u_{11}+u_{22}+2\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right) + \frac{\mu J}{s_0}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial \xi^3}\right)^2 + \right.$$
$$+\mu\left[(u_{12}+u_{21})^2 + \sum_{\alpha=1}^{2}\left(2u_{\alpha\alpha}^2 + \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)^2 + 2u_{\alpha 3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)\right] + (\mu - QE)\left(u_{13}^2 + u_{23}^2\right) +$$
$$\left. + (\lambda + 2\mu - QE)\left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right)^2 + \frac{J}{s_0}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\right]\right\} d\xi^3,$$

$$s_0 QE \int\limits_0^l \frac{\partial u_k}{\partial \xi^3}\left(\vec{\ni}_0^k \otimes \vec{\ni}_0^3 - \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^k\right) d\xi^3 = 0. \tag{20}$$

Можна переконатися у такому: коли $N_0 \leqslant s_0 E$, то

$$W_1\left[\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}\right] \geqslant W_2\left[\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}\right] = s_0 \int_0^l \sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\frac{J}{s_0}(\lambda + 2\mu - QE)\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + (\mu - QE)\, u_{\alpha 3}^2 + \mu\left[\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)^2 + 2u_{\alpha 3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right]\right\} d\xi^3.$$

З необхідної умови екстремуму функціонала W_2 при ізопериметричних умовах (20) одержуємо систему рівнянь Ейлера

$$\frac{J}{s_0}\left(\lambda+2\mu-QE\right)\frac{\partial^2 u_{\alpha 3}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}-\left(\mu-QE\right)u_{\alpha 3}-\mu\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}=0,$$
$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\left(\partial\xi^3\right)^2}+\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial\xi^3}=0.$$

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд

$$u_\alpha=\frac{1}{s_2}\left(c_{1\alpha}\cos s_2\xi^3-c_{2\alpha}\sin s_2\xi^3\right)+\left(1-\frac{\mu}{QE}\right)c_{3\alpha}\xi^3+c_{4\alpha},$$
$$u_{\alpha 3}=c_{1\alpha}\sin s_2\xi^3+c_{2\alpha}\cos s_2\xi^3+\frac{\mu}{QE}c_{3\alpha}, \tag{22}$$

де $c_{k\alpha}(k=\overline{1,4};\alpha=1,2)$ – довільні функції від часу,

$$s_2^2=\frac{s_0QE}{J(\lambda+2\mu-QE)}.$$

Якщо підставити функції (22) у вираз (21) для функціонала W_2, провести інтегрування і врахувати ізопериметричні умови (20), які можна записати у вигляді $u_\alpha(l,\tau)--u_\alpha(0,\tau)=0$, то одержимо

$$W_2=\frac{s_0}{s_2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{c_{1\alpha}^2\left[A\sin 2s_2l+C(1-\cos s_2l)^2\right]+c_{2\alpha}^2\left(C\sin^2 s_2l-\right.\right.$$
$$\left.\left.-A\sin 2s_2l\right)+2c_{1\alpha}c_{2\alpha}\left[C\sin s_2l(1-\cos s_2l)-A(1-\cos 2s_2l)\right]\right\}, \tag{23}$$

де

$$A=\frac{QE}{2}=\frac{s_2^2J(\lambda+2\mu)}{2(s_0+s_2^2J)},\quad C=\frac{\mu QE}{s_2l(\mu-QE)}=\frac{\mu(\lambda+2\mu)s_2^2J}{s_2l[\mu s_0-(\lambda+\mu)s_2^2J]}.$$

З умов додатної знакосталості квадратичної форми (23) випливає така оцінка безпечного навантаження:

$$N_0\leqslant(\lambda+2\mu)M,\qquad M=\pi^2J/\left(l^2\left(1+\pi^2J/l^2s_0\right)\right). \tag{24}$$

Якщо замість формули (21) врахувати грубшу оцінку

$$W_1\left[\left\{\hat u^{(i)}\right\}\right]\geqslant W_2\left[\left\{\hat u^{(i)}\right\}\right]\geqslant W_2\left[\left\{\hat u^{(i)}\right\}\right]|_{\lambda=0},$$

то аналогічно можна отримати

$$N_0\leqslant 2\mu M. \tag{25}$$

Приймемо в першій з формул (24) і у формулі (25), що $\nu=0$. Тоді в обох випадках максимальне значення безпечного навантаження становитиме $N_б=EM$.

Порівняємо одержаний вираз з ейлеровою критичною силою $N_E=4E\pi^2J/l^2$ для стержня, краї якого защемлені. Оскільки довжина l стержня набагато більша від характерного розміру поперечного перерізу, то наближено $N_E/N_б=4$.

Оцінка безпечного навантаження, що одержана при використанні нерівностей Корна, Холдена, Бітті, наводиться в монографії [4]

$$N_0 \leqslant 2\mu s_0/(k+1), \tag{26}$$

де k – стала Корна. Формули (25) і (26) збігаються, якщо

$$k = s_0 l^2/\pi^2 J. \tag{27}$$

Зокрема, наближене значення сталої Корна для стержня, в поперечному перерізі якого є квадрат із стороною a, згідно з (27) становитиме

$$k = 12l^2/\pi^2 a^2,$$

а для стержня з круговим поперечним перерізом радіуса r має вигляд

$$k = 4l^2/\pi^2 r^2.$$

---

1. *Holden J.T.* Estimation of critical loads in elastic stability theory// Arch. Rational Mech. and Anal. – 1964. – Vol.17. – P.171-183.
2. *Beatty M.F.* Estimation of ultimate safe loads in elastic stability theory // J. Elasticity. – 1971. – Vol. – N2. – P.95-129.
3. *Доманський П.П.* Метод розкладу за тензорними функціями в побудові рівнянь стійкості руху пружних циліндричних тіл //Доп. НАН України. – 1997. – N6. – С.53-59.
4. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости.– М., 1980.
5. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределёнными параметрами. – Новосибирск, 1987.
6. *Мовчан А.А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // Прикл. мат. и мех. – 1960. – Т. XXIX. – С.3-20.
7. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчётах. – Л., 1986.

P. Domans'kyj

ESTIMATIONS OF SAFE WITH RESPECT TO TWO MEASURES LOAD OF ELASTIC CYLINDRICAL SOLIDS

Elastic solids safe loading problem definitions with respect to two measures are suggested. The safe load parameters deriving method for cylindrical solids is prepared and such parameters for special loading case are determined. It is done the comparative analysis for these results.

Стаття надійшла до редколегії 10.11.98

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.80–90

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.80–90

УДК 517.927

Юрій Жерновий

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ТА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЧАСТКОВО РОЗВ'ЯЗАНИХ СТОСОВНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ

1. Вступ. Умови розв'язності задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$x' = f(t, x) \tag{1}$$

та крайових задач для рівняння другого порядку

$$x'' = f(t, x, x'), \qquad t \in I = [a, b] \tag{2}$$

добре відомі [1, с.19-22, 491-511; 2, с.191-241; 3, с.109-120; 4-6]. Методи дослідження, які застосовували на початковому етапі розвитку теорії звичайних диференціальних рівнянь, зумовили відсутність старших похідних у правих частинах рівнянь (1), (2). Сучасна математика надала в розпорядження дослідників потужний апарат, який значно розширив можливості вивчення нелінійних задач, зокрема, дав змогу розглядати рівняння, частково розв'язані стосовно старшої похідної. У праці [7] чисельно-аналітичний метод [8] узагальнено на крайову задачу для системи нелінійних диференціальних рівнянь вигляду $x' = f(t, x, x', \Lambda)$ з параметрами $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ та двоточковими крайовими умовами, які також містять параметр.

У цій праці доведено аналоги теорем Пікара-Ліндельофа і Пеано [1,с.19-22] для системи диференціальних рівнянь першого порядку $x' = f(t, x, x')$, а також вивчено питання про розв'язність деяких двоточкових крайових задач для системи рівнянь другого порядку

$$x'' = f(t, x, x', x''), \qquad t \in I, \tag{3}$$

зокрема, доведено аналоги теорем Пікара і Скорца-Драгоні [1, с.497-499] і розглянуто випадок необмежених правих частин у системі (3).

Треба відзначити, що використання теореми про неявну функцію з метою розв'язання рівнянь стосовно старшої похідної і подальшого використання класичних теорем про розв'язність задачі Коші чи крайових задач, не може гарантувати існування розв'язку цих задач для $t \in I$, де I – довільний наперед заданий відрізок, оскільки ця теорема має локальний характер, тобто забезпечує існування функції $y(t, x)$ як розв'язку рівняння $F(t, x, y) = 0$ стосовно y лише в деякому околі точки (t_0, x_0), причому радіус цього околу невідомий і залежить від вибору функції F [9, с.72]. Функція F повинна мати неперервну похідну стосовно y.

Нехай $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – два вектори з дійсними компонентами. Тоді символом (x, y) будемо позначати скалярний добуток векторів x та

y: $(x, y) == x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. Норму вектора x позначимо через $|x|$, так що $|x| = \sqrt{(x,x)} == \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Якщо $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in I$ є неперервною вектор-функцією, яка має k неперервних похідних, то будемо писати $x \in C_n^k(I)$, причому $C_n^0 = C_n$.

2. Задача Коші для системи рівнянь першого порядку. Нехай $x \in \mathbb{R}^n$ і $f \in \mathbb{R}^n$ позначають вектори з дійсними компонентами. Розглянемо систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$x' = f(t, x, x') \tag{4}$$

з початковою умовою

$$x(t_0) = x_0, \tag{5}$$

де $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Єдиний розв'язок рівняння

$$x' = h(t), \tag{6}$$

який задовольняє умову (5), визначається за формулою

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds. \tag{7}$$

Якщо $\alpha > 0$, $t \in I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, то з (7) і (6) випливають оцінки

$$|x(t) - x_0| \leqslant \alpha \max_{s \in I_\alpha} |h(s)|; \quad |x'(t)| \leqslant \max_{t \in I_\alpha} |h(t)|. \tag{8}$$

Теорема 1. *Нехай функція $f(t, x, x')$ неперервна для $(t, x, x') \in I_\alpha \times \mathbb{R}^{2n}$ і задовольняє умову Ліпшиця стосовно x, x'*

$$|f(t, x_1, x_1') - f(t, x_2, x_2')| \leqslant \vartheta_0 |x_1 - x_2| + \vartheta_1 |x_1' - x_2'| \tag{9}$$

зі сталими Ліпшиця ϑ_0, $\vartheta_1 > 0$ настільки малими, що

$$\vartheta_0 \alpha + \vartheta_1 < 1. \tag{10}$$

Тоді рівняння (4) має на відрізку I_α єдиний розв'язок, який задовольняє умову (5).

Зауваження 1. Замість вимоги, щоб f була визначена для значень $t \in I_\alpha$ та всіх (x, x'), досить вважати, що f визначена для $t \in I_\alpha$, $|x - x_0| \leqslant R$, $|x'| \leqslant R/\alpha$, де R задовольняє нерівність

$$m\alpha \leqslant R\big[1 - (\vartheta_0 \alpha + \vartheta_1)\big], \quad m = \max_{t \in I_\alpha} |f(t, 0, 0)| \tag{11}$$

або просто

$$M\alpha \leqslant R, \tag{12}$$

якщо $\quad M = \max |f(t, x, x')| \quad$ для $\quad t \in I_\alpha, \quad |x - x_0| \leqslant R, \quad |x'| \leqslant R/\alpha.$

Доведення. Нехай $\mathbb{B}$ – банахів простір функцій $h(t)$, $t \in I_\alpha$, які мають неперервні перші похідні і норму

$$\|h\| = \max\big(\max_{t \in I_\alpha} |h(t)|, \ \alpha \max_{t \in I_\alpha} |h'(t)|\big).$$

Візьмемо в кулі $\|h - x_0\| \leqslant R$ із $\mathbb{B}$ деяку функцію $h(t)$. Нехай $x(t)$ – єдиний розв'язок рівняння $x' = f\big(t, h(t), h'(t)\big)$, який задовольняє умову (5). Визначимо в кулі $\|h - x_0\| \leqslant\leqslant R$ із $\mathbb{B}$ оператор T_0, прийнявши, що $T_0\big(h(t)\big) = x(t)$.

Якщо $x_{(0)} = T_0(0)$ і $|f(t,0,0)| \leqslant m$, то з (8) при $h = f(t,0,0)$ одержуємо

$$|x_{(0)}(t) - x_0| \leqslant \alpha m; \qquad \alpha|x'_{(0)}(t)| \leqslant \alpha m.$$

Це означає, що норма функції $x_{(0)}(t) - x_0 = T_0(0) - x_0$ задовольняє нерівність

$$\|T_0(0) - x_0\| \leqslant \alpha m. \tag{13}$$

Далі, якщо $x_1 = T_0(h_1)$, $x_2 = T_0(h_2)$, то згідно з (6)–(9) маємо $|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant\leqslant \alpha H$, $|x'_1(t) - x'_2(t)| \leqslant H$, де $H = \vartheta_0 \max\limits_{t\in I_\alpha}|h_1 - h_2| + \vartheta_1 \max\limits_{t\in I_\alpha}|h'_1 - h'_2|$. Якщо другу нерівність домножити на α, то отримаємо нерівність

$$\|T_0(h_1) - T_0(h_2)\| \leqslant (\vartheta_0\alpha + \vartheta_1)\|h_1 - h_2\|.$$

Тепер з нерівностей (10), (11) і (13) видно, що можна застосувати принцип стискаючих відображень (теорема 0.1 [1, с.475]), тобто теорема 1 доведена.

Якщо $|f(t,x,x')| \leqslant M$ для $t \in I_\alpha$, $|x - x_0| \leqslant R$, $|x'| \leqslant R/\alpha$, то міркуючи аналогічно, як і при одержанні нерівності (13), можна переконатися, оскільки $\|h - x_0\| \leqslant R$, то $x = T_0(h)$ задовольняє нерівність $\|x - x_0\| \leqslant M\alpha$. Отже, якщо виконується (12), то T_0 відображає кулю $\|h - x_0\| \leqslant R$ в себе і тому, враховуючи (10), можна застосувати зауваження до теореми 0.1 [1, с.475]. Отже, теорема 1 і зауваження 1 повністю доведені.

Зауваження 2. У випадку, коли в рівнянні (4) $f(t,x,y) \equiv f(t,y)$ з теореми 1 випливає, що задача (4), (5) має єдиний розв'язок, якщо f неперервна і задовольняє умову Ліпшиця стосовно y із сталою ϑ_1, $0 < \vartheta_1 < 1$.

Теорема 2. *Нехай функція $f(t,x,y)$ неперервна, обмежена і задовольняє умову Ліпшиця стосовно y, тобто $|f(t,x,y)| \leqslant m$ для $(t,x,y) \in I_\alpha \times \mathbb{R}^{2n}$ і $|f(t,x,y_1) - f(t,x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$, де $0 < L < 1$, для $(t,x,y_i) \in I_\alpha \times \mathbb{R}^{2n}$, $i = 1,2$. Тоді задача (4), (5) має на відрізку I_α хоча б один розв'язок $x(t)$, причому $|x(t) - x_0| \leqslant m\alpha$, $|x'(t)| \leqslant m$.*

Зауваження 3. Досить вимагати, щоб функція $f(t,x,y)$ була визначена лише для $t \in I_\alpha$, $|x - x_0| \leqslant m\alpha$, $|y| \leqslant m$.

Доведення. Нехай $\mathbb{B}$ – банахів простір функцій $h(t) \in C_n(I_\alpha)$ з нормою $\|h(t)\| = \max\limits_{t\in I_\alpha}|h(t)|$. Розглянемо $h(t)$ в кулі $\|h - x_0\| \leqslant m\alpha$. Для цієї функції h приймемо $x = T_0(h)$, де $x(t)$ – розв'язок рівняння $x' = f\big(t, h(t), x'(t)\big)$, який задовольняє умову (5). Цей розв'язок існує і єдиний згідно з зауваженням 2 і для нього, очевидно, правильні оцінки, аналогічні до оцінок (8), тобто $|x(t) - x_0| \leqslant m\alpha$, так що T_0 відображає кулю $\|h - x_0\| \leqslant m\alpha$ в себе.

Якщо $\|h_1 - x_0\| \leqslant m\alpha$, $\|h_2 - x_0\| \leqslant m\alpha$ і $x_1 = T_0(h_1)$, $x_2 = T_0(h_2)$, то з (7) випливає, що $|x_1 - x_2| \leqslant \alpha \max\limits_{s\in I_\alpha}\big|f\big(s, h_1(s), x'_1(s)\big) - f\big(s, h_2(s), x'_2(s)\big)\big|$. Оскільки

$$\begin{aligned}|x'_1(t) - x'_2(t)| &\leqslant \big|f\big(t, h_1(t), x'_1(t)\big) - f\big(t, h_2(t), x'_1(t)\big)\big| + \\ &+ \big|f\big(t, h_2(t), x'_1(t)\big) - f\big(t, h_2(t), x'_2(t)\big)\big| \leqslant \\ &\leqslant \big|f\big(t, h_1(t), x'_1(t)\big) - f\big(t, h_2(t), x'_1(t)\big)\big| + L|x'_1(t) - x'_2(t)|,\end{aligned}$$

то
$$(1-L)\big|x_1'(t)-x_2'(t)\big| \leqslant \big|f\big(t,h_1(t),x_1'(t)\big)-f\big(t,h_2(t),x_1'(t)\big)\big|,$$
де $0<L<1$. Оскільки функція f неперервна, то при $\|h_1-h_2\|\to 0$ також $|x_1'-x_2'|\to 0$ і, як наслідок, $\|x_1-x_2\|\to 0$. Це означає, що оператор T_0 неперервний.

Для будь-якої функції $x(t)$ з області значень оператора T_0, тобто для $x=T_0(h)$ з деякою h, з обмеженості функції f маємо $|x'(t)|\leqslant m$. Отже, функції $x(t)$ з області значень $T_0(h)$, $\|h-x_0\|\leqslant m\alpha$ є такі, що $x(t)$ одностайно неперервні, оскільки
$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant m|t_1-t_2|.$$
Тому з теореми Арцела випливає, що область значень оператора $T_0(h)$ має компактне замикання. Отже, можна застосувати теорему Шаудера [10, с.291]; доведення теореми 2 закінчено.

3. Задача Діріхле для системи рівнянь другого порядку. Нехай $x\in\mathbb{R}^n$ і $f\in\mathbb{R}^n$ позначають вектори з дійсними компонентами. Розглянемо систему диференціальних рівнянь другого порядку (3) з крайовими умовами
$$x(a)=c,\quad x(b)=d, \tag{14}$$
де $c,d\in\mathbb{R}^n$. Відомо, що єдиний розв'язок рівняння $x''=h(t)$, який задовольняє умови (14), визначається за формулою
$$x(t)=\frac{c}{p}(b-t)+\frac{d}{p}(t-a)-\int\limits_a^b G(t,s)h(s)\,ds, \tag{15}$$
де $p=b-a$,
$$G(t,s)=\begin{cases}(s-a)(b-t)/p, & a\leqslant s\leqslant t\leqslant b;\\ (b-s)(t-a)/p, & a\leqslant t\leqslant s\leqslant b.\end{cases}$$
Виконуються оцінки
$$\begin{gathered}0\leqslant G(t,s)\leqslant\frac{p}{4};\qquad \int\limits_a^b G(t,s)\,ds=\frac{1}{2}(b-t)(t-a)\leqslant\frac{p^2}{8};\\ |G_t(t,s)|\leqslant 1;\quad \int\limits_a^b |G_t(t,s)|\,ds=\frac{1}{2p}[(t-a)^2+(b-t)^2]\leqslant\frac{p}{2}.\end{gathered} \tag{16}$$
Тому з (15), а також з виразу, який одержуємо диференціюванням цієї рівності, випливає, що
$$\left|x(t)-\frac{c+d}{2}\right|\leqslant\frac{p^2}{8}\max_{s\in I}|h(s)|+\frac{|c-d|}{2};\quad |x'(t)|\leqslant\frac{p}{2}\max_{s\in I}|h(s)|+\frac{|c-d|}{p}. \tag{17}$$
Теорема 3. *Нехай функція $f(t,x,x',x'')$ неперервна для $(t,x,x',x'')\in I\times\mathbb{R}^{3n}$ і задовольняє умову Ліпшиця стосовно x, x', x''*
$$|f(t,x_1,x_1',x_1'')-f(t,x_2,x_2',x_2'')|\leqslant\vartheta_0|x_1-x_2|+\vartheta_1|x_1'-x_2'|+\vartheta_2|x_1''-x_2''| \tag{18}$$
зі сталими Ліпшиця ϑ_0, ϑ_1, $\vartheta_2>0$ настільки малими, що
$$\frac{\vartheta_0p^2}{8}+\frac{\vartheta_1p}{2}+\vartheta_2<1. \tag{19}$$

Тоді рівняння (3) має єдиний розв'язок, який задовольняє умови (14).

Зауваження 4. Замість вимоги, щоб f була визначена для значень $t \in I$ та всіх (x, x', x''), досить вважати, що f визначена для $t \in I$, $|x - (c+d)/2| \leqslant R$, $|x'| \leqslant (4R - |c-d|)/p$, $|x''| \leqslant 4(2R - |c-d|)/p^2$, де R задовольняє нерівність

$$\frac{mp^2}{8} + \frac{|c-d|}{2} \leqslant R\left[1 - \left(\frac{\vartheta_0 p^2}{8} + \frac{\vartheta_1 p}{2} + \vartheta_2\right)\right], \quad m = \max_{t \in I} |f(t, 0, 0, 0)| \tag{20}$$

або просто

$$\frac{1}{2}|c-d| + \frac{M}{8}p^2 \leqslant R, \tag{21}$$

якщо $M = \max |f(t, x, x', x'')|$ для $t \in I$, $|x - (c+d)/2| \leqslant R$, $|x'| \leqslant (4R - |c-d|)/p$, $|x''| \leqslant 4(2R - |c-d|)/p^2$.

Доведення. Нехай $\mathbb{B}$ – банахів простір функцій $h(t)$, $t \in I$, які мають неперервні другі похідні та норму

$$\|h\| = \max\left(\max_{t \in I} |h(t)|,\ \frac{p}{4}\max_{t \in I} |h'(t)|,\ \frac{p^2}{8}\max_{t \in I} |h''(t)|\right).$$

Візьмемо в кулі $\|h - (c+d)/2\| \leqslant R$ із $\mathbb{B}$ деяку функцію $h(t)$. Нехай $x(t)$ – єдиний розв'язок рівняння $x'' = f\big(t, h(t), h'(t), h''(t)\big)$, який задовольняє умови (14). Визначимо в кулі $\|h - (c+d)/2\| \leqslant R$ із $\mathbb{B}$ оператор T_0, прийнявши, що $T_0\big(h(t)\big) = x(t)$.

Далі доведення проводиться за схемою доведення теореми 1 з використанням оцінок (17) і умов (18)–(21).

Теорема 4. *Нехай функція $f(t, x, y, z)$ неперервна, обмежена і задовольняє умову Ліпшиця стосовно z, тобто $|f(t, x, y, z)| \leqslant m$ для $(t, x, y, z) \in I \times \mathbb{R}^{3n}$ і $|f(t, x, y, z_1) - -f(t, x, y, z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|$, де $0 < L < 1$, для $(t, x, y, z_i) \in I \times \mathbb{R}^{3n}$, $i = 1, 2$. Тоді задача (3), (14) має хоча б один розв'язок $x(t)$, причому*

$$\left|x(t) - \frac{c+d}{2}\right| \leqslant \frac{mp^2}{8} + \frac{|c-d|}{2}; \qquad |x'(t)| \leqslant \frac{mp}{2} + \frac{|c-d|}{p}.$$

Зауваження 5. Досить вимагати, щоб функція $f(t, x, y, z)$ була визначена лише для

$$t \in I; \quad \left|x - \frac{c+d}{2}\right| \leqslant \frac{mp^2}{8} + \frac{|c-d|}{2}; \quad |y| \leqslant \frac{mp}{2} + \frac{|c-d|}{p}; \quad |z| \leqslant m.$$

Зауваження 6. У випадку, коли $f(t, x, y, z) \equiv f(z)$, з теореми Боля-Брауера про нерухому точку [11, с.233] випливає, що задача (3), (14) має розв'язок, якщо $f(z)$ неперервна і відображає кулю $|z| \leqslant m$ деякого радіуса $m > 0$ в себе. Те саме стосується і задачі Коші (4), (5) за умови, що $f(t, x, y) \equiv f(y)$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 2 з використанням оцінок (15)–(17). Розглядаємо банахів простір функцій $h(t) \in C_n^1(I)$ з нормою

$$\|h\| = \max\left(\max_{t \in I} |h(t)|,\ \frac{p}{4}\max_{t \in I} |h'(t)|\right).$$

Для функцій $h(t)$ з кулі

$$\left\|h - \frac{c+d}{2}\right\| \leqslant \frac{mp^2}{8} + \frac{|c-d|}{2}$$

розглядаємо оператор $T_0(h) = x$, де $x(t)$ – єдиний розв'язок рівняння $x'' = f\big(t, h(t), h'(t), x''(t)\big)$, який задовольняє умови (14).

4. Третя крайова задача. Для скалярного рівняння

$$x'' = f(t, x, x', x''), \quad t \in I \tag{22}$$

з неперервною функцією f розглянемо крайові умови

$$x(a) = Ax'(a) + c, \qquad x(b) = -Bx'(b) + d, \tag{23}$$

де A, B, c, $d \in \mathbb{R}$; A, $B \geqslant 0$.

Рівняння $x'' = h(t)$ має єдиний розв'язок, який задовольняє умови (23) і задається формулою

$$x(t) = \frac{1}{P}\big[c(B + b - t) + d(A + t - a)\big] - \int\limits_a^b G(t, s)h(s)\, ds,$$

де $P = p + A + B$, $p = b - a$,

$$G(t, s) = \begin{cases} (A + s - a)(B + b - t)/P, & a \leqslant s \leqslant t \leqslant b; \\ (B + b - s)(A + t - a)/P, & a \leqslant t \leqslant s \leqslant b. \end{cases}$$

Як наслідок, правильні оцінки

$$0 \leqslant G(t, s) \leqslant G_1, \quad \int\limits_a^b G(t, s)\, ds = \frac{1}{2P}\big[(B + b - t)(2A + t - a)(t - a) +$$

$$+ (A + t - a)(2B + b - t)(b - t)\big] \leqslant c_0; \qquad |G_t(t, s)| < 1;$$

$$\int\limits_a^b |G_t(t, s)|\, ds = \frac{1}{2P}\big[(t - a)(2A + t - a) + (b - t)(2B + b - t)\big] \leqslant c_1;$$

$$\left|x(t) - \frac{c + d}{2}\right| \leqslant \frac{|c - d|}{2} + c_0 \max_{s \in I}|h(s)|; \quad |x'(t)| \leqslant \frac{|c - d|}{P} + c_1 \max_{s \in I}|h(s)|,$$

де

$$G_1 = \begin{cases} P/4, & \text{якщо } p + A - B > 0; \\ \max\big((A + p)B;\ (B + p)A\big)\big/ P, & \text{якщо } p + A - B \leqslant 0; \end{cases}$$

$$c_0 = \frac{p}{16P^4}\big[(p^2 + 2pA + 2PB)(p^2 + 2pB + 4PA)(p + 2B) +$$

$$+ (p^2 + 2pB + 2PA)(p^2 + 2pA + 4PB)(p + 2A)\big]; \;\; c_1 = \frac{p}{2P}\max\big(2A + p;\ 2B + p\big).$$

Використовуючи одержані оцінки, приходимо до умов розв'язності, аналогічних до теорем 3 і 4.

Теорема 5. *Нехай функція $f(t, x, x', x'')$ неперервна для $(t, x, x', x'') \in I \times \mathbb{R}^3$ і задовольняє умову Ліпшиця (18) зі сталими Ліпшиця ϑ_0, ϑ_1, $\vartheta_2 > 0$ настільки малими, що $c_0\vartheta_0 + c_1\vartheta_1 + \vartheta_2 < 1$. Тоді крайова задача (22), (23) має єдиний розв'язок.*

Теорема 6. *Нехай функція $f(t,x,y,z)$ неперервна, обмежена і задовольняє умову Ліпшиця стосовно z, тобто $|f(t,x,y,z)| \leqslant m$ для $(t,x,y,z) \in I \times \mathbb{R}^3$ і $|f(t,x,y,z_1) - -f(t,x,y,z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|$, де $0 < L < 1$, для $(t,x,y,z_i) \in I \times \mathbb{R}^3$, $i = 1,2$. Тоді задача (22), (23) має хоча б один розв'язок $x(t)$, причому*

$$\left|x(t) - \frac{c+d}{2}\right| \leqslant mc_0 + \frac{|c-d|}{2}; \qquad |x'(t)| \leqslant mc_1 + \frac{|c-d|}{P}.$$

Єдиний розв'язок системи рівнянь другого порядку $x'' = h(t)$, який задовольняє крайові умови

$$x(a) - Ax'(a) = c, \qquad x(b) + Bx'(b) = d, \tag{24}$$

де $h(t) \in C_n(I)$, c, $d \in \mathbb{R}^n$, A, B – невід'ємно визначені $n \times n$-матриці, записується у вигляді

$$x(t) = P^{-1}\big[(B+b-t)c + (A+t-a)d\big] - \int\limits_a^b G(t,s)h(s)\,ds,$$

де $P = p + A + B$, P^{-1} – обернена матриця до P,

$$G(t,s) = \begin{cases} (B+b-t)P^{-1}(A+s-a), & a \leqslant s \leqslant t \leqslant b; \\ (A+t-a)P^{-1}(B+b-s), & a \leqslant t \leqslant s \leqslant b. \end{cases}$$

Звідси, використовуючи ідею доведень теорем 4 і 6, одержимо теорему існування розв'язку крайової задачі (3), (24), де $f \in C_n(I \times \mathbb{R}^{3n})$.

Теорема 7. *Якщо функція $f(t,x,y,z)$ неперервна, обмежена і задовольняє умову Ліпшиця за z зі сталою Ліпшиця L, $0 < L < 1$, то крайова задача (3), (24), де A, B – невід'ємно визначені матриці, має хоча б один розв'язок $x(t)$.*

5. Випадок необмежених правих частин. Розглянемо крайову задачу (3), (24), де $f \in C_n(I \times \mathbb{R}^{3n})$, c, $d \in \mathbb{R}^n$, A, B – $n \times n$-матриці.

Лема 1. *Нехай для будь-якого $M > 0$ існує число $p \geqslant 0$ і неперервні додатні функції $\alpha(s) > 0$, $\beta(s) > 0$, $(0 \leqslant s < \infty)$ такі, що $\alpha(s) \to 0$, $\beta(s) \to 0$ при $s \to \infty$, $s^2\alpha(s)$ і $s\beta(s)$ є неспадні функції s, причому виконується одна з умов*

$$\begin{gathered} |f(t,x,y,z)| \leqslant p\big(1 + |y|^2\alpha(|y|) + |z|\beta(|z|)\big), \\ |f(t,x,y,z)| \leqslant p\big(1 + |y|^2\alpha(|y|)\big), \quad |f(t,x,y,z)| \leqslant p\big(1 + |z|\beta(|z|)\big), \end{gathered} \tag{25}$$

для $|x| \leqslant M$ і всіх $t \in I$, y, $z \in \mathbb{R}^n$. Нехай $x(t)$, $t \in I$ є розв'язок системи (3), для якої виконується одна з умов (25). Тоді для будь-якого $M > 0$ можна знайти такі числа $N > 0$ і $K > 0$, якщо $|x(t)| \leqslant M$ для всіх $t \in I$, то

$$|x'(t)| \leqslant N, \qquad |x''(t)| \leqslant K \qquad \forall t \in I. \tag{26}$$

Доведення. Нехай $x(t) \in C_n^2(I)$, $M_k = \max\limits_{t \in I}|x^{(k)}(t)|$, $k = 0,1,2$. Тоді [5, с.76]

$$M_1^2 \leqslant q(rM_0 + M_2), \tag{27}$$

де q и r – деякі додатні сталі. Нехай $M > 0$ задане і $x(t) \in C_n^2(I)$ – розв'язок системи (3), який задовольняє умову $|x(t)| \leqslant M$ для всіх $t \in I$. Тоді з (3) і першої умови (25) одержуємо $|x''(t)| = \big|f\big(x(t), x'(t), x''(t)\big)\big| \leqslant p\big(1 + |x'(t)|^2\alpha(|x'(t)|) +$

$|x''(t)|\beta(|x''(t)|)\big)$. Взявши значення t, при якому в лівій частині досягається максимум, і використовуючи нерівність (27), де, очевидно, треба взяти $M = M_0$, одержимо

$$M_2 \leqslant p\big(1 + q(rM + M_2)\alpha\big((q(rM + M_2))^{1/2}\big) + M_2\beta(M_2)\big). \tag{28}$$

Оскільки зі збільшенням M_2 функції $\alpha(s)$ і $\beta(s)$ прямують до нуля, то з нерівності (28) випливає обмеженість M_2. Лему доведено.

Лема 2. *Якщо функція $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{R}^n$ задовольняє умову Ліпшиця стосовно z з деякою сталою $L > 0$, то функція $F(z) = \varphi(z\sigma(|z|/K))$, де $K > 0$, $\sigma(s)$ – функція, задана для $s \geqslant 0$,*

$$\sigma(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant s \leqslant 1; \\ 1/s, & 1 < s < \infty, \end{cases}$$

задовольняє умову Ліпшиця стосовно z з тою самою сталою L.

Доведення. Для будь-яких z_1, $z_2 \in \mathbb{R}^n$

$$F(z_1) - F(z_2) = \begin{cases} \varphi(z_1) - \varphi(z_2), & |z_i| \leqslant K,\ i = 1,2; \\ \varphi(z_1') - \varphi(z_2'), & |z_i| > K,\ i = 1,2; \\ \varphi(z_1) - \varphi(z_2'), & |z_1| \leqslant K,\ |z_2| > K; \\ \varphi(z_1') - \varphi(z_2), & |z_1| > K,\ |z_2| \leqslant K, \end{cases}$$

де $z_i' = z_iK/|z_i|$, $|z_i'| = K$, $i = 1,2$. Для доведення леми досить показати, що $|z_1' - z_2'| \leqslant\leqslant |z_1 - z_2|$, $|z_1 - z_2'| \leqslant |z_1 - z_2|$ і $|z_1' - z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$. У випадку $z \in \mathbb{R}$ ці нерівності очевидні, а для $z \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, в їхній правильності легко переконатися, якщо врахувати, що для кожної точки z_i, яка є зовні кулі радіуса K $(|z_i| > K)$, точка z_i' лежить на поверхні кулі і на відрізку, який з'єднує центр цієї кулі з точкою z_i.

Якщо $|z_i| > K$, тобто точки z_1, z_2 знаходяться зовні кулі, то відстань між такими двома точками, що містяться на фіксованих променях, які виходять з центра кулі, буде найменшою в тому випадку, коли дві прямі, що проходять відповідно через точки z_1, z_2 і z_1', z_2', паралельні. Тоді, очевидно, чотирикутник $z_1z_1'z_2'z_2$ – це трапеція, більша основа якої має довжину $|z_1 - z_2|$, а менша – $|z_1' - z_2'|$, тобто $|z_1' - z_2'| \leqslant |z_1 - z_2|$.

Якщо $|z_1| \leqslant K$, а $|z_2| > K$, то $|z_1 - z_2'| \leqslant |z_1 - z_2|$, оскільки в трикутнику $z_1z_2'z_2$ сторона z_1z_2 завжди лежить проти тупого кута, а сторона z_1z_2' – проти гострого. Лему доведено.

Теорема 8. *Нехай $f \in C_n(I \times \mathbb{R}^{3n})$, функція $f(t,x,y,z)$ задовольняє одну з умов (25) і умову Ліпшиця стосовно змінної z із сталою Ліпшиця L, $0 < L < 1$. Припустимо, що існують додатні функції p, q, $r \in C(I)$, такі, що*

$$\begin{gathered} \big(x, f(t,0,0,z) - f(t,0,0,0)\big) \geqslant -p(t)|x|, \\ \big(x, f(t,0,y,z) - f(t,0,0,z)\big) \geqslant -q(t)|x|, \\ \big(x, f(t,x,y,z) - f(t,0,y,z)\big) \geqslant -r(t)|x|, \quad \forall (t,x,y,z) \in I \times \mathbb{R}^{3n}. \end{gathered} \tag{29}$$

Тоді розв'язок задачі (3), (24), де A, B – додатно визначені матриці, існує.

Доведення. Нехай $u(t)$, $t \in I$ є розв'язок задачі

$$u'' = -p(t) - q(t) - r(t) - |f(t,0,0,0)|, \quad u(a) = u(b) = 0.$$

Очевидно, що $u(t)$ має один додатний максимум, так що $u(t) > 0$ $\forall t \in (a, b)$.

Оскільки A, B – додатно визначені матриці, то обернені до них матриці A^{-1}, B^{-1} – також додатно визначені. Тому квадратичні форми $\big(x, A^{-1}(x - c)\big)$ і $\big(x, B^{-1}(x - d)\big)$ додатно визначені.

Виберемо сталу $M_a > 0$ так, щоб для $|x| > M_a$ виконувалась нерівність

$$\big(x, A^{-1}(x-c)\big)/|x| - u'(a) > 0. \tag{30}$$

Аналогічно через $M_b > 0$ позначимо сталу таку, щоб при $|x| > M_b$ було

$$\big(x, B^{-1}(x-d)\big)/|x| + u'(b) > 0. \tag{31}$$

Нехай $M = M_a + M_b + \max\limits_{t \in I} u(t)$, а N і K – сталі, які відповідають числу M за лемою 1. Для чисел M, N і K визначимо функцію

$$F(t, x, x', x'') = f\big(t, x\sigma(|x|/M), x'\sigma(|x'|/N), x''\sigma(|x''|/K)\big).$$

Оскільки F неперервна, обмежена для $(t, x, x', x'') \in I \times \mathbb{R}^{3n}$ і згідно з лемою 2 задовольняє умову Ліпшиця стосовно x'' із сталою $0 < L < 1$, то з теореми 7 випливає, що рівняння $x'' = F(t, x, x', x'')$ має розв'язок, який задовольняє умови (24). Позначимо його через $x(t)$. Легко бачити, що F задовольняє умови (29) теореми 8 і ту з умов (25) леми 1, яку задовольняє функція f.

Доведемо, що

$$|x(t)| \leqslant M \quad \forall t \in I. \tag{32}$$

Для цього візьмемо функцію

$$v(t) = \sqrt{\big(x(t), x(t)\big)} - u(t). \tag{33}$$

Двічі диференціюючи, одержимо

$$v'(t) = \frac{\big(x(t), x'(t)\big)}{\sqrt{\big(x(t), x(t)\big)}} - u'(t), \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
v''(t) &= \frac{\big(x(t), x''(t)\big) + x'^2(t)}{\sqrt{\big(x(t), x(t)\big)}} - \frac{\big(x(t), x'(t)\big)^2}{\big(\sqrt{x^2(t)}\big)^3} - u''(t) = \\
&= \left[\frac{\big(x(t), F(t,0,0,0)\big)}{|x(t)|} + |F(t,0,0,0)|\right] + \\
&= \left[\frac{\big(x(t), F(t, x(t), x'(t), x''(t)) - F(t, 0, x'(t), x''(t))\big)}{|x(t)|} + r(t)\right] + \\
&= \left[\frac{\big(x(t), F(t, 0, x'(t), x''(t)) - F(t, 0, 0, x''(t))\big)}{|x(t)|} + q(t)\right] + \\
&= \left[\frac{\big(x(t), F(t, 0, 0, x''(t)) - F(t, 0, 0, 0)\big)}{|x(t)|} + p(t)\right] + \\
&\quad + \left[\frac{|x'(t)|^2}{|x(t)|} - \frac{\big(x(t), x'(t)\big)^2}{|x(t)|^3}\right].
\end{aligned} \tag{35}$$

Оскільки кожна квадратна дужка в (35) невід'ємна, то $v''(t) \geqslant 0$, тому функція $v(t)$ не може мати додатних максимумів.

Покажемо тепер, що

$$v(a) \leqslant M_a + M_b. \tag{36}$$

Припускаючи протилежне, з (33) знайдемо, що $|x(a)| > M_a$, а з (34) при $t = a$ і крайових умов (24) одержимо

$$v'(a) = \big(x(a), A^{-1}(x(a) - c)\big)/|x(a)| - u'(a) > 0$$

(останнє з (30)). Оскільки $v''(t) \geqslant 0$, то $v'(t) > 0$ $\forall t \in I$ і, отже, $v(b) > M_a + M_b$. Але це можливе лише, якщо $|x(b)| > M_b$. Тепер з (34) при $t = b$ і крайових умов (24), враховуючи (31), одержимо, що

$$v'(b) = -\big(x(b), B^{-1}(x(b) - d)\big)/|x(b)| - u'(b) < 0.$$

Але це суперечить одержаній нерівності $v'(t) > 0$ $\forall t \in I$. Отже, нерівність (36) доведена. Аналогічно доводиться нерівність

$$v(b) \leqslant M_a + M_b. \tag{37}$$

Оскільки функція $v(t)$ не може мати додатних максимумів, то з (36) і (37) випливає, що

$$v(t) \leqslant M_a + M_b \quad \forall t \in I. \tag{38}$$

З (33) і (38) і означення числа M отримуємо нерівність (32), а з леми 1 випливають оцінки (26), при виконанні яких $F \equiv f$, тому $x(t)$ є розв'язок задачі (3), (24). Отже, теорему 8 доведено.

6. Приклад виконання умов теореми 8. Розглянемо крайову задачу (3), (24) у випадку $n = 1$. Покажемо, що функція

$$f(t, x, y, z) = \frac{xy^2}{(x^2+1)(y^2+1)} \ln\big(|z| + \sqrt{z^2+\lambda}\big), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 1,$$

задана і неперервна для $(t, x, y, z) \in I \times \mathbb{R}^3$, задовольняє умови теореми 8.

Оскільки

$$f(t,0,0,z) - f(t,0,0,0) = f(t,0,y,z) - f(t,0,0,z) \equiv 0,$$

$$x\big(f(t,x,y,z) - f(t,0,y,z)\big) = \frac{x^2y^2}{(x^2+1)(y^2+1)} \ln\big(|z| + \sqrt{z^2+\lambda}\big) \geqslant 0$$

для всіх $(t, x, y, z) \in I \times \mathbb{R}^3$, то умови (29) виконуються.

Для всіх $z \in \mathbb{R}$ при $\lambda > 1$ виконується оцінка

$$|z| + \sqrt{z^2+\lambda} = \sqrt{\lambda}\left(\frac{|z|}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\frac{z^2}{\lambda} + 1}\right) \leqslant \sqrt{\lambda}\big(|z| + \sqrt{z^2+1}\big),$$

з якої випливає, що $\ln\big(|z| + \sqrt{z^2+\lambda}\big) \leqslant \ln\sqrt{\lambda} + \ln\big(|z| + \sqrt{z^2+1}\big)$. Тому $|f(t,x,y,z)| \leqslant\leqslant \ln\sqrt{\lambda}\big(1 + |z|\beta(|z|)\big)$, де $\beta(s) = \ln(s + \sqrt{s^2+1})/(s\ln\sqrt{\lambda})$, так що функція $s\beta(s)$ зростає для всіх додатних s, $\beta(s) > 0$ $(0 \leqslant s < \infty)$ і $\beta(s) \to 0$ при $s \to \infty$, тобто виконується третя з умов (25).

Оскільки $|\partial f/\partial z| < 1/\sqrt{z^2+\lambda} < 1$ як для $z < 0$, так і для $z > 0$, то умова Ліпшиця $|f(t,x,y,z_1) - f(t,x,y,z_2)| \leqslant L|z_1 - z_2|$, $0 < L < 1$ виконується для z_1,

$z_2 > 0$ і для z_1, $z_2 < 0$. Якщо ж $z_1 > 0$, а $z_2 < 0$, то, позначивши $-z_2 = \tilde{z}_2 > 0$, одержимо

$$|f(t,x,y,z_1) - f(t,x,y,z_2)| = |f(t,x,y,z_1) - f(t,x,y,\tilde{z}_2)| \leqslant L|z_1 - \tilde{z}_2| < L|z_1 - z_2|.$$

Умову Ліпшиця для випадку $z_1 > 0$, $z_2 = 0$ одержимо, переходячи до границі при $\varepsilon \to +0$ в лівій частині нерівності

$$|f(t,x,y,z_1) - f(t,x,y,\varepsilon)| \leqslant L|z_1 - \varepsilon| < L|z_1 - 0|.$$

---

1. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., 1970.
2. *Бернштейн С.Н.* Собрание сочинений. – М., 1960. – Т.3.
3. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., 1954. – Т.2.
4. *Гудков В. В., Клоков Ю.А., Лепин А.Я., Пономарев В.Д.* Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Рига, 1973.
5. *Васильев Н.И., Клоков Ю.А.* Основы теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Рига, 1978.
6. *Лепин А. Я., Лепин Л.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. – Рига, 1988.
7. *Король І.І.* Чисельно-аналітичні методи дослідження розв'язків двоточкових крайових задач з параметрами: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Ужгород, 1996.
8. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К., 1992.
9. *Шилов Г.Е.* Математический ананлиз (функции нескольких вещественных переменных). – М., 1972.
10. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М., 1965.
11. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1970.

Yu. Zhernovyi

ABOUT SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM AND THE BOUNDARY PROBLEMS FOR THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS PARTIALLY SOLVED WITH RESPECT TO THE HIGHER DERIVATIVE

There are obtained conditions of existence and conditions of existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem for the system $x' = f(t,x,x')$ and the two-point boundary problems for the system $x'' = f(t,x,x',x'')$ with continuous function f and linear boundary conditions.

Стаття надійшла до редколегії 08.09.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.91–93

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.91–93

УДК 517.988.5

Андрій Загороднюк

ПРО ДОДАТНІ ПОЛІНОМИ НА ДІЙСНИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Нехай X – дійсний банахів простір. Нагадаймо, що відображення $P : X \to \mathbb{R}$ називається однорідним (неперервним) поліномом степеня n на X, якщо існує n-лінійне симетричне неперервне відображення на n-ому декартовому степені простору X, $\bar{P} : X \times \cdots \times X \to \mathbb{R}$, таке що $P(x) = \bar{P}(x, \dots, x)$. Поліномом степеня m на X називається сума n-однорідних поліномів при $n = 0, \dots, m$ (детальніше див. [1]). Говоритимемо, що однорідний полiном P парного степеня є додатним, якщо $P(X) > 0$ для всякого $x \neq 0$.

Нехай $X^{\otimes k}$ симетричний k-ий проективний тензорний степінь простору X. Позначимо Δ_{n-1} замкнений підпростір простору $\sum_{k=1}^{n-1} X^{\otimes k}$, породжений елементами $\sum_{k=1}^{n-1} \overbrace{\lambda x \otimes \cdots \otimes \lambda x}^{k}$, де $x \in X$ $\lambda \in \mathbb{R}$. Нехай $\widehat{x} := x + \cdots + \overbrace{x \otimes \cdots \otimes x}^{n-1}$.

Твердження 1. *Для всякого n-однорідного полінома P на X, де $n > 1$, існує білінійна форма B_P на Δ_{n-1}, така що $B_P(\widehat{x}, \widehat{x}) = P(x)$.*

Доведення. Приймемо, що

$$B_P(\widehat{x}, \widehat{y}) := \frac{P(x + y) - P(x) - P(y)}{2^n - 2}. \tag{1}$$

Оскільки

$$P(x + y) - P(x) - P(y) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{n-k} \bar{P}(\overbrace{x, \dots, x}^{k}\overbrace{y, \dots, y}^{n-k})$$

і кожен доданок у сумі праворуч є білінійною формою на елементах вигляду $\overbrace{x \otimes \cdots \otimes x}^{k}$, $\overbrace{y \otimes \cdots \otimes y}^{n-k}$, то B_P є білінійною формою на просторі Δ_{n-1}. Крім того,

$$B_P(\widehat{x}, \widehat{x}) = \frac{P(2x) - 2P(x)}{2^n - 2} = P(x).$$

Твердження доведено.

Зауважимо, що білінійна форма B на Δ_{n-1} породжує n-однорідний поліном P на X за формулою $P(x) = B(\widehat{x}, \widehat{x})$ тоді й тільки тоді, коли для будь-яких фіксованих $x, h \in X$, функція $f(t) := B(\widehat{x + th}, \widehat{x + th})$ є поліномом від $t \in \mathbb{R}$ степеня не більшого за n і для деякого h є поліномом степеня n.

Скажемо, що вектор x є P-ортогональний до вектора y (при заданому однорідному поліномі P), якщо $P(t_1x+t_2y)=P(t_1x)+P(t_2y)$ для довільних чисел t_1, t_2.

Зв'язок між P-ортогональністю та ортогональністю стосовно білінійної форми B_P доводить таке твердження.

Твердження 2. *Вектор x є P-ортогональний до y тоді й тільки тоді, коли $B_P(\widehat{t_1x},\widehat{t_2y})=0$ для довільних чисел t_1,t_2.*

Доведення. Справді,

$$P(t_1x+t_2y)=(2^n-2)B_P(\widehat{t_1x},\widehat{t_2y})+P(t_1x)+P(t_2y)=P(t_1x)+P(t_2y)$$

для будь-яких чисел t_1,t_2 тоді й тільки тоді, коли $B_P(\widehat{t_1x},\widehat{t_2y})\equiv 0$. Твердження доведено.

Властивості банахових просторів, на яких існують додатні поліноми другого або четвертого стеленя, досліджували у праці [2].

Якщо у просторі X існує щільна P-ортогональна послідовність і $\operatorname{ess}\ker P:=\{z\in X: P(x+z)=P(x)\ \forall x\in X\}=0$, то простір X щільно вкладається в простір сумовних у степені n послідовностей ℓ_n. Теорема виявляє деякі властивості додатних поліномів та банахових просторів, на яких існують такі поліноми.

Теорема. *Нехай на сепарабельному просторі X з базисом Шаудера заданий додатний n-однорідний поліном P (парного) степеня $n\geqslant 4$. Припустимо, що множина P-ортогональних векторів щільна в X. Тоді правильні такі твердження.*

(i) Простір Δ_{n-1} розкладається на пряму суму трьох нетривіальних підпросторів U_1,U_2,U_3 таких, що форма B_P додатно визначена на U_1, вироджена на U_2 і від'ємно визначена на U_3.

(ii) На Δ_{n-1} існує підпростір (нескінченновимірний, якщо X нескінченновимірний), який ін'єктивно і щільно вкладається в гільбертів.

(iii) На просторі $\mathcal{P}_{n-1}$ поліномів степеня не більшого за $n-1$ на X існує замкнений підпростір V, такий що $\mathcal{P}_{n-1}/V$ є поповненням операторного образу гільбертового простору.

Доведення. (i). З існування базису в X можна вивести існування базису в Δ_{n-1}, використовуючи техніку [3]. Нехай $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ – базис в Δ_{n-1}. Застосовуючи процедуру ортогоналізації Грама-Шмідта до $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ побудуємо базис $(v_k)_{k=1}^{\infty}$, ортогональний стосовно білінійної форми B_P і такий, що $B_P(\widehat{v}_k,\widehat{v}_k)=\pm 1$ або 0.

Нехай U_1 – замкнена лінійна оболонка таких v_k, що $B_P(\widehat{v}_k,\widehat{v}_k)=1$. Аналогічно U_2 (відповідно U_3) – замкнена лінійна оболонка таких v_k, що $B_P(v_k,v_k)=0$ (відповідно -1).

Доведемо, що всі три простори нетривіальні. Нехай $x_1,\dots,x_m,\dots$ – P-ортогональна лінійно незалежна послідовність. Оскільки $B_P(\widehat{x}_k,\widehat{x}_k)=P(x_k)>0$ і $(\widehat{x}_k)$ можна доповнити до ортогонального стосовно B_P базису в Δ_{n-1}, то ми можемо вважати, що простір U_1 вибрано так, щоб $(x_k)\subset U_1$. Отже, простір U_1 є непорожнім. Більше того, $\dim U_1=\infty$, коли $\dim X=\infty$.

Нехай $i\neq j$. Доведемо, що $\widehat{x_i+x_j}-\widehat{x}_i-\widehat{x}_j\in U_2$. Перевіримо, що для довільного $z\in X$

$$B_P(\widehat{x_i+x_j}-\widehat{x}_i-\widehat{x}_j,\widehat{z})=0. \tag{2}$$

Оскільки лінійна оболонка векторів x_k щільна в X, то ми можемо перевірити рівність (2) на елементах вигляду $z = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k$. Справді, за формулою (1)

$$B_P(\widehat{x_i + x_j} - \widehat{x}_i - \widehat{x}_j, \widehat{z}) = \frac{1}{2^n - 2}(P(x_i + x_j + z) - P(z) - P(x_i + z) - P(x_j + z) + 2P(z)) =$$

$$\frac{1}{2^n - 2}(P(x_i + x_j + \sum_{k=1}^{m} a_k x_k) - P(x_i + \sum_{k=1}^{m} a_k x_k) - P(x_j + \sum_{k=1}^{m} a_k x_k) + P(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k)) = 0$$

згідно з P-ортогональністю елементів x_k. Отже, білінійна форма B_P не залежить від підпростору, що є лінійною оболонкою векторів $\widehat{x_i + x_j} - \widehat{x}_i - \widehat{x}_j$. Тому $\widehat{x_i + x_j} - \widehat{x}_i - \widehat{x}_j \in U_2$.

Покажемо тепер, що для кожного x_i існують числа t, λ такі, що $w_i := t\widehat{x}_i + \widehat{\lambda x_i} \in U_3$. З прямих обчислень випливає, що

$$B_P(w_i, w_i) = P(x_i)[t^2 + \frac{2}{2^n - 2}((\lambda + 1)^n - \lambda^n - 1) + \lambda^n]. \tag{3}$$

Оскільки $P(x) > 0$, то вираз (3) може бути від'ємним тоді і тільки тоді, коли дискримінант

$$D(\lambda) = 4\left(\frac{(\lambda + 1)^n - \lambda^n - 1}{2^n - 2}\right)^2 - 4\lambda^n$$

квадратного тричлена $f(t) = t^2 + \frac{2}{2^n - 2}((\lambda + 1)^n - \lambda^n - 1) + \lambda^n$ стосовно t додатний для деякого λ. Легко бачити, що $D(\lambda) > 0$ при $n \geqslant 4$ і при досить великих λ.

(ii). Очевидно, що підпростір U_1 ін'єктивно і щільно вкладається в поповнення U_1 щодо гільбертової норми, яка задається скалярним добутком, що є звуженням B_P на $U_1 \times U_1$.

(iii). Зауважимо, що $\mathcal{P}_{n-1} = (\Delta_{n-1})^*$. Приймемо, що $V = (U_1)^{\perp}$. Тоді $\mathcal{P}_{n-1} = U_1^*$. З пункту *(ii)* цієї теореми випливає існування ін'єктивного оператора $A : U_1 \to H$ зі щільним образом, де H – гільбертів простір. Тоді $A^* : H^* \to U_1^*$ є ін'єктивним оператором зі щільним образом, який задає шукане відображення. Теорему доведено.

---

1. *Dineen S.* Complex Analysis on Locally Convex Spaces. – North Holland, Amsterdam : Math Studies, 57, 1981.
2. *Aron R, Boyd C, Ryan R. A., Zalduendo I.* Zeros of Polynomials on Banach spaces – The Real Story // preprint.
3. *Gelbaum B. R., Gil de Lamadrid J.* Bases of tensor products of Banach spaces // Pacific J. Math. – 1961. – Vol. 11. – P.1281-1286.

A. Zagorodnyuk

ON POSITVE POLYNOMIALS ON REAL BANACH SPACES

Some properties of Banach spases which admist positive polinomials of even degree are investigated.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99

УДК 517.95

Микола Іванчов

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З НЕВІДОМИМ ВІЛЬНИМ ЧЛЕНОМ

Відомо, що методи дослідження обернених задач суттєво визначаються тим, від яких змінних залежать невідомі параметри задачі – чи від просторових, чи від часу [1-7]. Особливо цікавою є можливість одночасного визначення параметрів задачі, що залежать від різних аргументів [8,9]. У праці вивчено обернену задачу для рівняння теплопровідності, вільний член якого містить дві невідомі функції, залежні від різних аргументів.

В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу для рівняння

$$u_t = u_{xx} + g_0(x,t) + f_1(x)g_1(x,t) + f_2(t)g_2(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

з невідомими функціями $f_1(x)$ і $f_2(t)$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$u(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$u(x,T_0) = \psi(x), \quad x \in [0,h], \; 0 < T_0 \leqslant T. \tag{5}$$

Під розв'язком задачі (1)-(5) розумітимемо сукупність функцій ($f_1(x)$, $f_2(t)$, $u(x,t)$) з класу $H^{\gamma}[0,h] \times H^{\gamma/2}[0,T] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_T), 0 < \gamma < 1$ [10], що задовольняють умови (1)–(5).

Теорема. *Припустимо, що виконуються умови:*

(A1) $\varphi \in H^{2+\gamma}[0,h], \psi \in H^{2+\gamma}[0,h], \mu_i \in H^{(1+\gamma)/2}[0.T], i = 1,2, \mu_3 \in H^{1+\gamma/2}[0.T]$, $g_i \in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_T), 0 < \gamma < 1, i = 0,1,2$;

(A2) $g_2(0,t) \neq 0, t \in [0,T], \; \int\limits_0^{T_0} g_1(x,t)dt \neq 0, \; x \in [0,h]$;

(A3) $\varphi(0) = \mu_3(0), \; \varphi'(0) = \mu_1(0), \; \varphi'(h) = \mu_2(0), \; \mu_3(T_0) = \psi(0), \; \mu_1(T_0) = \psi'(0), \; \mu_2(T_0) = \psi'(h)$.

Тоді при досить малому числі $T_0, 0 < T_0 \leqslant T$, що визначається вихідними даними, існує єдиний розв'язок задачі (1)–(5).

Доведення. Зведемо задачу (1)–(5) до системи інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій $f_1(x), f_2(t)$. Перше рівняння системи знаходимо, інтегруючи рівняння (1) за t від 0 до T_0 і використовуючи умову перевизначення (5) і початкову умову (2), а друге рівняння – приймаючи в (1) $x = 0$ і враховуючи умову (4). Внаслідок цього приходимо до системи рівнянь

$$f_1(x) = \frac{\psi(x) - \varphi(x) - \int\limits_0^{T_0} g_0(x,t)dt - \int\limits_0^{T_0} u_{xx}(x,t)dt - \int\limits_0^{T_0} f_2(t)g_2(x,t)dt}{\int\limits_0^{T_0} g_1(x,t)dt}, \quad x \in [0,h], \tag{6}$$

$$f_2(t) = \frac{\mu_3'(t) - g_0(0,t) - f_1(0)g_1(0,t) - u_{xx}(0,t)}{g_2(0,t)}, \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

в якій $u(x,t)$ – розв'язок прямої задачі (1)–(3) при відомих функціях $(f_1(x), f_2(t)) \in H^\gamma[0,h] \times H^{\gamma/2}[0,T]$. Для знаходження $u(x,t)$ використаємо функцію Гріна $G(x,t,\xi,\tau)$ задачі (1)–(3)

$$G(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(t-\tau)} \right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(t-\tau)} \right) \right).$$

Тоді

$$u(x,t) = \int\limits_0^h G(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi - \int\limits_0^t G(x,t,0,\tau)\mu_1(\tau)d\tau + \int\limits_0^t G(x,t,h,\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \tag{8}$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G(x,t,\xi,\tau)g_0(\xi,\tau)d\xi d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G(x,t,\xi,\tau)(f_1(\xi)g_1(\xi,\tau) + f_2(\tau)g_2(\xi,\tau))d\xi d\tau.$$

Враховуючи з формули (8) та інтегруючи частинами з використанням очевидних співвідношень

$$G_{xx}(x,t,\xi,\tau) = G_{\xi\xi}(x,t,\xi,\tau) = -G_\tau(x,t,\xi,\tau),$$

знаходимо

$$u_{xx}(x,t) = \int\limits_0^h G(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi - \int\limits_0^t G(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t G(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{xx}(x,t,\xi,\tau)g_0(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{xx}(x,t,\xi,\tau)(f_1(\xi)g_1(\xi,\tau) + f_2(\tau)g_2(\xi,\tau))d\xi d\tau. \tag{9}$$

Підставляючи (9) в (6) і (7), приходимо до системи інтегральних рівнянь

$$f_1(x) = f_{01}(x) - \frac{1}{\int\limits_0^{T_0} g_1(x,t)dt} \int\limits_0^{T_0} dt \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{xx}(x,t,\xi,\tau)(f_1(\xi)g_1(\xi,\tau)+$$

$$+f_2(\tau)g_2(\xi,\tau))d\xi d\tau - \frac{1}{\int\limits_0^{T_0} g_1(x,t)dt} \int\limits_0^{T_0} f_2(t)g_2(x,t)dt, \quad x \in [0,h], \tag{10}$$

$$f_2(t) = f_{02}(t) - \frac{g_1(0,t)}{g_2(0,t)} f_1(0) - \frac{1}{g_2(0,t)} \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{xx}(0,t,\xi,\tau)(f_1(\xi)g_1(\xi,\tau)+$$

$$+f_2(\tau)g_2(\xi,\tau))d\xi d\tau, \quad t \in [0,T], \tag{11}$$

з відомими функціями $f_{01}(x), f_{02}(t)$, в якій перше рівняння є рівнянням Фредгольма, а друге – рівнянням Вольтерри.

Покажемо, що при досить малому $T_0, 0 < T_0 \leqslant T$, однорідне рівняння Фредгольма

$$f(x) = -\frac{1}{\int\limits_0^{T_0} g_1(x,t)dt} \int\limits_0^{T_0} dt \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{xx}(x,t,\xi,\tau) f(\xi) g_1(\xi,\tau) d\xi d\tau, \quad x \in [0,h], \tag{12}$$

має тільки тривіальний розв'язок $f(x) \equiv 0$.

З вигляду функції Гріна легко визначити оцінку

$$|G_{xx}(x,t,\xi,\tau)| \leqslant C_1 + \frac{C_2}{(t-\tau)^{3/2}}, \quad x,\xi \in [0,h], \ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \tag{13}$$

з відомими сталими $C_i > 0, i = 1,2$. Застосовуючи її до рівняння (12), одержуємо нерівність

$$|f(x)| \leqslant C_3 \sqrt{T_0} \int\limits_0^h |f(\xi)| d\xi, \tag{14}$$

в якій стала $C_3 > 0$ очевидно виражається через відомі величини та сталі C_1, C_2. Інтегруючи (14) від 0 до h і вважаючи $0 < T_0 \leqslant T$ настільки малим, що $C_3 h \sqrt{T_0} < 1$, отримуємо $f(x) \equiv 0$. Це означає, що для рівняння (12), а, отже, і рівняння (10) виконується перший випадок альтернативи Фредгольма – існування єдиного розв'язку. Подамо розв'язок рівняння (10) за допомогою резольвенти $R(x,\eta)$:

$$f_1(x) = \int\limits_0^h R(x,\eta) \left(f_{01}(\eta) - \frac{1}{\int\limits_0^{T_0} g_1(\eta,t)dt} \int\limits_0^{T_0} f_2(t) g_2(\eta,t) dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\int\limits_0^{T_0} g_1(\eta,t)dt} \int\limits_0^{T_0} dt \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{\eta\eta}(\eta,t,\xi,\tau) f_2(\tau) g_2(\xi,\tau) d\xi d\tau \right) d\eta, \quad x \in [0,h]. \tag{15}$$

Зауважимо, що з оцінки (13) випливає неперервність ядра інтегрального рівняння (12), а тому його резольвента $R(x, \eta)$ є неперервною функцією при $x, \xi \in [0, h]$.

Підставляючи (15) в (11), приходимо до інтегрального рівняння стосовно невідомої функції $f_2(t)$:

$$f_2(t) = \tilde{f}_{02}(t) + \int_0^{T_0} K_1(t,\tau) f_2(\tau) d\tau + \int_0^t K_2(t,\tau) f_2(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T], \tag{16}$$

в якому $\tilde{f}_{02}(t)$ – відома функція з класу $H^{\gamma/2}[0, T]$, ядро $K_1(t, \tau)$ очевидно виражається через відомі функції і належить до класу $H^{\gamma/2}[0, T] \times [0, T_0]$, а для ядра

$$K_2(t, \tau) = -\frac{1}{g_2(0,t)} \int_0^h G_{xx}(0, t, \xi, \tau) g_2(\xi, \tau) d\xi \tag{17}$$

є оцінка [11]

$$|K_2(t,\tau)| \leqslant \frac{C_4}{(t-\tau)^{\gamma/2}}. \tag{18}$$

Застосовуючи до рівняння (16) метод послідовних наближень, легко доводимо існування єдиного неперервного розв'язку цього рівняння на деякому проміжку $[0, T_1]$, де число $T_1, 0 < T_1 \leqslant T$ визначається відомими величинами. Крім того, з умов теореми і властивостей теплових об'ємних потенціалів [11] випливає, що $f_2(t) \in H^{\gamma/2}[0, T_1]$. Вважаючи число $T_0 > 0$ настільки малим, що $T_0 \leqslant T_1$, і підставляючи $f_2(t)$ в (15), одержуємо $f_1(x) \in H^{\gamma}[0, h]$. Отже, при $x \in [0, h], t \in [0, T_1]$ доведено існування єдиного розв'язку системи рівнянь (10), (11).

Покажемо, що розв'язок оберненої задачі (1)–(5) існує на всьому проміжку часу $[0, T]$. Як видно з попереднього при досить малому T_0 однозначно визначається невідома функція $f_1(x)$. Підставляючи її в рівняння (1), обернену задачу (1)–(5) з невідомими функціями $(f_1(x), f_2(t), u(x,t))$ зводимо до оберненої задачі (1)–(4) з невідомими $(f_2(t), u(x,t))$, яка еквівалентна інтегральному рівнянню Вольтерра другого роду

$$f_2(t) = F_2(t) - \frac{1}{g_2(0,t)} \int_0^t \int_0^h G_{xx}(0, t, \xi, \tau) g_2(\xi, \tau) f_2(\tau) d\xi d\tau, \quad t \in [0, T], \tag{19}$$

де $F_2(t) \in H^{\gamma/2}[0, T]$ – відома функція. Враховуючи (17), (18), доводимо існування єдиного розв'язку $f_2(t) \in H^{\gamma/2}[0, T]$, а звідси – і єдиного розв'язку $(f_2(t), u(x,t))$ задачі (1)–(4) з класу $H^{\gamma/2}[0, T] \times H^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\overline{Q}_T)$. Тоді сукупність знайдених функцій $(f_1(x), f_2(t), u(x,t))$ утворює єдиний розв'язок оберненої задачі (1)–(5). Теорему доведено.

Зауважимо, що доведена теорема може бути використана при дослідженні єдиності розв'язку обернених задач для параболічного рівняння з двома невідомими коефіцієнтами, що залежать від різних аргументів [8].

---

1. *Прилепко А.И., Костин А.Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. I// Сиб. мат. журн. – 1992. – Т. 33. – N 3. – С. 146–155.

2. *Прилепко А.И., Костин А.Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II// Сиб. мат. журн. – 1993. – Т. 34. – N 5. – С. 147–162.
3. *Прилепко А.И., Соловьев В.В.* Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. II// Дифференциальные уравнения – 1987. – Т. 23. – N 11. – С. 1971–1980.
4. *Прилепко А.И., Соловьев В.В.* Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. I// Дифференциальные уравнения – 1987. – Т. 23. – N 10. – С. 1791–1799.
5. *Majchrowski M.* On inverse problem with nonlocal condition for parabolic systems of partial differential equations and pseudoparabolic equations// Demonstr. Math. – 1993. – Vol. 26. – N 1. – P. 255–275.
6. *Іванчов М.І.* Обернена задача визначення потужності джерел тепла для параболічного рівняння при довільних крайових умовах// Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – Вип. 40. – N 1. – С. 125–129.
7. *Смирнов Г.П., Фатыхов М.А.* О задаче определения правой части уравнения теплопроводности// Дифференциальные уравнения – 1988. – Т. 24. – N 4. – С. 711–716.
8. *Ivantchov M.I.* Détermination simultanée de deux coefficients aux variables diverses dans une équation parabolique// Мат. студії. – 1998. – Т.10. – N 2. – С. 173–187
9. *Саватеев Е.Г.* О задаче идентификации коэффициента в параболическом уравнении// Сиб. мат. журн. – 1995. – Т. 36. – N 1. – С. 177–185.
10. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.
11. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М., 1968.

M. Ivanchov

AN INVERSE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION WITH THE UNKNOWN FREE TERM

Existence and uniqueness conditions for solution of the inverse problem for finding of the free term $f(x,t) = g_0(x,t) + f_1(x)g_1(x,t) + f_2(t)g_2(x,t)$ in the one-dimensional nonhomogeneous heat equation with unknown functions $f_1(x), f_2(t)$ are established.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.99–105

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.99–105

УДК 517.95

VALERIJ KOZYTSKY, LESYA MELNYK

INVERSE PROBLEM OF DETERMINATION OF TIME DEPENDENT SOURCE FOR PSEUDOPARABOLIC EQUATION

Introduction. We consider an inverse problem of determination of unknown time dependent source for pseudoparabolic equation with nonlocal boundary conditions and nonlocal overdetermination condition. The conditions for existence and uniqueness of solution of the inverse problem are obtained.

The method of [1] is used. Note that in this case unlike to many other parers for similar problems (see [2-4]), this problem includes nonlocal boundary conditions and a nonlocal overdetermination condition.

Formulation of problem and denotation. Let $Q_T = (0, H) \times (0, T)$, $T > 0$, $H > 0$. We introduce the following notation:

$$C^{1,0}(\overline{Q}_T) = \{u \in C(\overline{Q}_T) : u_x \in C(\overline{Q}_T)\},$$
$$C^{(2,1)}(Q_T) = \{u \in C(Q_T) : u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{xxt} \in C(Q_T)\}.$$

In the domain Q_T we consider the problem to find a pair of functions $(u(x,t)\,,\, f(t)) \in C^{(2,1)}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T) \times C[0,T]$ which satisfy the conditions:

$$\begin{aligned} Lu \equiv & u_{xxt} - k(x,t)u_t + \eta(x,t)u_{xx} + c(x,t)u_{xt} + a(x,t)u_x + b(x,t)u = \\ = & f(t)h(x,t) + g(x,t), \ (x,t) \in Q_T, \end{aligned} \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ x \in [0,H], \tag{2}$$

$$\begin{aligned} (P_1u)(t) \equiv & \alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(H,t) + \\ & + \alpha_3(t)u_x(0,t) + \alpha_4(t)\int_0^H u(x,t)dx = \varphi_1(t), \\ (P_2u)(t) \equiv & \beta_1(t)u(H,t) + \beta_2(t)u_x(0,t) + \\ & + \beta_3(t)u_x(H,t) + \beta_4(t)\int_0^H u(x,t)dx = \varphi_2(t), \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{3}$$

$$(\Phi u)(t) \equiv \gamma_1(t)u(x_0,t) + \gamma_2(t)\int_0^H \sigma(x,t)u(x,t)dx = \delta(t), \ \ t \in [0,T], \tag{4}$$

where x_0 is a fixed point, $x_0 \in (0,H)$.

Let

$$a_{11}(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)\chi(H,t) + \alpha_4(t)\int_0^H \chi(x,t)dx,$$

$$a_{12}(t) = \alpha_2(t)\lambda(H,t) + \alpha_3(t) + \alpha_4(t)\int_0^H \lambda(x,t)dx,$$

$$a_{21}(t) = \beta_1(t)\chi(H,t) + \beta_3(t)\chi_x(H,t) + \beta_4(t)\int_0^H \chi(x,t)dx,$$

$$a_{22}(t) = \beta_1(t)\lambda(H,t) + \beta_2(t) + \beta_3(t)\lambda_x(H,t) + \beta_4(t)\int_0^H \lambda(x,t)dx,$$

where functions χ and λ are solutions of the corresponding Cauchy problems:

$$\chi_{xx}(x,t) + c(x,t)\chi_x(x,t) - k(x,t)\chi(x,t) = 0,\ \chi(0,t) = 1,\ \chi_x(0,t) = 0;$$
$$\lambda_{xx}(x,t) + c(x,t)\lambda_x(x,t) - k(x,t)\lambda(x,t) = 0,\ \lambda(0,t) = 0,\ \lambda_x(0,t) = 1.$$

Theorem. *Let the following conditions be satisfied:*
1) $k, c, \sigma, k_t, c_t, \eta, a, b, h, g, \sigma_t \in C(\overline{Q}_T)$; $\alpha_i, \beta_i \in C^1[0,T], i = \overline{1,4}$; $\varphi_i \in C^1[0,H]$, $i = 1,2$; $u_0 \in C^2[0,H]$; $\delta \in C^1[0,T]$; $\gamma_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2$, $\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) \neq 0, t \in [0,T]$; $k(x,t) \geqslant k_0 > 0$, $(x,t) \in \overline{Q}_T$;

2) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = 2;$

$$\alpha_1(0)u_0(0) + \alpha_2(0)u_0(H) + \alpha_3(0)u_0'(0) + \alpha_4(0)\int_0^H u_0(x)dx = \varphi_1(0),$$

$$\beta_1(0)u_0(H) + \beta_2(0)u_0'(0) + \beta_3(0)u_0'(H) + \beta_4(0)\int_0^H u_0(x)dx = \varphi_2(0),$$

$$\gamma_1(0)u_0(x_0) + \gamma_2(0)\int_0^H \sigma(x,0)u_0(x)dx = \delta(0);$$

3) $\Delta(t) = a_{11}(t)a_{22}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t) \neq 0, \quad t \in [0,T]$;

4) $(\Phi w)(t) \neq 0, t \in [0,T]$, *where the function* w *is a solution of the problem*

$$w_{xx}(x,t) + c(x,t)w_x(x,t) - k(x,t)w(x,t) = h(x,t), \quad x \in (0,H),$$

$$\alpha_1(t)w(0,t) + \alpha_2(t)w(H,t) + \alpha_3(t)w_x(0,t) + \alpha_4(t)\int_0^H w(x,t)dx = 0,$$

$$\beta_1(t)w(H,t) + \beta_2(t)w_x(0,t) + \beta_3(t)w_x(H,t) + \beta_4(t)\int_0^H w(x,t)dx = 0.$$

Then there exists an unique solution of problem (1)-(4).

Remark 1.
It was proved in [1] that $\lambda(x,t)>0$, $\chi(x,t)>1$, $\lambda_x(x,t)>0$, $\chi_x(x,t)>0$, $\gamma(x,t)=\chi(x,t)\lambda_x(x,t)-\chi_x(x,t)\lambda(x,t)>0$,
$q(x,t)=\lambda(x,t)\int\limits_0^x\chi(s,t)ds-\chi(x,t)\int\limits_0^x\lambda(s,t)ds>0$,
$\forall x\in(0,H],\forall t\in[0,T]$.

Since the function $y(x,t)=\lambda_x(x,t)\int\limits_0^x\chi(s,t)ds-\chi_x(x,t)\int\limits_0^x\lambda(s,t)ds$ is a solution of the Cauchy problem

$$y_x(x,t)+c(x,t)y(x,t)=\gamma(x,t)+k(x,t)q(x,t),\quad y(0,t)=0,$$

we see that $y(x,t)>0,\forall x\in(0,H],\forall t\in[0,T]$.

Let δ_{ij} be the determinants composed of the i,j-th columns of the matrix from condition 2) of the Theorem.

Suppose $\delta_{25}\neq0$, then

$$\begin{gathered}\Delta(t)=\delta_{13}(t)+\delta_{23}(t)\chi(H,t)+\delta_{12}(t)\lambda(H,t)+\delta_{14}\lambda_x(H,t)-\\-\delta_{34}(t)\chi_x(H,t)+\delta_{15}(t)\int\limits_0^H\lambda(x,t)dx-\delta_{35}(t)\int\limits_0^H\chi(x,t)dx+\\+\delta_{24}(t)\gamma(H,t)-\delta_{25}(t)q(H,t)-\delta_{45}(t)y(H,t)\neq0,\forall t\in[0,T],\end{gathered}$$

if

$$\begin{gathered}\delta_{13}/\delta_{25}\leqslant0,\delta_{23}/\delta_{25}\leqslant0,\delta_{12}/\delta_{25}\leqslant0,\delta_{14}/\delta_{25}\leqslant0,\delta_{34}/\delta_{25}\geqslant0,\\\delta_{15}/\delta_{25}\leqslant0,\delta_{35}/\delta_{25}\leqslant0,\delta_{24}/\delta_{25}\leqslant0,\delta_{45}/\delta_{25}\geqslant0.\end{gathered}$$

We obtain the similar conditions for $\Delta\neq0$, considering other 9 cases $\delta_{13}\neq0,\delta_{23}\neq0,\delta_{12}\neq0,\delta_{14}\neq0,\delta_{34}\neq0,\delta_{15}\neq0,\delta_{35}\neq0,\delta_{24}\neq0,\delta_{45}\neq0$. There exists a unique solution of direct problem (1)-(3) [1] under conditions 1)-3) of the Theorem.

Remark 2. As a general solution of homogeneous equation of Theorem condition 4) can be written in the form $w(x,t)=C_1\chi(x,t)+C_2\lambda(x,t)$, where $\forall t\in[0,T]$, C_1,C_2 are arbitrary constants, a homogeneous boundary value problem has only trivial solution due to conditions of the Theorem.

Proof. As our problem (1)-(4) is linear, its solution can be found in the form:

$$\begin{aligned}&(u,f)=(u^1,0)+(u^2,f),\ \text{ where }\ Lu^1=g(x,t)\,,\ u^1(x,0)=u_0(x),\\&(P_1u^1)(t)=\varphi_1(t)\ ,\ (P_2u^1)(t)=\varphi_2(t);\\&Lu^2=f(t)h(x,t)\,,\ u^2(x,0)=0\,,\ (P_1u^2)(t)=0\,,\ (P_2u^2)(t)=0,\\&(\Phi u^2)(t)=\delta(t)-(\Phi u^1)(t).\end{aligned}$$

It is easy to show that we can investigate only the following problem:

$$Lu=f(t)h(x,t),\quad(x,t)\in Q_T,\tag{5}$$
$$u(x,0)=0,\quad x\in[0,H],\tag{6}$$
$$(P_1u)(t)=(P_2u)(t)=0,\quad t\in[0,T],\tag{7}$$
$$(\Phi u)(t)=\delta(t),\quad t\in[0,T],\quad\delta(0)=0.\tag{8}$$

Let the function f be known. Then we shall search the solution of problem (5)-(7) in the form [1]:

$$u(x,t)=\chi(x,t)\mu(t)+\lambda(x,t)\nu(t)+\int\limits_0^t k_1(x,t,\tau)\mu(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t k_2(x,t,\tau)\nu(\tau)d\tau+\int\limits_0^x\int\limits_0^t G(x,t,s,\tau)h(s,\tau)f(\tau)d\tau ds, \tag{9}$$

where

$$\mu(t)=u(0,t)\,,\ \nu(t)=u_x(0,t)\,,\ t\in[0,T];$$
$$G(x,t,s,\tau)=p(x,t,s,\tau)+\int\limits_s^x\int\limits_\tau^t p(x,t,\xi,t_1)R(\xi,t_1,s,\tau)dt_1d\xi;$$
$$p(x,t,s,\tau)=(x-s)\omega_1(t,s,\tau)+\omega_2(x,s,\tau)-(x-s);$$

$R(x,t,s,\tau)$ is the resolvent of the kernel

$$\begin{aligned}A(x,t,s,\tau)=&k(x,t)(x-s)\omega_{1t}(t,s,\tau)-\eta(x,t)\omega_{2xx}(x,s,\tau)-\\&-c(x,t)\omega_{1t}(t,s,\tau)-a(x,t)\Big(\omega_1(t,s,\tau)+\omega_{2x}(x,s,\tau)-1\Big)-\\&-b(x,t)\Big((x-s)\omega_1(t,s,\tau)+\omega_2(x,s,\tau)-(x-s)\Big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_i(x,t,\tau)=&\int\limits_0^x\Bigg[p(x,t,s,\tau)P_i(s,\tau)-\frac{\partial[p(x,t,s,\tau)q_i(s,\tau)]}{\partial\tau}-\\&-\int\limits_0^s\int\limits_\tau^t p(x,t,s,t_1)R_i(s,t_1,\xi,\tau)dt_1d\xi\Bigg]ds\,,\ i=1,2;\end{aligned}$$

$$q_1=k(s,\tau)\,,\ q_2=sk(s,\tau)-c(s,\tau);$$
$$R_i(s,t_1,\xi,\tau)=R(s,t_1,\xi,\tau)z_i(\xi,\tau)+\frac{\partial[R_i(s,t_1,\xi,\tau)q_i(\xi,\tau)]}{\partial\tau}\,,\ i=1,2;$$
$$z_1=b(\xi,\tau)\,,\ z_2=a(\xi,\tau)+\xi b(\xi,\tau);$$
$$P_i(s,\tau)=-z_i(s,\tau)+\int\limits_0^s A(s,\tau,\xi,\tau)q_i(\xi,\tau)d\xi\,,\ i=1,2;$$

$\omega_1(t,s,\tau)$ and $\omega_2(x,s,t)$ are the solutions of the following Cauchy problems:

$$\omega_{1t}(t,s,\tau)+\eta(s,t)\omega_1(t,s,\tau)=0\,,\ t\in(0,T)\,,\ \omega_1(\tau,s,\tau)=1;$$
$$\omega_{2xx}(x,s,t)+c(x,t)\omega_{2x}(x,s,t)-k(x,t)\omega_2(x,s,t)=0,\quad x\in(0,H),$$
$$\omega_2(s,s,t)=0,\quad \omega_{2x}(s,s,t)=1.$$

We obtain the following system of Volterra equations of the second kind with continuously differentiable kernels and right parts by substituting (9) in (7) and taking into account the conditions of the Theorem:

$$\begin{cases} \mu(t) &= \int\limits_0^t \Big(K_{11}(t,\tau)\mu(\tau) + K_{12}(t,\tau)\nu(\tau)\Big)d\tau + \psi_1(t), \\ \nu(t) &= \int\limits_0^t \Big(K_{21}(t,\tau)\mu(\tau) + K_{22}(t,\tau)\nu(\tau)\Big)d\tau + \psi_2(t), \end{cases} \tag{10}$$

where

$$\begin{aligned} K_{i,j}(t,\tau) =& (-1)^i\Delta^{-1}(t)\Big[(\alpha_2(t)a_{2\ 3-i}(t) - \beta_j(t)a_{1\ 3-i}(t))k_j(H,t,\tau) - \\ & -\beta_3(t)a_{1\ 3-i}(t)k_{j_x}(H,t,\tau) + (\alpha_4(t)a_{2\ 3-i}(t) - \\ & -\beta_4(t)a_{1\ 3-i}(t))\int\limits_0^H k_j(x,t,\tau)dx\Big], \quad i,j = 1,2; \\ G_i(t,\tau) =& (-1)^i\Delta^{-1}(t)\int\limits_0^H\Big[(\alpha_2(t)a_{2\ 3-i}(t) - \beta_1(t)a_{1\ 3-i}(t))\times \\ & \times G(H,t,\xi,\tau) - \beta_3(t)a_{1\ 3-i}(t)G_x(H,t,\xi,\tau) + (\alpha_4(t)a_{2\ 3-i}(t) - \\ & -\beta_4(t)a_{1\ 3-i}(t))\int\limits_\xi^H G(x,t,\xi,\tau)dx\Big]h(\xi,\tau)d\xi, \quad i = 1,2, \\ \psi_i(t) =& \int\limits_0^t G_i(t,\tau)f(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

From the first equation of system (10) we obtain the following representation:

$$\mu(t) = \int\limits_0^t A_1(t,\tau)\nu(t,\tau)d\tau + \Psi_1(t), \tag{11}$$

where

$$A_1(t,\tau) = K_{12}(t,\tau) + \int\limits_\tau^t R_1(t,s)K_{12}(s,\tau)ds, \ \Psi_1(t) = \int\limits_0^t R_1(t,\tau)\psi_1(\tau)d\tau + \psi_1(t),$$

$R_1(t,\tau)$- resolvent of kernel K_{11}.

Substituting (11) to the second equation of (10) we obtain:

$$\nu(t) = \int\limits_0^t A_2(t,\tau)\nu(\tau)d\tau + \Psi_2(t), \tag{12}$$

where

$$A_2(t,\tau) = K_{22}(t,\tau) + \int\limits_\tau^t K_{21}(t,s)A_1(s,\tau)ds,$$

$$\Psi_2(t) = \int_0^t K_{21}(t,\tau)\Psi_1(\tau)d\tau + \psi_2(t).$$

Consequently, there exists the following representation of the solution of system (10):

$$\mu(t) = \int_0^t A_5(t,\tau)f(\tau)d\tau, \quad \nu(t) = \int_0^t B_3(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{13}$$

where

$$A_5(t,\tau) = \int_\tau^t \Big(A_4(t,s)G_1(s,\tau) + A_3(t,s)G_2(s,\tau)\Big)ds + G_1(t,\tau),$$

$$A_4(t,\tau) = \int_\tau^t \Big(R_1(t,\tau)\int_s^t A_3(t,s_1)K_{21}(s_1,s)ds_1 + A_3(t,s)K_{12}(s,\tau)\Big)ds + R_1(t,\tau),$$

$$B_3(t,\tau) = \int_\tau^t \Big(B_2(t,s)G_1(s,\tau) + R_2(t,s)G_2(s,\tau)\Big)ds + G_2(t,\tau),$$

$$A_3(t,\tau) = \int_\tau^t A_1(t,s)R_2(s,\tau)ds, \quad B_2(t,\tau) = B_1(t,\tau) + \int_\tau^t B_1(t,s)R_1(s,\tau)ds,$$

$$B_1(t,\tau) = K_{21}(t,\tau) + \int_\tau^t R_2(t,s)K_{21}(s,\tau)ds,$$

$R_2(t,\tau)$ is the resolvent of the kernel $A_2(t,\tau)$.

The solution of problem (5)-(7) can be written by substituting (13) to (9) in the form :

$$u(x,t) = \int_0^t G_3(x,t,\tau)f(\tau)d\tau. \tag{14}$$

where

$$G_3(x,t,\tau) = \chi(x,t)A_5(t,\tau) + \lambda(x,t)B_3(t,\tau) + \int_\tau^t k_1(x,s,\tau)A_5(s,\tau)ds +$$
$$+ \int_\tau^t k_2(x,t,s)B_3(s,\tau)ds + \int_0^x G(x,t,s,\tau)h(s,\tau)ds.$$

Differentiating (8) on t and accounting (14) we obtain

$$(\Phi w)(t)f(t) + \int_0^t G_4(t,\tau)f(\tau)d\tau = \delta'(t), \tag{15}$$

where

$$w(x,t) = G_1(t,t)\chi(x,t) + G_2(t,t)\lambda(x,t) + \int_0^x \omega_2(x,s,t)h(s,t)ds, \tag{16}$$

$$G_4(t,\tau) = \gamma_1(t)G_{3t}(x_0,t,\tau) + \gamma_1'(t)G_3(x_0,t,\tau) + \gamma_2'(t)\int_0^H \sigma(x,t)G_3(x,t,\tau)dx +$$
$$+ \gamma_2(t)\int_0^H \sigma_t(x,t)G_3(x,t,\tau)dx + \gamma_2(t)\int_0^H \sigma(x,t)G_{3t}(x,t,\tau)dx.$$

It is easy to show that the following statement is valid due to conditions of the Theorem:

If (u,f) is the solution of problem (5)-(8), then f is the solution of equation (15). Vice versa, if f is the solution of equation (15), then (u,f) is the solution of problem (5)-(8), where u is reperesenting by (14).

Hence, it is enough to define solvability conditions of equation (15).

So, if $(\Phi w)(t) \neq 0, t \in [0,T]$, we obtain a second-order Volterra equation with continuous functions $\frac{1}{(\Phi w)(t)}G_4(t,\tau)$, $\frac{1}{(\Phi w)(t)}\delta'(t)$ for determination of f.

Hence, the theorem is proved.

---

1. *Kozytsky V.A.* Direct and inverse problems for pseudoparabolic equation in models of liquid filtering in capillary-porous medium// Visn. Lviv. univ. Ser.mech.-math.- 1996. - Vol.45. - P.57-70. (in Ukrainian)
2. *Ablabekov B.S.* One-dimensional inverse problems for liquid filtration equation in cracked solid and approximate methods of solving// Issled. po integro-differents. uravn. - 1988. - - Vol.21. - P.273-280. (in Russian)
3. *Majkhrowsky M.* On inverse problems with nonlocal condition for parabolic systems of partial differential equations and pseudoparabolic equations// Demonstr. matem. - 1993. - Vol.26. - N 1. - P.255-275.
4. *Ablabekov B.S.* On some inverse problems for liquid filtration equation in cracked solid// Tez. dokl. vsesojuznoj konfer. "Uslovno korrektnyje zadachi matemat. fiziki i analiza". - Novosib.,1992.- P.42. (in Russian)
5. *Asanov A., Artamanov E.R.* An inverse problem for a pseudoparabolic operator equation// J. Inv. Ill-Posed Problems. - 1994. - Vol.2. - N1. - P.1-13

В. Козицький, Л.Мельник

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ЗНАХОДЖЕННЯ ДЖЕРЕЛА ЗАЛЕЖНОГО ВІД ЧАСУ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

У праці досліджено обернену задачу знаходження залежного від часу джерела для псевдопараболічного рівняння. Отримано умови існування та єдиності розв'язку зазначеної задачі.

Стаття надійшла до редколегії 27.09.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.106–115 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.106–115*

УДК 517.956.4

Богдан Копитко, Жаннета Цаповська

МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ У ПАРАБОЛІЧНІЙ КРАЙОВІЙ ЗАДАЧІ З ГРАНИЧНОЮ УМОВОЮ ВЕНТЦЕЛЯ

У праці методом теорії потенціалів доведено теорему про існування (у просторі Гельдера) розв'язку параболічної крайової задачі з граничним параболічним оператором, заданим на гладкій елементарній бічній межі напівобмеженої нециліндричної області.

Задачі з крайовим оператором другого порядку еліптичного та параболічного типів для лінійних параболічних рівнянь другого порядку виникають, зокрема, в теорії випадкових процесів при дослідженні поведінки дифузійного процесу в області з межею (див., наприклад, [5, 8, 10]). У цьому випадку дифузія звичпо описується оператором другого порядку з крайовим оператором такого ж порядку і типу. Загальний вигляд крайових умов для багатовимірних дифузійних процесів знайшов О.Д. Вентцель [4]. Часткові випадки таких задач вивчалися з використанням методів теорії потенціалів у [8, 10]. За допомогою інших методів параболічні крайові задачі з граничною умовою Вентцеля у найбільш загальних постановках (проте лише для випадку гладких обмежених циліндричних областей) досліджувалися в працях [1, 3, 6].

1. **Основні позначення та деякі означення.** Нехай R^n, $n \geqslant 2$, – n-вимірний евклідів простір; $R_T^{n+1} = R^n \times (0,T)$, $T > 0$ фіксоване; $R_T^n = R^{n-1} \times (0,T)$; $x = (x', x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ – точка в R^n; $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ – точка в R^{n-1}; $(x,t) = (x', x_n, t)$ – точка в R_T^{n+1}; (x', t) – точка в R_T^n; $|x|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$; $|x'|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2$.

Введемо позначення для операторів диференціювання: D_t^r і D_x^s – символи частинної похідної за t з порядком r і будь-якої частинної похідної за x з порядком s, де r і s – цілі, невід'ємні числа; $D_t^1 = D_t$, $D_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $D_{ij} = D_{ji} \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = 1, ..., n$, $\nabla' = (D_1, \dots, D_{n-1})$.

Так само, як в [9, с.16] $H_{x,\ t}^{k+\lambda,(k+\lambda)/2}(\overline{B}) \equiv H^{k+\lambda,(k+\lambda)/2}(\overline{B})$ ($k = 0,1,2$, B – область евклідового простору, $\overline{B}$ – замикання області B) означають відповідні функціональні простори Гельдера; $\underset{0}{H}{}^{k+\lambda,(k+\lambda)/2}(\overline{B})$ – множина функцій з $H^{k+\lambda,(k+\lambda)/2}(\overline{B})$, які (у випадку $k = 2$ разом з похідними за t) збігаються з нулем при $t = 0$. Через $\|w\|_{H^{k+\lambda,(k+\lambda)/2}(\overline{B})}$ позначається норма функції w в $H^{k+\lambda,(k+\lambda)/2}(\overline{B})$.

Розглянемо в $\overline{R}_T^{n+1}$ область $\Omega = \{(x,t) \in R_T^{n+1} \,|\, x_n > g(x',t)\}$ з нижньою основою D_0 на гіперплощині $\{t = 0\}$, верхньою основою D_T на гіперплощині

$\{t = T\}$ та елементарною бічною межею $\Sigma = \{(x,t) \in \overline{R}^{n+1}_T \mid x_n = g(x',t)\}$, де

$$g \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{R}^n_T). \qquad (1)$$

Умова (1) означає, що n-вимірна поверхня Σ належить до класу Гельдера $H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}$ ([9, с.19]).

Будемо використовувати також позначення: $\Omega_\tau = \Omega \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in (0,T)$, $\Omega_0 = D_0$, $\Omega_T = D_T$; $S_\tau = \Sigma \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $N(\xi,\tau) = (N_1(\xi,\tau), \ldots, N_n(\xi,\tau))$ – орт внутрішньої (по відношенню до перерізу Ω_τ) нормалі до S_τ у точці $(\xi,\tau) \in S_\tau$; ∂_{ij} $(i,j = 1,\ldots,n)$ – тангенціальний диференціальний оператор другого порядку на Σ, тобто $\partial_{ij} = \partial_{ji} = \sum\limits_{k,l=1}^{n} C_{ik}C_{jl}D_{kl}$, де $C_{ik} = \delta_{ik} - N_i N_k$, δ_{ik} – символ Кронеккера. Значення кожної функції $w(x,t)$ на Σ позначатимемо $\overline{w}(x',t)$. Всюди нижче C, c – додатні сталі, які не залежать від (x,t), конкретні величини яких нас цікавити не будуть.

2. **Параболічні потенціали. Регуляризатор.** У шарі R^{n+1}_T розглянемо рівномірно параболічний оператор другого порядку з дійсними коефіцієнтами

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)D_i u + a_0(x,t)u - D_t u, \quad (x,t) \in R^{n+1}_T. \qquad (2)$$

Припускаємо, що коефіцієнти оператора L визначені в $\overline{R}^{n+1}_T$ і виконані умови:

A1) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \delta_0|\xi|^2$, $a_{ij} = a_{ji}$, $\delta_0 > 0$, $\forall (x,t) \in \overline{R}^{n+1}_T$, $\forall \xi \in R^n$;

A2) a_{ij}, a_i, $a_0 \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}^{n+1}_T)$, $i,j = 1,\ldots,n$.

Умови A1), A2) забезпечують існування звичайного фундаментального розв'язку (ф.р.) $G(x,t;\xi,\tau)$ для оператора L (див. формулу (11.13) в [9, с.409]):

$$G(x,t;\xi,\tau) = G^{(\xi,\tau)}_{0,n}(x-\xi, t-\tau) + G_1(x,t;\xi,\tau), \ (x,t) \in \overline{R}^{n+1}_T, \ (\xi,\tau) \in \overline{R}^{n+1}_T, \qquad (3)$$

де

$$G^{(\xi,\tau)}_{0,n}(x-\xi, t-\tau) = G^{(\xi,\tau)}_{0,n}(x'-\xi', x_n-\xi_n, t-\tau) = (2\sqrt{\pi})^{-n}(\det A(\xi,\tau))^{-\frac{1}{2}} \times$$
$$\times (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{4(t-\tau)} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\xi,\tau)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)\right\}, \quad t > \tau, \qquad (4)$$

$A(\xi,\tau) = (a_{ij}(\xi,\tau))^n_{i,j=1}$, $a^{ij}(\xi,\tau)$, $i,j = 1,\ldots,n$ – елементи матриці $A^{-1}(\xi,\tau)$, оберненої до матриці $A(\xi,\tau)$, G_1 – інтегральний член, який має більш "слабку" особливість, ніж $G^{(\xi,\tau)}_{0,n}$ при $t \to \tau + 0$ і $G \equiv 0$, якщо $t \leqslant \tau$. До того ж існують такі додатні сталі C і c, що для функцій G і G_1 при $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $x,\xi \in R^n$ є правильними оцінки

$$|D^r_t D^s_x G(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s}{2}} \exp\left\{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}, \ 2r+s \leqslant 2, \qquad (5)$$

$$|D^r_t D^s_x G_1(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s-\lambda}{2}} \exp\left\{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}, \ 2r+s \leqslant 2. \qquad (6)$$

Розглядатимемо інтеграл – параболічний потенціал простого шару:

$$u_1(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{S_\tau} G(x,t;\xi,\tau)V(\xi,\tau)\,d\sigma_\xi(\tau), \quad (x,t) \in R_T^{n+1}, \tag{7}$$

де $d\sigma_\xi(\tau)$ – елемент поверхні Σ у перерізі $\{t = \tau\}$, V – задана на Σ обмежена вимірна функція. Як наслідок з оцінок (5), (6), функція u_1 неперервна в $\overline{R}_T^{n+1}$, задовольняє рівняння $Lu_1 = 0$ в $R_T^{n+1}\setminus\Sigma$ і нульову початкову умову $u_1(x,0) = 0$.

Нехай для $(x,t) \in \Sigma$ визначений вектор $\nu(x,t) = (\nu_1(x,t), \ldots, \nu_n(x,t))$, $\nu_i(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)N_j(x,t)$, $i = 1,\ldots,n$, який має назву конормалі. Тоді, якщо $V \in \underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$, то $u_1 \in \underset{0}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{\Omega})$ (див. [2; 11, с.36]), і для конормальної похідної функції u_1 правильна формула (стрибка) ([9, с.459; 2])

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial \nu(x,t)} = \lim_{\substack{(\overline{x},\overline{t})\to(x,t)\\ (\overline{x},\overline{t})\in\Omega}} \frac{\partial u_1(\overline{x},\overline{t})}{\partial \nu(x,t)} = -\frac{1}{2}V(x,t) +$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{S_\tau} \frac{\partial G(x,t;\xi,\tau)}{\partial \nu(x,t)} V(\xi,\tau)d\sigma_\xi(\tau), \quad (x,t) \in \Sigma. \tag{8}$$

Інтеграл у правій частині (8) називається прямим значенням конормальної похідної потенціалу простого шару. Його існування випливає з нерівності $((x,t) \in \Sigma \cap \{0 < t \leqslant T\}$, $(\xi,\tau) \in S_\tau$, $\tau < t)$

$$\left|\frac{\partial G(x,t;\xi,\tau)}{\partial \nu(x,t)}\right| \leqslant C(t-\tau)^{-\frac{n+1-\lambda}{2}} \exp\left\{-c\,\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}. \tag{9}$$

Далі, враховуючи (1), потенціал u_1 можна подати у вигляді

$$u_1(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} G(x,t;\xi,\tau)|_{\xi_n = g(\xi',\tau)} \hat{V}(\xi',\tau)\,d\xi', \quad (x,t) \in R_T^{n+1}, \tag{10}$$

де приймемо, що $\hat{V}(\xi',\tau) = \overline{V}(\xi',\tau)(1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1}(D_i g(\xi',\tau))^2)^{1/2}$.

При цьому в інтегралі (10) для фундаментального розв'язку (ф.р.) G використовуватимемо зображення:

$$G(x,t;\xi,\tau)|_{\xi_n=g(\xi',\tau)} = \tilde{G}_{0,n}^{(\xi',\tau)}(x'-\xi', x_n - g(x',t), t-\tau) +$$
$$+ \tilde{G}_{0,n}^{(\xi',\tau)}(x'-\xi', x_n - g(x',t), t-\tau)\left[\exp\left\{-\frac{R(x',t;\xi',\tau)}{4(t-\tau)}\right\} - 1\right] +$$
$$+ G_1(x,t;\xi,\tau)|_{\xi_n=g(\xi',\tau)}, \quad (x,t) \in R_T^{n+1}, \quad (\xi',\tau) \in R_T^n, \quad t > \tau, \tag{11}$$

де

$$\tilde{G}_{0,n}^{(\xi',\tau)}(x'-\xi', x_n - g(x',t), t-\tau) = (2\sqrt{\pi})^{-n}(\det \tilde{A}_n(\xi',\tau))^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{4(t-\tau)} \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}^{ij}(\xi',\tau)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)\right\}\Bigg|_{x_n-\xi_n=x_n-g(x',t)}, \tag{12}$$

$$\tilde{a}^{ij} = \tilde{a}^{ji} = \overline{a}^{ij} + \overline{a}^{nj} D_i g + \overline{a}^{in} D_j g + \overline{a}^{nn} D_i g D_j g, \qquad i,j = 1,\ldots,n-1, \tag{13}$$

$$\tilde{a}^{in} = \tilde{a}^{ni} = \overline{a}^{in} + \overline{a}^{nn} D_i g, \quad i = 1,\ldots,n-1, \quad \tilde{a}^{nn} = \overline{a}^{nn},$$
$$\tilde{A}_n = (\tilde{a}^{ij})_{i,j=1}^n, \qquad \det \tilde{A}_n = \det \overline{A}^{-1},$$

$$R(x,t;\xi',\tau) = 2\sum_{i=1}^n \tilde{a}^{in}(\xi',\tau)(x_i - \xi_i)(g(x',t) - g(\xi',\tau) -$$
$$- (\nabla' g(\xi',\tau), x' - \xi'))|_{x_n - \xi_n = x_n - g(x',t)} +$$
$$+ \tilde{a}^{nn}(\xi',\tau)(g(x',t) - g(\xi',\tau) - (\nabla' g(\xi',\tau), x' - \xi'))^2.$$

Для того щоб обґрунтувати правильність рівності (11), достатньо зауважити, що квадратичну форму, яка входить у експоненту в (4), можна записати у вигляді

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\xi,\tau)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)\Bigg|_{\xi_n = g(\xi',\tau)} = \sum_{i,j=1}^{n-1} \overline{a}^{ij}(\xi',\tau)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j) +$$
$$+ 2\sum_{i=1}^{n-1} \overline{a}^{in}(\xi',\tau)(x_i - \xi_i)[(x_n - g(x',t) + (\nabla' g(\xi',\tau), x' - \xi') + (g(x',t) - g(\xi',\tau) -$$
$$- (\nabla' g(\xi',\tau), x' - \xi'))] + \overline{a}^{nn}(\xi',\tau)[(x_n - g(x',t) + (\nabla' g(\xi',\tau), x' - \xi') + (g(x',t) -$$
$$- g(\xi',\tau) - (\nabla' g(\xi',\tau), x' - \xi'))]^2 = \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}^{ij}(\xi',\tau)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)\Bigg|_{x_n - \xi_n = x_n - g(x',t)} +$$
$$+ R(x,t;\xi',\tau).$$

До того ж легко перевірити, що матриці $\overline{A}^{-1}$ та $\tilde{A}_n$ пов'язані між собою співвідношенням

$$\tilde{A}_n = T' \overline{A}^{-1} T, \tag{14}$$

де $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$, $t_{ii} = 1$, $i = 1,\ldots,n$, $t_{ij} = 0$, $i \neq j$, $i \neq n$, $t_{nj} = D_j g$, $j = 1,\ldots,n-1$, T' – матриця, транспонована до матриці T. З (1), (14) та властивостей матриці $\overline{A}^{-1}$ випливає, що $\det \tilde{A}_n = \det \overline{A}^{-1}$, і для елементів матриці $\tilde{A}_n$ з очевидними змінами виконуються умови A1), A2).

Відзначимо також, що для другого доданка у правій частині (11) правильна нерівність (6), у якій замість $x_n - \xi_n$ треба прийняти, що $x_n - g(x',t)$. У цьому неважко переконатися, якщо до $\tilde{G}_{0,n}^{(\xi',\tau)}$ застосувати оцінку (5), беручи до уваги таку очевидну нерівність:

$$\left|\exp\left\{-\frac{R(x,t;\xi',\tau)}{4(t-\tau)}\right\} - 1\right| \leqslant \frac{|R(x,t;\xi',\tau)|}{4(t-\tau)},$$
$$(x,t) \in R_T^{n+1}, \quad (\xi',\tau) \in R_T^n, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T.$$

Визначимо тепер крайовий оператор $\mathcal{E}$, який потім використаємо як регуляризатор інтегрального рівняння Вольтерри першого роду, еквівалентного у деякому сенсі для сформульованої у п.3 крайової задачі.

Розглянемо в R^n_T параболічний оператор такого вигляду:

$$L_{n-1} \equiv \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}(x',t)D_{ij} - D_t, \quad (x',t) \in R^n_T,$$

коефіцієнти якого h_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n-1$, утворюють матрицю $(n-1)$-го порядку, обернену до матриці $\tilde{A}_{n-1} = (\tilde{a}^{ij})_{i,j=1}^{n-1}$, де $\tilde{a}^{ij}$, $i,j = 1,\ldots,n-1$, визначаються за формулами (13). З відзначених нами властивостей матриці $\tilde{A}_n$, яка входить у формулу (12), випливає, що оператор L_{n-1} – рівномірно параболічний і для нього існує ф.р.

$$H(x',t;\xi',\tau) = H_{0,n-1}^{(\xi',\tau)}(x'-\xi',t-\tau) + H_1(x',t;\xi',\tau), \quad (x',t) \in \overline{R}^n_T, \quad (\xi',\tau) \in \overline{R}^n_T.$$

У цьому зображенні, як і в (3) $H_{0,n-1}^{(\xi',\tau)}$ та H_1 означають відповідно головний та додатковий (інтегральний) члени для ф.р. H. До того ж для функцій H і H_1 при $x',\xi' \in R^{n-1}$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ правильними є оцінки (5), (6), в яких замість n і $|x-\xi|^2$ треба прийняти, що відповідно $n-1$ і $|x'-\xi'|^2$. Серед інших властивостей ф.р. H ми використаємо таку формулу типу згортки ([7; 10, с.71]): для всіх $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $x',\xi' \in R^{n-1}$

$$\int\limits_{R^{n-1}} H(x',t;v',s)H(v',s;\xi',\tau)\,dv' = H(x',t;\xi',\tau). \tag{15}$$

Звернемо ще увагу на зв'язок між функцією

$$\overline{G}(x',t;\xi',\tau) = G(x,t;\xi,\tau)\Big|_{\substack{x_n = g(x',t)\\ \xi_n = g(\xi',\tau)}}$$

та ф.р. $H(x',t;\xi',\tau)$. Використовуючи формулу (11) для G і означення ф.р. H, легко одержати співвідношення

$$\overline{G}(x',t;\xi',\tau) = (4\pi(t-\tau))^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\det \tilde{A}_n(\xi',\tau)}{\det \tilde{A}_{n-1}(\xi',\tau)}\right)^{\frac{1}{2}} \Bigg[H(x',t;\xi',\tau) +$$
$$+ H_{0,n-1}^{(\xi',\tau)}(x'-\xi',t-\tau)\left(\exp\left\{-\frac{\overline{R}(x',t;\xi',\tau)}{4(t-\tau)}\right\} - 1\right) - H_1(x',t;\xi',\tau)\Bigg] +$$
$$+ \overline{G}_1(x',t;\xi',\tau), \quad (x',t) \in \overline{R}^n_T, \quad (\xi',\tau) \in \overline{R}^n_T, \tag{16}$$

і для першого та наступних трьох доданків у (16) правильними є оцінки відповідно (5) та (6).

Нехай функція $\overline{u}_1(x',t)$ визначена за формулою (10), і ψ – функція задана в $\overline{R}^n_T$. Введемо до розгляду інтегро-диференціальний оператор $\mathcal{E}$, який діє за правилом

$$\mathcal{E}(x',t)\,\psi = 2(\pi)^{-\frac{1}{2}} \left\{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau \int\limits_{R^{n-1}} H(x',\hat{t};\xi',\tau)\psi(\xi',\tau)\,d\xi'\right\}\Bigg|_{\hat{t}=t},$$
$$(x',t) \in R^n_T. \tag{17}$$

З результатів одержаних у працях [2; 11, с.13] випливає, що $\mathcal{E}$ – лінійний обмежений оператор, який діє з $\underset{0}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{R}^n_T)$ в $\underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}^n_T)$, для якого існує обернений оператор $\mathcal{E}^{-1}$. Крім того, $\mathcal{E}$ – регуляризатор у випадку першої крайової задачі [2; 11, с.17], а саме на підставі співвідношень (15), (16) та нерівностей (5), (6) маємо

$$\mathcal{E}(x',t)\overline{u}_1 = \tilde{V}(x',t) + \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} R(x',t;\xi',\tau)\tilde{V}(\xi',\tau)\,d\xi', \quad \forall\,\tilde{V} \in \underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}^{\,n}_T), \tag{18}$$

де

$\tilde{V}(x',t) = \left(\dfrac{\det \tilde{A}_n(x',t)}{\det \tilde{A}_{n-1}(x',t)}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{V}(x',t)$, а для ядра R правильна оцінка (9), у правій частині якої вираз $|x-\xi|^2$ треба замінити на вираз $|x'-\xi'|^2$.

За допомогою ф.р. G з (3) можна визначити ще два параболічні потенціали, які застосовують, розв'язуючи задачі Коші для загального параболічного рівняння другого порядку. Це – потенціал Пуассона

$$u_2(x,t) = \int_{R^n} G(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi, \qquad (x,t) \in R^{n+1}_T, \tag{19}$$

і об'ємний потенціал

$$u_3(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{R^n} G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi, \qquad (x,t) \in R^{n+1}_T, \tag{20}$$

де $\varphi(\xi)$, $\xi \in R^n$ і $f(\xi,\tau)$, $(\xi,\tau) \in R^{n+1}_T$ – задані функції. Припускаємо, що φ – обмежена і неперервна в R^n, а $f \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}^{\,n+1}_T)$. Тоді можна стверджувати (див. [9, р. IV, § 14; 7]), що функції u_i, $i = 2,3$, неперервні в $\overline{R}^{\,n+1}_T$, задовольняють рівняння $Lu_2 = 0$, $Lu_3 = -f$ в $\overline{R}^{\,n+1}_T$ і початкові умови $u_2(x,0) = \varphi(x)$, $u_3(x,0) = 0$, $x \in R^n$. Крім того, $u_3 \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{R}^{\,n+1}_T)$, а у випадку, коли $\varphi \in H^{2+\lambda}(R^n)$, то і $u_2 \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{R}^{\,n+1}_T)$.

3. **Постановка крайової задачі та її розв'язування.** Розглянемо оператор L, визначений у (2), і граничний оператор типу Вентцеля [1]

$$L_0u \equiv \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij}(x,t)\,\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^n \beta_i(x,t)D_iu + \beta_0(x,t)u - D_tu, \quad (x,t) \in \Sigma\backslash S_0. \tag{21}$$

Припускаємо, що коефіцієнти оператора L_0 визначені на Σ і виконані умови:

B1) $\sum\limits_{i,j=1}^n \beta_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \mu_0|\xi|^2$, $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, $\mu_0 > 0$, $\forall(x,t) \in \Sigma$, $\forall\xi \in R^n$, $\xi \perp N(x,t)$;

B2) β_{ij}, β_i, $\beta_0 \in H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$, $i,j = 1,\dots,n$; $\sum\limits_{i=1}^n \beta_i(x,t)N_i(x,t) \geqslant 0$, $\forall(x,t) \in \Sigma$.

Постановка крайової задачі: шукаємо розв'язок (у класичному сенсі) параболічного рівняння

$$Lu(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{22}$$

що задовольняє початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad (x,0) \in D_0, \tag{23}$$

крайову умову

$$L_0 u(x,t) = \Theta(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma \backslash S_0, \tag{24}$$

при виконанні умови узгодження

$$\sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij}(x,0)\, \partial_{ij}\varphi + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x,0) D_i\varphi + \beta_0(x,0)\varphi - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,0)\, D_{ij}\varphi -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} a_i(x,0) D_i\varphi - a_0(x,0)\varphi + f(x,0) = \Theta(x,0), \quad (x,0) \in S_0. \tag{25}$$

Основним результатом статті є така теорема.

Теорема. *Нехай коефіцієнти операторів L і L_0 з (2) і (25) задовольняють відповідно умови A1), A2) і B1), B2), елементарна поверхня Σ належить до класу $H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}$, а для функцій f, φ і Θ з (22)-(24) виконуються умови $f \in H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}_T^{n+1})$, $\varphi \in H^{2+\lambda}(R^n)$, $\Theta \in H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$. Тоді задача (22)-(24) має єдиний розв'язок*

$$u \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega}), \tag{26}$$

для якого виконується умова (25), і є правильною оцінка

$$\|u\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega})} \leqslant C\,[\, \|f\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}_T^{n+1})} + \|\varphi\|_{H^{2+\lambda}(R^n)} + \|\Theta\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)}\,]. \tag{27}$$

Доведення. Шукатимемо розв'язок задачі (22)–(24) у вигляді

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega, \tag{28}$$

де функції u_1, u_2, u_3 визначаються за формулами відповідно (7), (19) і (20), причому щільність V, яка входить до потенціалу простого шару в (7) – невідома. З властивостей параболічних потенціалів, описаних нами в п.2 випливає, що для будь-якої обмеженої і неперервної функції V, що визначена на Σ, функція u з (28) задовольняє рівняння (22), початкову умову (23) і для u_i, $i = 2,3$, виконується (26). Отже, для розв'язання задачі нам треба підібрати V у такий спосіб, щоб для u виконувалася крайова умова (24), а при виконанні (25) були правильними умова (26) та нерівність (27).

Припустимо a priori, що шукана щільність V з (7) належить до класу $\underset{0}{H}{}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$, і займемося вивченням крайової умови (25). З цією метою введемо таке перетворення змінних:

$$(x,t) \to (\tilde{x},\tilde{t}), \qquad \tilde{x}_i = x_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \qquad \tilde{x}_n = x_n - g(x',t), \qquad \tilde{t} = t.$$

Це перетворення переводить область Ω в область $\Omega_1 = \{(\tilde{x},\tilde{t}) \in R_T^{n+1} \,|\, \tilde{x}_n > 0\}$, а межу Σ в межу $\Sigma_1 = \{(\tilde{x},\tilde{t}) \in R_T^{n+1} \,|\, \tilde{x}_n = 0\}$.

Виразимо тепер крайову умову (25) за допомогою нових змінних. Після нескладних перетворень одержимо рівність

$$\tilde{L}_0\overline{u} \equiv \sum_{k,l=1}^{n-1} \tilde{\beta}_{kl}(\tilde{x}\,',\tilde{t})\, D_{kl}\overline{u} + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\beta}_k(\tilde{x}\,',\tilde{t}) D_k\overline{u} + \tilde{\beta}_0(\tilde{x}\,',\tilde{t})\overline{u} - D_t\overline{u} =$$

$$= \overline{\Theta}(\tilde{x}\,',\tilde{t}) - \tilde{\beta}_n(\tilde{x}\,',\tilde{t})\, \frac{\partial \overline{u}(\tilde{x}\,',\tilde{t})}{\partial \tilde{\nu}(\tilde{x}\,',\tilde{t})}, \quad (\tilde{x}\,',\tilde{t}) \in R_T^n. \tag{29}$$

Тут через $\tilde{\nu}(\tilde{x}',\tilde{t}) = (\tilde{a}_{in}(\tilde{x}',\tilde{t}))_{i=1}^{n}$ позначено вектор конормалі до поверхні Σ_1 в точці $(\tilde{x}',\tilde{t})$, який віднесений до матриці $\tilde{A}_n^{-1}(\tilde{x}',\tilde{t})$, а коефіцієнти $\tilde{\beta}_{kl}$, $k,l = 1,\dots,n-1$, та $\tilde{\beta}_k$, $k = 1,\dots,n$, визначаються за формулами

$$\tilde{\beta}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\beta}_{ij}\overline{C}_{ik}\overline{C}_{jl}, \qquad k,l = 1,\dots,n-1;$$

$$\tilde{\beta}_k = \overline{\beta}_k - \tilde{\beta}_n\tilde{a}_{kn}, \qquad k = 1,\dots,n-1;$$

$$\tilde{\beta}_n = \tilde{a}_{nn}^{-1}\left[\overline{\beta}_n - \sum_{k=1}^{n-1}\overline{\beta}_k D_k g - \sum_{k,l=1}^{n-1}\tilde{\beta}_{kl}D_{kl}g + D_t g\right]. \tag{30}$$

Щодо функції $\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\tilde{\nu}}$ з (29), то для неї на підставі формул (8) і (10) можна записати співвідношення

$$\frac{\partial\overline{u}\,(\tilde{x}',\tilde{t})}{\partial\tilde{\nu}(\tilde{x}',\tilde{t})} = \frac{\partial\overline{u}_2(\tilde{x}',\tilde{t})}{\partial\tilde{\nu}(\tilde{x}',\tilde{t})} + \frac{\partial\overline{u}_3(\tilde{x}',\tilde{t})}{\partial\tilde{\nu}(\tilde{x}',\tilde{t})} - \frac{1}{2}\hat{V}(\tilde{x}',\tilde{t}) +$$
$$+\int_0^{\tilde{t}} d\tau \int_{R^{n-1}} \frac{\partial\overline{G}(\tilde{x}',\tilde{t};\tilde{\xi}',\tau)}{\partial\tilde{\nu}(\tilde{x}',\tilde{t})}\hat{V}(\tilde{\xi}',\tau)d\tilde{\xi}', \quad (\tilde{x}',\tilde{t}) \in R_T^n, \tag{31}$$

причому для ядра в останньому інтегралі правильна оцінка (9).

Далі розглядатимемо крайову умову (29) як автономне параболічне рівняння в R_T^n стосовно функції $\overline{u}\,(\tilde{x}',\tilde{t})$. У цьому рівнянні, як випливає з умов теореми, додаткового припущення щодо V, формул (30), (31) та властивостей потенціалів (див. п.2), його коефіцієнти та права частина (позначимо її через $\tilde{\Theta}$) належать до класу $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}_T^n)$. Звідси робимо висновок, що існує єдиний класичний розв'язок рівняння (29), який задовольняє початкову умову

$$\overline{u}\,(\tilde{x}',0) = \overline{\varphi}\,(\tilde{x}') \quad \text{в} \quad R^{n-1}.$$

Крім того,

$$\overline{u} \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{R}_T^n), \tag{32}$$

для норми $\|\,\overline{u}\,\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{R}_T^n)}$ правильна нерівність

$$\|\,\overline{u}\,\|_{H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{R}_T^n)} \leqslant C\left[\|\,\tilde{\Theta}\,\|_{H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}_T^n)} + \|\,\overline{\varphi}\,\|_{H^{2+\lambda}(R^{n-1})}\right], \tag{33}$$

і цей розв'язок записується у вигляді

$$\overline{u}(\tilde{x}',\tilde{t}) = \int_{R^{n-1}} \Gamma(\tilde{x}',\tilde{t};\tilde{\xi}',0)\,\overline{\varphi}(\tilde{\xi}')\,d\tilde{\xi}' - \int_0^{\tilde{t}} d\tau \int_{R^{n-1}} \Gamma(\tilde{x}',\tilde{t};\tilde{\xi}',\tau)\,\tilde{\Theta}(\tilde{\xi}',\tau)\,d\tilde{\xi}',$$
$$(\tilde{x}',\tilde{t}) \in R_T^n, \tag{34}$$

де Γ – ф.р. рівномірно параболічного оператора $\tilde{L}_0$.

Отже, маємо два різних вирази для функції $\overline{u}$: співвідношення (28), де треба прийняти, що $(x,t) \in \Sigma$, та співвідношення (34), у якому треба замінити $(\tilde{x}',\tilde{t})$

на (x',t) і $\tilde{\xi}'$ на ξ'. Прирівнюючи між собою їхні праві частини, враховуючи при цьому (10) і (31), одержимо таке інтегральне рівняння стосовно $\hat{V}$:

$$\int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \overline{G}(x',t;\xi',\tau)\hat{V}(\xi',\tau)\,d\xi' + \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} K(x',t;\xi',\tau)\hat{V}(\xi',\tau)\,d\xi' = \psi(x',t),$$

$$(x',t) \in R_T^n, \quad (35)$$

де

$$\psi(x',t) = \int_{R^{n-1}} \Gamma(x',t;\xi',0)\,\overline{\varphi}(\xi')\,d\xi' - \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \Gamma(x',t;\xi',\tau)\,\overline{\Theta}(\xi',\tau)\,d\xi' - \overline{u}_2(x',t) -$$

$$- \overline{u}_3(x',t) + \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \Gamma(x',t;\xi',\tau)\,\tilde{\beta}_n(\xi',\tau)\left[\frac{\partial \overline{u}_2(\xi',\tau)}{\partial \tilde{\nu}(\xi,',\tau)} + \frac{\partial \overline{u}_3(\xi',\tau)}{\partial \tilde{\nu}(\xi,',\tau)}\right] d\xi',$$

$$(x',t) \in R_T^n, \quad (36)$$

а для ядра K, явний вираз для якого легко виписати, при $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $x',\xi' \in R^{n-1}$, правильна оцінка (5), де треба прийняти, що $r = s = 0$, і n та $|x-\xi|^2$ замінити відповідно на $n-1$ та $|x'-\xi'|^2$. На підставі (36) та властивостей параболічних потенціалів (див. п.2) робимо висновок, що $\psi \in H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{R}_T^n)$, і також $\psi \in \underset{0}{H}^{1+\lambda,(1+\lambda)/2}(\overline{R}_T^n)$.

Рівняння (35) є інтегральним рівнянням Вольтерри першого роду. Порівнюючи оцінки для ядер цього рівняння, бачимо, що функція K має більш "слабку" особливість, ніж функція $\overline{G}$ при $t \to \tau + 0$. Враховуючи цей факт, а також формулу (18), переконуємося в тому, що після застосування оператора $\mathcal{E}$ з (17) до обох частин рівняння (35), останнє можна замінити еквівалентним інтегральним рівнянням Вольтерри другого роду вигляду

$$\tilde{V}(x',t) + \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \tilde{K}(x',t,\xi',\tau)\,\tilde{V}(\xi',\tau)\,d\xi' = \tilde{\psi}(x',t), \qquad (x',t) \in R_T^n, \qquad (37)$$

де функція $\tilde{V}$ така, як у (18), $\tilde{\psi}(x',t) = \mathcal{E}(x',t)\psi$, причому $\tilde{\psi} \in \underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\overline{R}_T^n)$, а для ядра $\tilde{K}$ правильна оцінка (9).

Розв'язуючи рівняння (37) методом послідовних наближень, знаходимо $\tilde{V}$, а отже, і V. Крім того, перевіряємо, що $V \in \underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)$, і що для норми $\|V\|_{\underset{0}{H}^{\lambda,\lambda/2}(\Sigma)}$ правильна нерівність (27). Це підтверджує наше припущення a priori щодо функції V.

Залишилося перевірити умову (26) та обґрунтувати твердження теореми про єдиність розв'язку. Для цього зауважимо, що побудований за формулою (28) розв'язок задачі (22)–(24), можна розглядати як розв'язок наступної першої параболічної крайової задачі:

$$L\,u(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad (x,0) \in D_0,$$

$$u(x,t) = v(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma \backslash S_0,$$

при виконанні умов узгодження

$$\varphi(x) = v(x,0), \quad D_t u(x,t)|_{t=0} = D_t v(x,t)|_{t=0}, \qquad x \in S_0,$$

де функція $v(x,t)$, $(x,t) \in \Sigma$, є визначеною за допомогою співвідношення (34). Тоді (див., наприклад, [9, р.IY, §5]) умови теореми разом з умовами (25) і (32) гарантують нам існування єдиного розв'язку цієї задачі, що належить до класу $H^{2+\lambda,(2+\lambda)/2}(\overline{\Omega})$, і для якого є правильною нерівність (27). Теорему доведено.

1. *Апушкинская Е.А., Назаров А.И.* Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболичных уравнений// РАН, Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6. – Вып. 6. – С. 1-29.
2. *Бадерко Е.А.* О решении первой краевой задачи для параболического уравнения с помощью потенциала простого слоя// Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 283. – N 1. – С. 11-13.
3. *Базалий Б.В., Казмин С.Н.* Об одной краевой задаче со старшей производной в граничном условии для параболического уравнения второго порядка // РАН, Санкт-Петербург. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Записки научных семинаров ПОМИ. – 1997. – Т. 249. – С. 40-54.
4. *Вентцель А.Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов// Теория вероятности и ее применения. – 1959. – Т. 4. – N 2. – С. 172-185.
5. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – М., 1963.
6. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – К., 1990.
7. *Камынин Л.И.* Приложения параболических потенциалов Паньи к краевым задачам математической физики. I// Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т.26. – N 5. – С. 829-841.
8. *Копитко Б.І.* Напівгрупи операторів, що описують дифузійний процес в області із загальними граничними умовами// Доп. НАН України. Математика. – 1995. – N 9. – С. 15-18.
9. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.
10. *Портенко Н.И.* Обобщенные диффузионные процессы. – К., 1982.
11. *Черепова М.Ф.* Решение методом потенциала первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области// М., 1985. – Деп. в ВИНИТИ 11.01.85. – N 361 - 85 Деп.

B. Kopytko, Zh. Tsapovska

THE POTENTIAL METHOD IN A PARABOLIC BOUNDARY PROBLEM WITH BOUNDARY WENTSEL CONDITION

A boundary problem for a linear parabolic equation of the second order is solved by of the method of the potential theory. A boundary Wentsel condition is given on a smooth elementary lateral boundary.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.116–119 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.116–119*

УДК 517.98

Віра Лозинська

ПРО ЗГОРТКОВУ АЛГЕБРУ, ДУАЛЬНУ ДО ПРОСТОРУ ФУНКЦІЙ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

Досліджується спряжений простір до простору функцій експоненціального типу, звуження яких на дійсний підпростір належить L_2. Доведено, що цей простір є згортковою алгеброю і має зображення у вигляді комутанта групи зсувів.

У комплексному гільбертовому просторі $L_2 \equiv L_2(\mathbb{R}^n)$ розглянемо оператори $D^k = D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n}$, де $D_j \equiv -i\partial/\partial t_j$ $(\forall j = 1, \dots, n)$ та $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Область визначення оператора $D_j^{k_j}$ має вигляд $\operatorname{dom}(D_j^{k_j}) \equiv \{\varphi \in \operatorname{dom}(D_j^{k_j-1}) : D_j\varphi \in \operatorname{dom}(D_j^{k_j-1})\}$ при $k_j \geqslant 1$ і $\operatorname{dom}(D_j^0) = L_2$ при $k_j = 0$. Отже, $\operatorname{dom}(D^k) = \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{dom}(D_j^{k_j})$ – область визначення D^k. Будь-якому вектору $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ такому, що $\nu_j > 0$ $(\forall j = 1, \dots, n)$ будемо зіставляти підпростір функцій $E_{2,\nu} \equiv \left\{\varphi \in \bigcap_{|k|=1}^{\infty} \operatorname{dom}(D^k) : \|\varphi\|_{2,\nu} \equiv \sup_{k \in Z_+^n} \nu^{-k} \|D^k\varphi\|_{L_2} < \infty\right\}$ з нормою $\|\cdot\|_{2,\nu}$, де $\nu^{-k} \equiv \nu^{-k_1} \dots \nu^{-k_n}$.

З іншого боку, розглянемо простір $\mathfrak{M}_{2,\nu}$ цілих функцій $\varphi : \mathbb{C}^n \ni t + i\tau \to \varphi(t + i\tau)$ з нормою

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}_{2,\nu}} \equiv \sup_{\tau \in \mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left|\exp\Big(\sum_{j=1}^{n} -\nu_j|\tau_j|\Big)\varphi(t + i\tau)\right|^2 dt\right]^{1/2}.$$

Простір $\mathfrak{M}_{2,\nu}$ складається з функцій експоненціального типу [3, п.3.1].

Лема 1. (*a*) *Правильні ізометричний ізоморфізм $E_{2,\nu} \simeq \mathfrak{M}_{2,\nu}$ та ізометричне вкладення $E_{2,\nu} \subset L_2$.*

(*b*) *Для будь-яких функційφ $\varphi \in E_{2,\nu}$ та вектора $t \in \mathbb{R}^n$, функція $\psi : \mathbb{R}^n \ni s \to T_s\varphi(t)$, де $T_s\varphi(t) = \varphi(t - s)$, також належить $E_{2,\nu}$.*

Доведення. (*a*) Звуження функції $\varphi \in \mathfrak{M}_{2,\nu}$ на $\mathbb{R}^n$ задовольняє нерівності Бернштейна [3, п.3.2.2]

$$\|D^k\varphi\|_{L_2} \leqslant \nu^k \|\varphi\|_{L_2} \qquad (\forall\varphi \in \mathfrak{M}_{2,\nu}), \tag{1}$$

де $\nu^k \equiv \nu_1^{k_1} \dots \nu_n^{k_n}$. Із (1) одержуємо $\|\varphi\|_{2,\nu} \leqslant \|\varphi\|_{L_2}$. З означення норми простору $\mathfrak{M}_{2,\nu}$ випливає $\|\varphi\|_{L_2} \leqslant \|\varphi\|_{\mathfrak{M}_{2,\nu}}$ $(\forall\varphi \in \mathfrak{M}_{2,\nu})$, тобто $\mathfrak{M}_{2,\nu}{}_{|\mathbb{R}^n} \subset E_{2,\nu}$.

Навпаки, якщо $\varphi \in E_{2,\nu}$, то ряд вигляду $\varphi(t+i\tau) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{\tau^k D^k \varphi}{k!}$ на підставі нерівності

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(t+i\tau)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{|\tau^k| \, \|D^k\varphi\|_{L_2}}{k!} \leqslant \|\varphi\|_{L_2} \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} \nu_j |\tau_j|\Big),$$

або $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}_{2,\nu}} \leqslant \|\varphi\|_{L_2}$, є збіжним для всіх $t+i\tau \in \mathbb{C}$. Зокрема, $\varphi(t+i\tau)$ є цілою функцією класу $\mathfrak{M}_{2,\nu}$. Тому $E_{2,\nu} \subset \mathfrak{M}_{2,\nu}{}_{|\mathbb{R}^n}$ і маємо рівність $E_{2,\nu} = \mathfrak{M}_{2,\nu}{}_{|\mathbb{R}^n}$.

Оскільки, $\|\varphi\|_{L_2} \leqslant \|\varphi\|_{2,\nu}$, то $\|\varphi\|_{L_2} \leqslant \|\varphi\|_{2,\nu} \leqslant \|\varphi\|_{L_2} \leqslant \|\varphi\|_{\mathfrak{M}_{2,\nu}} \leqslant \|\varphi\|_{L_2}$ $(\forall \varphi \in E_{2,\nu})$, то потрібний ізометричний ізоморфізм реалізується звуженням $E_{2,\nu} = \mathfrak{M}_{2,\nu}{}_{|\mathbb{R}^n}$. Зокрема, $E_{2,\nu} \subset L_2$.

(b) Приймемо, що $\breve{\varphi}(t) \equiv \varphi(-t)$. Для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n$ та $s \in \mathbb{R}^n$ правильні рівності $\|D^k\varphi\|_{L_2} = \|D^k\breve{\varphi}\|_{L_2}$, $\|T_s D^k \varphi\|_{L_2} = \|D^k\varphi\|_{L_2}$. З тотожності $D^k\psi(s) = T_t D^k \breve{\varphi}(s)$, одержуємо $\|D^k\psi(s)\|_{L_2} = \|D^k\breve{\varphi}(s)\|_{L_2} = \|D^k\varphi(s)\|_{L_2}$. Тому нерівність (1) переписуємо у вигляді $\|D^k\psi\|_{L_2} \leqslant \nu^k \|\varphi\|_{L_2}$. Звідки маємо нерівність $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(t+i\tau)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \|\varphi\|_{L_2} \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} \nu_j|\tau_j|\Big)$, тому $\psi \in \mathfrak{M}_{2,\nu}$. Лема доведена.

Із леми 1 та нерівності (1) випливає наслідок.

Наслідок 1. *Простір $E_{2,\nu}$ інваріантний щодо операторів D_j і кожен із операторів D_j над $E_{2,\nu}$ є обмеженим з нормою $\leqslant \nu_j$.*

Утворимо об'єднання $E_2 = \bigcup_\nu E_{2,\nu}$. На множині індексів $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ співвідношення $\nu_1 \geqslant \mu_1, \ldots, \nu_n \geqslant \mu_n$ визначають напівпорядок $\nu \succeq \mu$. Виберемо деяку злічену підпослідовність вигляду $\{\nu(m) = (\nu_1(m), \ldots, \nu_n(m))\}_{m\in\mathbb{N}}$, де $\nu(m+1) \succeq \nu(m)$ та $\lim_{m\to\infty} \nu_j(m) = \infty$ $(\forall j = 1, \ldots, n)$. Тоді $E_2 = \bigcup_m E_{2,\nu(m)}$ і вкладення $E_{2,\nu(m)} \subset E_{2,\nu(m+1)}$ неперервні. Отже, на об'єднанні E_2 можна задати топологію індуктивної границі $E_2 = \liminf_{m\to+\infty} E_{2,\nu(m)}$. Такий локально опуклий простір E_2 далі виконує роль простору основних функцій.

Сильно спряжений простір антилінійних неперервних функціоналів до простору E_2 позначимо через E_2'. Відомо [2], що дуальна пара $\langle E_2', E_2\rangle$ визначається ермітовою формою $\langle f, \varphi\rangle \equiv \lim_{m\to\infty} \langle f_{\nu(m)}, \varphi_{\nu(m)}\rangle$, де $\varphi_{\nu(m)} \in E_{2,\nu(m)}$, $f_{\nu(m)} \in E'_{2,\nu(m)}$ та $E'_{2,\nu(m)}$ – спряжений до гільбертового простору $E_{2,\nu(m)}$. Із міркувань двоїстості [2] випливає топологічний ізоморфізм проективній границі $E_2' = \lim_{m\to+\infty}\mathrm{pr}\, E'_{2,\nu(m)}$ стосовно неперервних проекцій $E'_{2,\nu(m+1)} \ni f_{\nu(m+1)} \to f_{\nu(m)} \in E'_{2,\nu(m)}$, де $f_{\nu(m)} \equiv f_{|E_{2,\nu(m)}}$ – звуження функціонала $f \in E_2'$. Довільний функціонал $f \in E_2'$ має вигляд послідовності $f = \{f_{\nu(m)}\}$. Користуючись побудованою двоїстістю, можна визначити диференціювання функціоналів так.

Лема 2. *Для будь-якого функціонала $f \in E_2'$ правильне співвідношення $\langle \mathfrak{D}_j f, \varphi\rangle = \langle f, D_j\varphi\rangle$, де $\mathfrak{D}_j$ – спряжений оператор до D_j стосовно пари $\langle E_2', E_2\rangle$ та $\varphi \in E_2$.*

Розглянемо над простором E_2 групу зсувів $T_s : \varphi(t) \to \varphi(t-s)$ від векторної змінної $s \in \mathbb{R}^n$. Для будь-якого функціонала $f \in E_2'$ та функції $\varphi(t) \in E_2$ згортку визначаємо співвідношенням

$$(f * \varphi)(t) = \langle f(s)\,,\,T_s\,\varphi(t)\rangle,$$

де $f(s)$ позначає дію функціонала f на функцію $T_s\,\varphi(t)$ за змінною s. Із леми(a) випливає коректність такого визначення згортки. Правильне таке узагальнення теореми Шварца [4, п.6.3].

Теорема 1. *Для кожного функціонала $f \in E_2'$ оператор згортки*

$$F:\,E_2 \ni \varphi \longrightarrow f * \varphi \tag{2}$$

належить простору неперервних лінійних відображень $\mathfrak{L}(E_2)$ та задовольняє співвідношенню

$$FT_s\varphi = T_sF\varphi \qquad\qquad (\forall\,\varphi \in E_2,\;\, s \in \mathbb{R}^n). \tag{3}$$

Навпаки, якщо оператор $F \in \mathfrak{L}(E_2)$ задовольняє умову (2), то існує єдиний функціонал $f \in E_2'$ такий, що оператор F має вигляд (1).

Доведення. Нехай $f \in E_2'$ і $\varphi \in E_{2,\nu}$. Із означення згортки та леми 1 одержуємо $\|f * \varphi\|_{2,\nu} \leqslant \|f\|_{2,\nu}\,\|\varphi\|_{L_2}$, де $\|f\|_{2,\nu}$ – норма звуження функціонала f на $E_{2,\nu}$. Тому з рівності $D^k(f * \varphi)(t) = \langle f(s)\,,\,T_s\,D^k\varphi(t)\rangle = (f * D^k\varphi)(t)$ випливає

$$\|f * \varphi\|_{2,\nu} = \sup_k \nu^{-k}\|f * D^k\varphi\|_{L_2} \leqslant \|f\|_{2,\nu}\|\varphi\|_{2,\nu}\,.$$

Вкладення $E_{2,\nu} \subset E_2$ неперервні, тому $F \in \mathfrak{L}(E_{2,\nu})$ і, отже, $F \in \mathfrak{L}(E_2)$. Співвідношення (3) випливає з рівностей $(f * T_s\varphi)(t) = (f * \varphi)(t-s) = T_s(f * \varphi)(t)$.

Навпаки, відображення $E_2 \ni \varphi \to \check{\varphi} \in E_2$ є ізоморфізмом. Тому відображення $f\,:\,\check{\varphi} \to (F\varphi)(0)$ визначає функціонал $f \in E_2'$. Звідки $(F\varphi)(0) = \langle f\,,\,\check{\varphi}\rangle = (f * \varphi)(0)$. Замінюючи φ на $T_t\varphi$ і користуючись (3), одержуємо (2).

Наслідок 2. (a) *Для будь-яких $f, g \in E_2'$ згортка $g * f$ визначається співвідношенням*

$$(g * f) * \varphi = g * (f * \varphi)\,, \qquad (\forall\,\varphi \in E_2),$$

зокрема E_2' згорткова алгебра.

(b) *Для будь-яких $f, g \in E_2'$ правильні співвідношення $\mathfrak{D}^k(g * f) = g * \mathfrak{D}^k f$.*

Визначимо над простором E_2 перетворення Фур'є $\mathfrak{F}:\,\varphi \to \widehat{\varphi}$ та обернене до нього $\mathfrak{F}^{-1}$. Фур'є-образ $\widehat{E}_2 \equiv \mathfrak{F}(E_2)$, як відомо [3], складається з фінітних функцій на $\mathbb{R}^n$. Топологізуємо простір $\widehat{E}_2$ індуктивною топологією стосовно відображення $\mathfrak{F}$. Спряжене відображення до $\mathfrak{F}^{-1}$ щодо дуальних пар $\langle E_2'\,,\,E_2\rangle$ та $\langle \widehat{E}_2'\,,\,\widehat{E}_2\rangle$, де $\widehat{E}_2'$ – спряжений гільбертів простір до $\widehat{E}_2$, діє так: $\mathfrak{F}^{\#} \equiv (\mathfrak{F}^{-1})'\,:\,E_2' \ni f \longrightarrow \widehat{f} \in \widehat{E}_2'$ і є неперервним.

Лема 3. *Правильні неперервні щільні вкладення гільбертових просторів*

$$E_2 \subset L_2 \subset E_2', \qquad \widehat{E}_2 \subset L_2 \subset \widehat{E}_2'.$$

Доведення леми 3 випливає з [2, теорема 4(b)] та ізометрії $\mathfrak{F}:\,L_2 \to L_2$. Як видно з леми, відображення $\mathfrak{F}^{\#}$ є розширенням перетворення Фур'є $\mathfrak{F}:\,L_2 \to L_2$ на простір E_2'.

Теорема 2. *Для будь-яких $f, g \in E_2'$ та $\varphi \in E_2$ правильні рівності*

$$\widehat{f * \check{\varphi}} = (2\pi)^{n/2}\,\widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}, \qquad \widehat{g * f} = (2\pi)^{n/2}\,\widehat{g} \cdot \widehat{f}.$$

Доведення. Дуальні пари $\langle E_2', E_2\rangle$ і $\langle \widehat{E}_2', \widehat{E}_2\rangle$ зв'язані співвідношенням $\langle \widehat{f}, \widehat{\varphi}\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для всіх $f \in E_2'$, $\varphi \in E_2$. З них випливає рівність $\langle \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}, \widehat{\chi}\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\chi}\rangle$, де $\chi \in S(\mathbb{R}^n)$. Справді, для будь-яких $\varphi \in E_2, \chi \in S(\mathbb{R}^n)$, маємо $\widehat{\varphi * \chi} = (2\pi)^{n/2}\,\widehat{\varphi} \cdot \widehat{\chi}$. Тому $\widehat{\varphi} \cdot \widehat{\chi} \in \widehat{E}_2$. Звідси, користуючись означенням згортки, одержуємо

$$\begin{aligned}\langle \widehat{f * \check{\varphi}}, \widehat{\chi}\rangle &= \langle f * \check{\varphi}, \chi\rangle = \big[(f * \check{\varphi}) * \check{\chi}\big](0)\\ &= \big[f * (\check{\varphi} * \check{\chi})\big](0) = \langle f, \varphi * \chi\rangle\\ &= \langle \widehat{f}, \widehat{\varphi * \chi}\rangle = (2\pi)^{n/2}\langle \widehat{f}, \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\chi}\rangle = (2\pi)^{n/2}\langle \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}, \widehat{\chi}\rangle.\end{aligned}$$

Для довільних $g \in E_2'$ та $\varphi \in E_2$ приймемо $\langle g, \check{\varphi}\rangle = \langle \check{g}, \varphi\rangle$. Тоді

$$\begin{aligned}\langle \widehat{g * f}, \widehat{\varphi}\rangle &= \langle g * f, \varphi\rangle = \big[(g * f) * \check{\varphi}\big](0)\\ &= \big[g * (f * \check{\varphi})\big](0) = \langle g, f * \varphi\rangle\\ &= \langle \widehat{g}, \widehat{f * \varphi}\rangle = (2\pi)^{n/2}\langle \widehat{g}, \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}\rangle = (2\pi)^{n/2}\langle \widehat{g} \cdot \widehat{f}, \widehat{\varphi}\rangle.\end{aligned}$$

---

1. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М., 1967.
2. *Лозинська В.Я., Лопушанський О.В.* Аналітичні розподіли експоненціального типу // Мат. методи і фіз.-мат. поля. – 1999. – Т. 42. – N. 4. – С. 45-55.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М., 1977.
4. *Шеффер Х.* Топологические векторные пространства. – М., 1971.

V. Lozynska

ON THE CONVOLUTION ALGEBRA AJOINTED TO SPACE OF THE EXPONENTIAL TYPE FUNCTIONS

It is proved that an ajoint space to some exponential type functions space coincide with a convolution algebra and can be represented by group of translation.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99

УДК 517.956

Галина Лопушанська

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ В ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ У ПРОСТОРІ ФУНКЦІЙ ІЗ СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ

Нехай $f_\alpha(x) = f_{\alpha_1}(x_1) \times \cdots \times f_{\alpha_n}(x_n)$ – прямий добуток узагальнених функцій [1, 2]

$$f_{\alpha_j}(x_j) = \begin{cases} \dfrac{\theta(x_j)x_j^{\alpha_j - 1}}{\Gamma(\alpha_j)}, & \alpha_j > 0 \\ f'_{\alpha_j+1}(x_j), & \alpha_j \leqslant 0. \end{cases}$$

В області $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$, обмеженій замкненою поверхнею Ω_1 класу C^∞ з одиничним вектором зовнішньої нормалі $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, розглядаємо рівняння

$$Lu(x) \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^{2\alpha} u(x)}{\partial x_i^{2\alpha}} \equiv \sum_{i=1}^{3} (f_{(2-2\alpha)h_i} * (\eta u))_{x_i x_i} = 0 \qquad (1)$$

при $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1]$. Тут $\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_0 \\ 0, & x \notin \overline{\Omega}_0 \end{cases}$, $h_1 = (1,0,0), h_2 = (0,1,0), h_3 = (0,0,1)$. Нехай $\tilde{u} = \eta u$.

Введемо граничний оператор

$$B_\alpha(x)\varphi = \sum_{i=1}^{3} (f_{(2-2\alpha)h_i} * (\eta\varphi))_{x_i} \nu_i(x).$$

У [3] показано, що при регулярній u $\tilde{u}(x)$ є розв'язком у $D'(\mathbb{R}^3)$ рівняння $L\tilde{u} = -(B_\alpha u)\delta_S + B_\alpha^*(u\delta_S)$, де $(\varphi, B_\alpha^* F) = (B_\alpha * \varphi, F) =< \hat{B}_\alpha \varphi, F >, \varphi \in D(\mathbb{R}^3)$, $< \varphi, F >$– дія узагальненої функції $F \in D'(\Omega_1)$ на $\varphi \in D(\Omega_1) = C^\infty(\Omega_1)$.

Формулювання узагальненої задачі Діріхле. Нехай $F_1 \in D'(S)$. Знайти таку $u \in D'(\overline{\Omega})$, що $\tilde{u}$ задовольняє у $D'(\mathbb{R}^3)$ рівняння

$$L\tilde{u} = -F_2 + B_\alpha^* F_1 \qquad (2)$$

F_2 – невідома узагальнена функція.

L, B_α є псевдодиференціальними операторами з символами

$$a(x,\xi) = \sum_{j=1}^{3} (-i\xi_j)^{2\alpha},\ b(x,\xi) = \sum_{j=1}^{3} \nu_j(x)(i\xi_j)^{2\alpha-1}$$

відповідно. Граничні задачі для ПДО у різних функціональних просторах вивчались у працях Аграновича М.С., Вишика М.І ., Ескіна Г.І ., Волевича Л.Р., Хермандера Л. та інших. Вивчаючи властивості розв'язку задачі Коші для параболічного ПДО з негладким символом (у працях Ейдельмана С.Д., Дріня Я.М., Кочубея А.М., Федорюка М.В. та інших), використовували властивості фундаментального розв'язку.

У [3] побудована фундаментальна функція $\omega(x) = O(|x|^{2\alpha-3})$ оператора L та доведена розв'язність узагальнених задач Діріхле та Неймана при заданих функціях із простору $D'(S)$: єдиний розв'язок $u(x)$ узагальненої задачі Діріхле визначається формулою $u(x) =< \hat{B}_\alpha(y)\omega(x-y),\ F_1 > - < \omega(x-y),\ F_2 >, \quad x \in \Omega_0$, а узагальнена функція F_2 визначається перетворенням

$$< g,\ F_2 >=< V_1(y,\varphi_g),\ F_1 >, \quad g \in D(\Omega_1), \tag{3}$$

де φ_g – єдиний розв'язок рівняння

$$\frac{1}{2}\varphi(y) + \int\limits_{\Omega_1} \varphi(x) B_\alpha(x)\omega(x-y)dS = g(y), \tag{4}$$

$V_1(y,\varphi) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \hat{B}_\alpha(y) \int\limits_{\Omega_{1,-\varepsilon}} \varphi(x)B_\alpha(x)\omega(x-y)dS \in D(\Omega_1)$, $B_\alpha(x)\omega(x-y) = \sum\limits_{j=1}^{3}(f_{(1-2\alpha)h_j}(x) * \omega(x-y))\nu_j(x)$, $\hat{B}_\alpha(y)\omega(x-y) = \sum\limits_{j=1}^{3}(f_{(1-2\alpha)h_j}(y) * \omega(x-y))\nu_j(y)$, $\Omega_{1,-\varepsilon}$ – паралельна до Ω_1 поверхня, розміщена всередині Ω на відстані ε від Ω_1.

Розглядаємо задачу Діріхле у припущенні, що $F_1 \in Z'_k(\Omega_1, x_0)$, $x_0 \in \Omega_1$, $k \in \mathbb{R}^1$ (ці простори узагальнених функцій, до яких належать функції з сильними степеневими особливостями, введені в [4]).

Лема. *Нехай* $\mathcal{K}(x,y) \in Z_q(\overline{\Omega}_i, y)$. *При* $k > 3 - i$ *інтегральний оператор*

$$K\varphi = \int\limits_{\Omega_i} \varphi(x)\mathcal{K}(x,y)dx$$

діє з $Z_k(\overline{\Omega}_i, x_0)$ *у* $Z_{k+q+3-i}(\overline{\Omega}_j, x_0)$, $i,j = 0,1$.

Ця лема доводиться аналогічно як лема 1 в [4].

За лемою одержуємо, що $B_\alpha(x)\omega(x-y) \in Z_{-2}(\overline{\Omega}_0, y)$, $\int\limits_{\Omega_1} \varphi(x)B_\alpha(x)\omega(x-y)dS \in Z_k(\Omega_1, x_0)$, $V_1(y,\varphi) \in Z_{k+1-2\alpha}(\Omega_1, x_0)$ для довільної $\varphi \in Z_k(\overline{\Omega}_0, x_0)$ при $k > -3$. Тоді $\frac{1}{2}\varphi(y) + \int\limits_{\Omega_1} \varphi(x)B_\alpha(x)\omega(x-y)dS \in Z_k(\Omega_1, x_0)$. Резольвента ядра рівняння (4) має таку саму особливість, як саме ядро, тому розв'язок цього рівняння $\varphi_g \in Z_k(\Omega_1, x_0)$ для $g \in Z_k(\Omega_1, x_0)$. Отже, перетворенням (3) для довільної $F_1 \in Z'_p(\Omega_1, x_0)$ визначена узагальнена функція $F_2 \in Z'_{p+2\alpha-1}(\Omega_1, x_0)$. Знову за лемою $\int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)\hat{B}_\alpha(y)\omega(x-y)dx \in Z_{k+1}(S, x_0)$ для довільної $\varphi \in Z_k(\overline{\Omega}_0, x_0)$ при $k > -3$, тому формулою

$$(\varphi, u) =< \int\limits_{\Omega_0} \varphi(x)\hat{B}_\alpha(y)\omega(x-y)dx, F_1 > - < \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\omega(x-y)dx, F_2 >, \tag{5}$$

$\varphi \in Z_{p-1}(\overline{\Omega}_0, x_0)$, при $p > -2$ визначена узагальнена функція $u \in Z'_{p-1}(\overline{\Omega}, x_0)$. Можна безпосередньо перевірити, що вона задовольняє у $D'(\mathbb{R}^3)$ рівняння (2). Єдиність розв'язку випливає з теореми 1 [5].

Теорема. *Нехай* $x_0 \in \Omega_1$, $F_1 \in Z'_p(\Omega_1, x_0)$. *Існує єдиний розв'язок узагальненої задачі Діріхле* $u \in Z'_{p-1}(\overline{\Omega}_0, x_0)$. *Він визначається формулою (5),* $F_2 \in Z'_{p+2\alpha-1}(\Omega_1, x_0)$ *і визначається згідно з (3),(4).*

Подібний результат правильний для узагальненої задачі типу Неймана.

---

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М., 1981.
2. *Гельфанд И.И., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – М., 1958.
3. *Лопушанська Г.П.* Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних//Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51. – N 1. – С.48-59.
4. *Лопушанська Г.П.* Розв'язки узагальнених еліптичних граничних задач із сильними степеневими особливостями//Мат. студії. – 1998. – Т.9. – N 1. – С.29-41.
5. *Лопушанська Г.П.* Про один підхід до вивчення крайових задач у просторах розподілів і граничні інтегральні рівняння//Укр. мат. журн. – 1991. – Т.43. – N 5. – С.632-639.

H. Lopushanska

DIRICHLET PROBLEM FOR THE EQUATION IN FRACTIONAL DERIVATIVES IN THE SPACE OF FUNCTIONS WITH POWER SINGULARITIES

The solvabilitiy of Dirichlet problem for the equation $\sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial^{2\alpha} u(x)}{\partial x^{2\alpha}} = 0$, $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1]$, when the given function on the boundary has strong power singularity at some point is established.

Стаття надійшла до редколегії 25.01.2000

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.123–128

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.123–128

УДК 517.98

Андрій Лопушанський

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ОЦІНКИ АНАЛІТИЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗБУРЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ЗМІШАНИХ ЗАДАЧ

Для наближення розв'язків збурених еволюційних рівнянь здебільшого використовують так звані апроксиманти Іосіди [1], [8]. Однак у випадку параболічних задач, коли розв'язки породжуються аналітичними пігрупами, можна побудувати інші наближення, які суттєво спираються на аналітичну залежність розв'язків від збурюючого оператора. Такі наближення мають точніші оцінки збіжності. У цій праці наведено один з можливих варіантів аналітичного наближення розв'язків збуреної параболічної змішаної задачі за допомогою скінченних ітерацій резольвенти еліптичного оператора. Метод оцінок наближень ґрунтується на техніці побудови збурень областей визначення еліптичних операторів шляхом інтерполяції, викладеної, наприклад у [2], та теорії аналітичних функцій операторного аргумента (див. [3]). Інтерполяційна шкала просторів Бєсова, яку ми використали, дає змогу включити у клас збурюючих операторів всі дробові степені заданого еліптичного оператора, а також всі замкнені оператори з областю визначення цих дробових степенів.

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ класу C^∞ розглядаємо сильно еліптичний лінійний оператор $\ell_{2m}(x,D) \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$, де $D^\alpha \equiv \dfrac{1}{i^{|\alpha|}} \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $a_\alpha(x) \in L^\infty(\Omega)$. Без обмеження загальності вважаємо, що $\Re a(x,\xi) > 0$ для всіх $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ та $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \overline{\Omega}$. Припускаємо, що коефіцієнти $a_\alpha(x)$ при $|\alpha| = 2m$ неперервні в замиканні $\overline{\Omega}$. Тут $a(x,\xi) \equiv \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{\alpha_n}$, числа m та n натуральні.

Нехай на границі області $\partial\Omega$ задано оператори $b_j(x,D) \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant k_j} b_{j,\alpha}(x) D^\alpha$, $(j = \overline{1,m})$, де $b_{j,\alpha}(x) \in C^\infty(\partial\Omega)$. Припускаємо, що система $\{b_j(x,D)\}_{j=1}^m$ нормальна, тобто $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ і для кожного нормального вектора ν_x в точці $x \in \partial\Omega$ виконується умова $b_j(x,\nu_x) \equiv \sum_{|\alpha|=k_j} b_{j,\alpha}(x)\nu_x^\alpha \neq 0$ для всіх $j = \overline{1,m}$

Тоді оператор $(Au)(x) = \ell_{2m}(x,D)u(x)$, заданий у банаховому просторі $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ на щільному підпросторі $W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega) \equiv \Big\{u(x) \in W^{2m}_p(\Omega) : b_j(x,D)u_{\,|\,\partial\Omega} = 0;\ j = \overline{1,m}\Big\}$, замкнений. Тут $W^{2m}_p(\Omega)$ – простір Соболєва. Підпростір $W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)$ замкнений в $W^{2m}_p(\Omega)$.

Нехай далі $E : W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega) \to L_p(\Omega)$ – оператор вкладення, $\rho(A)$ – множина чисел $\lambda \in \mathbb{C}$ для яких резольвента $(\lambda E - A)^{-1} : L_p(\Omega) \to W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)$ є ізоморфізмом банахових просторів.

Зафіксуємо деяке число θ, $(0 < \theta < 1)$. У просторі $L_p(\Omega)$ розглянемо довільний лінійний замкнений оператор Θ, заданий на щільному підпросторі функцій $B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega) \equiv \left\{g(x) \in B^{2m\theta}_{p,q}(\Omega) : b_j(x,D)g_{\,|\,\partial\Omega} = 0;\ j = \overline{1,m}\right\}$ із нормою простору Бєсова $B^{2m\theta}_{p,q}(\Omega)$ порядку $2m\theta$, де $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Підпростір $B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega)$ замкнений в $B^{2m\theta}_{p,q}(\Omega)$.

Лема 1. *[5] Якщо для нормальної системи граничних операторів $\{b_j(x,D)\}_{j=1}^m$ для всіх $j = \overline{1,m}$ виконуються нерівності $k_j < 2m\theta - 1/p$, то реалізується ізоморфізм банахових просторів $B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega) \simeq \left(L_p(\Omega), W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)\right)_{\theta,q}$, у якому праворуч проміжний простір з показником θ, породжений одним з еквівалентних методів дійсної інтерполяції банахової пари $V \equiv \left\{L_p(\Omega),\, W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)\right\}$.*

Задамо деяку функцію $f(t,x)$ з простору $C\left([0,T]; B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega)\right)$ – неперервних векторнозначних функцій на відрізку $[0,T]$, де $0 < T < \infty$. Нехай також задана деяка скалярна функція $w(0,x) \in L_p(\Omega)$. Згідно з лемою 1 існує вкладення $J : W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega) \to B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega)$, тому в просторі $C^1\left((0,T]; W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)\right)$ – гладких векторнозначних функцій $(0,T] \ni t \to w(t,x) \in W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)$ можна розглянути змішану задачу

$$\frac{dw(t,x)}{dt} = -(A + \Theta J)\, w(t,x) + f(t,x), \quad \lim_{t\to+0} \|w(t,x) - w(0,x)\|_{L_p(\Omega)} = 0\,. \qquad (1)$$

Сукупність обмежених лінійних операторів $S \in \mathfrak{L}(L_p(\Omega))$ таких, що $S\left(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)\right) \subset W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)$, утворює банахову алгебру $\mathfrak{L}(V)$ – обмежених лінійних операторів над банаховою парою V стосовно норми $\|S\|_{\mathfrak{L}(V)} \equiv \max\left\{\|S\|_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega))}; \|S\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))}\right\}$. Використаємо далі цю норму для оцінок резольвент операторів. Через $l_\omega \equiv \left\{re^{i\omega} : r > 0\right\}$ позначаємо промінь, відповідний деякому куту ω, $(0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi)$.

Лема 2. *Нехай при $\omega_0 \in (0,\pi/2)$ для будь-якого кута $\omega \in [\omega_0, 2\pi - \omega_0]$ і ненульового вектора μ_x, дотичного в точці $x \in \partial\Omega$, кожен поліном $\mathbb{C} \ni z \to a(x, \mu_x + z\,\nu_x) - \lambda$, де $\lambda \in l_\omega$, має m коренів $z_1(\lambda,\mu_x), \ldots, z_m(\lambda,\mu_x)$ з додатною уявною частиною і поліноми $\{b_j\,(x,\, \mu_x + z\,\nu_x)\}_{j=1}^m$ є лінійно незалежними за модулем $\prod_{j=1}^{m} \left[z - z_j(\lambda,\mu_x)\right]$. Тоді:*

(i) існує число $\beta \in \mathbb{R}$ таке, що сектор $\Lambda \equiv \bigcup \left\{l_\omega : \omega \in [\omega_0, 2\pi - \omega_0]\right\}$ належить резольвентній множині $\rho(A + \beta E)$ оператора $A + \beta E$ і виконуються умови

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda\in\Lambda} \|[(\lambda-\beta)E - A]^{-1}\|_{\mathfrak{L}(V)} \equiv M < \infty, \\ &\sup_{\lambda\in\Lambda} \|(\lambda-\beta)E[(\lambda-\beta)E - A]^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))} \equiv C < \infty; \end{aligned} \qquad (2)$$

(ii) якщо для оператора Θ виконується умова

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|\Theta J[(\lambda-\beta)E - A]^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))} \equiv \delta < 1, \qquad (3)$$

то сектор Λ належить резольвентній множині $\rho(A+\Theta J+\beta E)$ оператора $A+\Theta J+\beta E$ і справджується нерівність

$$\sup_{\lambda\in\Lambda_1}\|(\lambda-\beta)E[(\lambda-\beta)E-A-\Theta J]^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))}\leqslant\frac{C}{1-\delta}. \tag{4}$$

Доведення. Першу з оцінок (2) для операторної норми $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega));W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega))}$ одержано у праці [7] на підставі однієї теореми Агмона [4] та леми 1. Резольвента $[(\lambda-\beta)E-A]^{-1}$ залишає інваріантним підпростір $W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)$. Одностайна неперервність множин $\{\lambda\in\Lambda:[(\lambda-\beta)E-A]^{-1}\}$ над $W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)$ є наслідком цієї оцінки та неперервності вкладення $E: W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega)\to L_p(\Omega)$. Тому існування сталої M випливає з теореми Банаха-Штейнгауза.

Приймемо, що $C\equiv\sup_{\lambda\in\Lambda}\|I_{L_p(\Omega)}+A[(\lambda-\beta)E-A]^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))}$, де $I_{L_p(\Omega)}$ – одиниця алгебри $\mathfrak{L}\Big(L_p(\Omega)\Big)$. Оскільки $A\in\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big)$, то $C<\infty$. Потрібний вираз для сталої C випливає з тотожності $(\lambda-\beta)E[(\lambda-\beta)E-A]^{-1}=I_{L_p(\Omega)}+A[(\lambda-\beta)E-A]^{-1}$, правильної при $\lambda\in\Lambda$.

Ряд $E[(\lambda-\beta)E-A-\Theta J]^{-1}=E[(\lambda-\beta)E-A]^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\{\Theta J[(\lambda-\beta)E-A]^{-1}\}^k$ за умови (3) збіжний. Звідси приходимо до (4).

Зауваження. *З леми 2 випливає, що задача (1) при $\Theta=0$ параболічна ([8], п.3.8). Крім того, з неї випливає, що оператори $-A$ та $-(A+\Theta J)$ генерують над простором $L_p(\Omega)$ аналітичні півгрупи обмежених лінійних операторів відповідно $0\leqslant t\to e^{-tA}$ та $0\leqslant t\to e^{-t(A+\Theta J)}$. Нарешті, оскільки число β далі не використовується, то для скорочення записів замінимо $\beta E+A$ знову на A.*

Лема 3. *Існує єдиний розв'язок задачі (1) і його можна подати у вигляді $w(t,x)=e^{-t(A+\Theta J)}w(0,x)+\int_0^t e^{(\tau-t)(A+\Theta J)}f(\tau,x)\,d\tau$, де півгрупа має зображення $e^{-t(A+\Theta J)}=\int_\Gamma e^{-t\lambda}E(\lambda E-A-\Theta J)^{-1}\,d\lambda$.*

Доведення. Оскільки півгрупа $e^{-t(A+\Theta J)}$ аналітична, то до неї можна застосувати відомий результат роботи [6] (див. також [8], п.6), згідно з яким за умови $f\in C\Big([0,T];B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega)\Big)$ отримуємо твердження леми. Лема доведена.

Для оцінок норм введемо банахів простір $\mathfrak{L}^k\Big(\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big);\mathfrak{L}(V)\Big)\equiv$ $\mathfrak{L}\Big(\overbrace{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega))\times\ldots\times\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega))}^{k};\mathfrak{L}(V)\Big)$, обмежених k-лінійних операторів $F:\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big)\times\ldots\times\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big)\ni[X_1,\ldots X_k]\to F[X_1,\ldots X_k]\in\mathfrak{L}(V)$ з нормою $\|F\|_{\mathfrak{L}^k(\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega));\mathfrak{L}(V))}$ $=\sup_{\iota=\overline{1,k}}\sup\Big\{\big\|F[X_1,\ldots X_k]\big\|_{\mathfrak{L}(V)}:\|X_\iota\|_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega))}\leqslant 1\Big\}$. Далі позначимо через $\mathfrak{L}^k_s\Big(\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big);\mathfrak{L}(V)\Big)$ підпростір симетричних k-лінійних операторів, для яких правильна рівність $F[X_1,\ldots X_k]=F[X_{s_1},\ldots X_{s_k}]$ при будь-якій перестановці індексів $\begin{pmatrix}1&\ldots&k\\ s_1&\ldots&s_k\end{pmatrix}$.

Лема 4. *Припустимо, що виконується умова (3) і позначимо через* Γ *границю області* $\Lambda\bigcup\{\lambda : |\lambda|\leqslant\gamma\}$, *де* $\gamma>0$.

(i) Оператор $D_s^k e^{-tA}$, *визначений на будь-якому наборі* $[X_1J,\dots,X_kJ]$, *де* $X_\iota\in\mathfrak{L}\Big(B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big)$ *при* $\iota=\overline{1,k}$, *формулою* $D_s^k e^{-tA}[X_1J,\dots,X_kJ]\equiv$

$$\frac{1}{2\pi ik!}\int_\Gamma e^{-t\lambda}E(\lambda E-A)^{-1}\sum\nolimits_s\left[X_{s_1}J(\lambda E-A)^{-1}\right]\dots\left[X_{s_k}J(\lambda E-A)^{-1}\right]d\lambda,$$

у якій підсумовування відбудеться за всіма підстановками $\begin{pmatrix}1&\dots&k\\ s_1&\dots&s_k\end{pmatrix}$, *належить простору* $\mathfrak{L}_s^k\Big(\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big);\,\mathfrak{L}(V)\Big)$. *При цьому правильна нерівність*

$$\|D_s^k e^{-tA}\|_{\mathfrak{L}_s^k(\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega));\mathfrak{L}(V))}\leqslant CC_\Gamma M^k, \tag{5}$$

де $C_\Gamma\equiv\dfrac{1}{\pi}\Big(\displaystyle\int_\gamma^T r^{-1}e^{-r\gamma\cos\omega_0}\,dr+\frac12\int_{\omega_0}^{2\pi-\omega_0}e^{-r\gamma\cos\omega}\,d\omega\Big)$;

(ii) оператор $\Delta_\Theta\cdot D_s^k e^{-tA}$, *визначений над прямими добутками просторів* $\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big)\times\dots\times\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big)$ *формулою*

$$\Delta_\Theta\cdot D^k e^{-tA}[X_1J,\dots,X_kJ]\equiv$$
$$\frac{1}{2\pi ik!}\int_\Gamma e^{-t\lambda}E(\lambda E-A-\Theta J)^{-1}\sum\nolimits_s\left[X_{s_1}J(\lambda E-A)^{-1}\right]\dots\left[X_{s_k}J(\lambda E-A)^{-1}\right]d\lambda$$

належить простору $\mathfrak{L}_s^k\Big(\mathfrak{L}\Big(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big);\,\mathfrak{L}(V)\Big)$ *і має оцінку*

$$\|\Delta_\Theta\cdot D_s^k e^{-tA}\|_{\mathfrak{L}_s^k(\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega));\,\mathfrak{L}(V))}\leqslant\frac{CC_\Gamma M^k}{1-\delta}. \tag{6}$$

Доведення. З леми 2 випливає нерівність $\|E(\lambda E-A)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))}\leqslant C|\lambda|^{-1}$. Тому з $\|X_{s_\iota}J(\lambda E-A)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))}\leqslant\|X_{s_\iota}J\|_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);\,L_p(\Omega))}\|(\lambda E-A)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(V)}=M\|X_{s_\iota}J\|_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);\,L_p(\Omega))}$ при $\lambda\in\Lambda$, одержуємо

$$\|D_s^k e^{-tA}[X_1J,\dots,X_kJ]\|_{\mathfrak{L}(V)}\leqslant CC_\Gamma M^k(k!)^{-1}\sum_s\prod_\iota\|X_{s_\iota}J\|_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);\,L_p(\Omega))}.$$

Для одержання нерівності (5) залишилося скористатися означенням норми k-лінійного оператора. Нерівність (6) доводиться аналогічно, треба тільки використати нерівність (4) леми 2.

Лема 5. *Для будь-якого числа* $t\geqslant0$ *в алгебрі* $\mathfrak{L}(V)$ *правильна тотожність*

$$e^{-t(A+\Theta J)}=\sum_{k=0}^{K-1}D_s^k e^{-tA}[\overbrace{\Theta J,\dots,\Theta J}^{k}]+\Delta_\Theta\cdot D_s^K e^{-tA}[\overbrace{\Theta J,\dots,\Theta J}^{K}]. \tag{7}$$

Доведення. Достатньо застосувати контурний інтеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma e^{-t\lambda}\dots d\lambda$ до резольвентної тотожності

$$(\lambda E-A-\Theta J)^{-1}=\sum_{k=0}^{K-1}(\lambda E-A)^{-1}[\Theta J(\lambda E-A)^{-1}]^k+(\lambda E-A-\Theta J)^{-1}[\Theta J(\lambda E-A)^{-1}]^K,$$

правильної при $\lambda\in\Lambda$ і скористатися оцінками (5)-(6), які забезпечують існування невласних інтегралів. Лему доведено.

Позначимо $G_{K-1}(t,\Theta)\equiv$

$$\sum_{k=0}^{K-1} D_s^k e^{-tA}[\overbrace{\Theta J,\dots,\Theta J}^{k}]=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-t\lambda}E(\lambda E-A)^{-1}\sum_{k=0}^{K-1}\left[\Theta J(\lambda E-A)^{-1}\right]^k d\lambda.$$

Функції вигляду $v_K(t,x)\equiv G_{K-1}(t,\Theta)w(0,x)+\displaystyle\int_0^t G_{K-1}(t-\tau,\Theta)f(t,x)\,d\tau$, які залежать від резольвенти незбуреного оператора $(\lambda E-A)^{-1}$ та збурюючого оператора Θ поліноміально, використаємо для наближення розв'язку задачі (1).

Теорема. *Нехай $w(t,x)$ - розв'язок задачі (1) та θ $(0<\theta<1)$. Якщо функція f належить простору $C\Big([0,T];B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega)\Big)$, то для будь-якого оператора $\Theta\in\mathfrak{L}\Big(B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega)\Big)$ для якого виконується умова*

$$\|\Theta J(\lambda E-A)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(L_p(\Omega))}=\delta<1,$$

правильна нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|w(t,x)-v_K(t,x)\right\|_{L_p(\Omega)}\leqslant \tag{8}$$
$$\leqslant\frac{CC_\Gamma M^K}{1-\delta}\|\Theta J\|^K_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega))}\left(\|w(0,x)\|_{L_p(\Omega)}+\int_0^T\|f(t,x)\|_{L_p(\Omega)}\,dt\right).$$

Доведення. З тотожності (7) та оцінки (5) одержуємо таку нерівність

$$\left\|[e^{-t(A+\Theta J)}-G_{K-1}(t,\Theta)]w(0,x)\right\|_{L_p(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{CC_\Gamma M^K}{1-\delta}\|\Theta J\|^K_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega))}\|w(0,x)\|_{L_p(\Omega)}.$$

З неперервного вкладення $B^{2m\theta}_{p,q,\{b_j\}}(\Omega)\subset L_p(\Omega)$ випливає існування інтеграла $\displaystyle\int_0^T\|f(t,x)\|_{L_p(\Omega)}\,dt$. Отже, з властивостей інтеграла Бохнера, тотожності (7) та оцінки (6) маємо

$$\left\|\int_0^t\left[e^{-(t-\tau)(A+\Theta J)}-G_{K-1}(t-\tau,\Theta)\right]f(\tau,x)\,d\tau\right\|_{L_p(\Omega)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{CC_\Gamma M^K}{1-\delta}\|\Theta J\|^K_{\mathfrak{L}(W^{2m}_{p,\{b_j\}}(\Omega);L_p(\Omega))}\int_0^T\|f(t,x)\|_{Lp(\Omega)}\,dt.$$

Користуючись зображенням розв'язку w задачі (1), наведеного у лемі 3, приходимо до нерівності (8).

---

1. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы. – М., 1992.
2. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М., 1980.
3. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М., 1962.
4. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of elliptic boundary value problems// Comm. Pure Appl. Math. – 1962. – Vol. 15. – P. 119-147.
5. *Grisvard P.* Équations operationnelles abstraites et problémes aux limites dans des domaines non réguliers// Actes. Congrés Intern. Math. (1970) – 1971. – Vol. 2. – P. 731-736.
6. *Da Prato G., Grisvard P.* Equations d'évolotion abstraites non linéaire de type parabolique// Ann. Mat. Pure Appl. – 1979. – Vol. 120. – N 4. – P. 329-396.
7. *Lopushansky A. O.* On the analyticity of the solutions of evolutionary equations generated by elliptic operators pertubations // Matematychni Studii. – 1999. – Vol. 12. – N 2. – P. 135-138.
8. *Tanabe H.* Equations of evolution. – Pitman, 1979.

A. Lopushansky

INTERPOLATIC ESTIMATE FOR THE ANALYTIC APPROXIMATIONS OF THE PERTURBED PARABOLIC MIXED PROBLEMS

The estimate of analytic approximation of perturbed parabolic mixed problem solutions by means of the coresponding elliptic problem resolvent is established.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.129–134

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.129–134

УДК 519.21

Ірина Ніщенко

ПРО ІСНУВАННЯ МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ СІМ'Ї НАПІВМАРКІВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЙ

Об'єктом нашого дослідження є сім'я напівмарківських випадкових еволюцій $N^{\varepsilon}(t)$, детальному вивченню яких присвячена монографія [1]. При усередненні випадкової еволюції в праці [1] як масштабний множник використовували малий параметр ε. Ми показали існування такого, відмінного від ε, малого параметра ρ^{ε}, що в масштабі часу t/ρ^{ε} існує границя умовного математичного сподівання сім'ї напівмарківських випадкових еволюцій.

Нехай $x(t)$ є напівмарківський процес з неперервним часом та скінченною множиною станів $E = \{1, 2, \ldots, m\}$. Процес задається напівмарківською матрицею

$$F(t) = \left[F_{ij}(t) = P\{x(\tau) = j,\ \tau \leqslant t \,|\, x(0) = i\},\ \ i, j \in E,\ t \geqslant 0\right],$$

де $\tau -$ момент першого стрибка напівмарківського процесу. Вважаємо, що вкладений у напівмарківський процес ланцюг Маркова $(x_n,\ n \geqslant 0)$ є ергодичним зі стаціонарним розподілом $p_1, p_2, \ldots, p_m$, середні часи перебування в станах є скінченними

$$\int\limits_0^{\infty} tF_i(dt) < \infty, \quad F_i(t) = \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(t) \tag{1}$$

і функція розподілу $F_i(t) = P_i\{\tau \leqslant t\}$ моменту першого стрибка напівмарківського процесу є неперервною.

На траєкторіях напівмарківського процесу $x(t)$ побудуємо сім'ю випадкових невід'ємних матричнозначних еволюцій [1], залежних від деякого малого параметра $\varepsilon > 0$

$$N^{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \Gamma^{\varepsilon}_{x_0}(t), & 0 \leqslant t < \tau_1, \\ \Gamma^{\varepsilon}_{x_0}(\tau_1)\Lambda^{\varepsilon}_{x_1}\Gamma^{\varepsilon}_{x_1}(t - \tau_1), & \tau_1 \leqslant t < \tau_2, \\ \ldots & \\ \Gamma^{\varepsilon}_{x_0}(\tau_1)\Lambda^{\varepsilon}_{x_1}\Gamma^{\varepsilon}_{x_1}(\tau_2 - \tau_1)\cdots\Lambda^{\varepsilon}_{x_n}\Gamma^{\varepsilon}_{x_n}(t - \tau_n), & \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}, \\ \ldots & \end{cases}$$

де $\{\Gamma^{\varepsilon}_x(t),\ x \in E,\ t \geqslant 0\}$ – сім'я рівномірно неперервних напівгруп додатних операторів стиску в $\mathbb{R}^d$. Ці оператори визначають неперервну складову еволюції на інтервалах $[\tau_n,\ \tau_{n+1})$ сталості напівмарківського процесу $x(t)$. Сім'я $\{\Lambda^{\varepsilon}_x,\ x \in E\}$ лінійних операторів стиску в $\mathbb{R}^d$ визначає стрибки еволюції в моменти відновлення τ_n.

Припустимо, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Lambda_x^\varepsilon = I,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma_x^\varepsilon(t) = \Gamma_x(t), \qquad x\in E \tag{2}$$

Розглянемо умовне математичне сподівання $M_i[N^\varepsilon(t),\, x(t)=j]$ випадкової еволюції. Величина $M_i[N^\varepsilon(t),\, x(t)=j]$ є розв'язком матричного рівняння відновлення

$$X^{\varepsilon(ij)}(t) = A^{\varepsilon(ij)}(t) + \sum_{l=1}^{m} K^{\varepsilon(il)} * X^{\varepsilon(lj)}(t), \tag{3}$$

записаного у таких позначеннях

$$X^{\varepsilon(ij)}(t) = M_i[N^\varepsilon(t),\, x(t)=j],$$
$$A^{\varepsilon(ij)}(t) = M_i[N^\varepsilon(t),\, x(t)=j,\, t<\tau] = \delta_{ij}\Gamma_i^\varepsilon(t)\, P_i\{t<\tau\},$$
$$K^{\varepsilon(ij)}(dt) = M_i[N^\varepsilon(t),\, x(\tau)=j,\, \tau\in dt] = \Gamma_i^\varepsilon(t)\Lambda_j^\varepsilon F_{ij}(dt).$$

Співвідношення (3) є формулою повної ймовірності, записаною для умовного математичного сподівання $M_i[N^\varepsilon(t),\, x(t)=j]$ з врахуванням моменту τ першого стрибка напівмарківського процесу.

Розв'язок рівняння відновлення (3) подається у вигляді згортки

$$X^{\varepsilon(ij)}(t) = \sum_{l=1}^{m} H^{\varepsilon(il)} * A^{\varepsilon(lj)}(t),$$

де $H^\varepsilon(t) = [H^{\varepsilon(ij)}(t),\, i,j\in E]$ – матриця відновлення, побудована за матрицею $K^\varepsilon(t) = [K^{\varepsilon(ij)}(t),\, i,j\in E]$.

Зауважимо, що зі зроблених вище припущень випливають такі умови.

(A) Елементи матриць $K^{\varepsilon(ij)}(t)$ є невід'ємними монотонними за t функціями, і

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K^{\varepsilon(ij)}(du) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma_i^\varepsilon(u)\Lambda_j^\varepsilon F_{ij}(du) = \Gamma_i(u)F_{ij}(du) = K^{(ij)}(du).$$

$$(B)\quad \sup_\varepsilon \sum_j \left\| K^{\varepsilon(ij)}(\infty)\right\| = \sup_\varepsilon \sum_j \left\| \int_0^\infty \Gamma_i^\varepsilon(u)\Lambda_j^\varepsilon F_{ij}(du)\right\| \leqslant \sum_j \int_0^\infty F_{ij}(du) = 1.$$

$$(C)\quad \lim_{t\to\infty}\sup_\varepsilon \left\| \int_t^\infty y K^{\varepsilon(ij)}(dy)\right\| \leqslant \lim_{t\to\infty}\int_t^\infty y F_{ij}(dy) = 0.$$

(D) Сім'я матриць $\{A^{\varepsilon(ij)}(t) = \delta_{ij}\Gamma_i^\varepsilon(t)P_i\{t<\tau\},\ i,j\in E\}$ є рівномірно безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$. Це випливає з того, що $A^{\varepsilon(ij)}(t)$ має безпосередньо інтегровну за Ріманом мажоранту і є рівномірно неперервною на довільному відрізку $[0,T]$. Справді,

$$\sup_\varepsilon \left\| A^{\varepsilon(ij)}(t)\right\| \leqslant P_i\{t<\tau\},$$

функція $P_i\{t<\tau\}$ є обмеженою монотонною і

$$\int_0^\infty P_i\{t<\tau\}dt = \int_0^\infty tF_i(dt) < \infty,$$

отже, вона є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$. Далі, якщо $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ і $h = t_2 - t_1$, то

$$\sup_\varepsilon \left\| A^{\varepsilon(ij)}(t_2) - A^{\varepsilon(ij)}(t_1) \right\| = \sup_\varepsilon \left\| \Gamma_i^\varepsilon(t_2) P_i\{t_2 < \tau\} - \Gamma_i^\varepsilon(t_1) P_i\{t_1 < \tau\} \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_\varepsilon \left\| \Gamma_i^\varepsilon(h) P_i\{t_1 < \tau\} - I \cdot P_i\{t_1 < \tau\} \right\| \leqslant \sup_\varepsilon \left\| \Gamma_i^\varepsilon(h) - I \right\| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

згідно з рівномірною неперервністю операторів $\Gamma_i^\varepsilon(t)$.

Нехай виконуються такі умови:

$$\int_0^\infty \left[\Gamma_i(u) - I\right] F_i(du) = (0) \quad \text{або, що те саме} \quad \sum_{j=1}^m K^{(ij)}(\infty) = I \tag{4}$$

та

$$\sum_{i=1}^m p_i \cdot \int_0^\infty \left[\Gamma_i(u) - I\right] F_{ij}(du) = (0) \quad \text{або, що те саме} \quad \sum_{i=1}^m p_i K^{(ij)}(\infty) = p_j \cdot I \tag{5}$$

Теорема. *Нехай виконуються умови (1), (2), (4), (5). Якщо всі матриці $\{K^{(ij)}(du),\, i,j \in E\}$ не ґратчасті, то є така послідовність $\rho^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, що в масштабі часу t/ρ^ε існує нетривіальна границя умовного математичного сподівання $M_i[N^\varepsilon(t),\, x(t) = j]$ випадкової еволюції.*

Доведення. Оскільки розв'язок рівняння відновлення (3) виражається через матрицю відновлення $H^\varepsilon(t)$, то нам потрібно знайти її асимптотику при $t \to \infty$, $\varepsilon \to 0$.

Введемо послідовність матриць $\{L_k^{\varepsilon(ij)}(t),\ i,j \in E,\ k = 0,1,\ldots\}$, які визначаються зі співвідношень

$$L_0^{\varepsilon(ij)}(t) = K^{\varepsilon(ij)}(t),$$
$$L_{k+1}^{\varepsilon(ij)}(t) = K^{\varepsilon(ij)}(t) + \sum_{n\neq j} K^{\varepsilon(in)} * L_k^{\varepsilon(nj)}(t). \tag{6}$$

Використовуючи математичну індукцію та нерівність (B), переконуємося, що

$$L_{k+1}^{\varepsilon(ij)}(t) \geqslant L_k^{\varepsilon(ij)}(t)$$

і, що

$$\sup_\varepsilon \left\| L_k^{\varepsilon(ij)}(t) \right\| \leqslant 1 \quad \forall k = 0,1,\ldots$$

Позначимо $L^{\varepsilon(ij)}(t) = \lim\limits_{k\to\infty} L_k^{\varepsilon(ij)}(t)$. Перейшовши у (6) до границі при $k \to \infty$, бачимо, що $L^{\varepsilon(ij)}(t)$ є розв'язком рівняння

$$L^{\varepsilon(ij)}(t) = K^{\varepsilon(ij)}(t) + \sum_{n\neq j} K^{\varepsilon(in)} * L^{\varepsilon(nj)}(t).$$

Далі, перейшовши у цьому рівнянні до границі при $t \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, одержуємо рівняння для знаходження $L^{(ij)}(\infty)$

$$L^{(ij)}(\infty) = K^{(ij)}(\infty) + \sum_{n\neq j} K^{(in)}(\infty) \cdot L^{(nj)}(\infty).$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося: якщо виконується умова (4), то $L^{(ij)}(\infty) = I$ є розв'язком останнього рівняння при довільних $i, j \in E$.

Введемо ще послідовність матриць $H_k^\varepsilon(t) = \{H_k^{\varepsilon(ij)}(t),\ i, j \in E,\ k = 0, 1, \ldots\}$, які наближають матрицю відновлення $H^\varepsilon(t)$ при $k \to \infty$

$$\begin{gathered} H_0^{\varepsilon(ij)}(t) = I^{(ij)} + K^{\varepsilon(ij)} * H^{\varepsilon(jj)}(t), \\ H_{k+1}^{\varepsilon(ij)}(t) = H_0^{\varepsilon(ij)}(t) + \sum_{n \neq j} K^{\varepsilon(in)} * H_k^{\varepsilon(nj)}(t), \end{gathered} \tag{7}$$

$$\text{де} \quad I^{(ij)} = \begin{cases} I, & i = j \\ (0), & i \neq j \end{cases}$$

Покажемо за індукцією, що правильне таке співвідношення

$$H_k^{\varepsilon(ij)}(t) = I^{(ij)} + H^{\varepsilon(jj)} * L_k^{\varepsilon(ij)}(t). \tag{8}$$

Справді, при $k = 0$ одержуємо означення $H_0^{\varepsilon(ij)}(t)$. Якщо (8) доведено для всіх $n \leqslant k$, то

$$\begin{aligned} H_{k+1}^{\varepsilon(ij)}(t) &= H_0^{\varepsilon(ij)}(t) + \sum_{n \neq j} K^{\varepsilon(in)} * \left[I^{(nj)} + H^{\varepsilon(jj)} * L_k^{\varepsilon(nj)}\right](t) = \\ &= I^{(ij)} + K^{\varepsilon(ij)} * H^{\varepsilon(jj)}(t) + H^{\varepsilon(jj)} * \left[L_{k+1}^{\varepsilon(ij)} - K^{\varepsilon(ij)}\right](t) = \\ &= I^{(ij)} + H^{\varepsilon(jj)} * L_{k+1}^{\varepsilon(ij)}(t), \end{aligned}$$

що і треба було довести.

Перейшовши у (8) до границі при $k \to \infty$, отримуємо

$$H^{\varepsilon(ij)}(t) = I^{(ij)} + H^{\varepsilon(jj)} * L^{\varepsilon(ij)}(t), \tag{9}$$

а для матриць $H^{\varepsilon(jj)}(t)$ маємо рівняння відновлення

$$H^{\varepsilon(jj)}(t) = I + H^{\varepsilon(jj)} * L^{\varepsilon(jj)}(t), \tag{10}$$

в якому матриця $L^{\varepsilon(jj)}(\infty)$ є близькою до одиничної.

Позначимо

$$M^{(ij)} = \int_0^\infty t L^{(ij)}(dt)$$

і покажемо, що з умови

$$R^{(ij)} = \int_0^\infty t K^{(ij)}(dt) < \infty,$$

яка виконується згідно з умовою (C), випливає скінченність матриці $M^{(jj)}$. Застосувавши перетворення Лапласа до рівняння

$$L^{(ij)}(t) = K^{(ij)}(t) + \sum_{n \neq j} K^{(in)} * L^{(nj)}(t),$$

одержимо

$$\widehat{L}^{(ij)}(p) = \widehat{K}^{(ij)}(p) + \sum_{n \neq j} \widehat{K}^{(in)}(p) \cdot \widehat{L}^{(nj)}(p),$$

де ми використали такі позначення:

$$\widehat{L}^{(ij)}(p) = \int\limits_0^\infty e^{pt} L^{(ij)}(dt), \qquad \widehat{K}^{(ij)}(p) = \int\limits_0^\infty e^{pt} K^{(ij)}(dt).$$

Беручи до уваги те, що

$$\widehat{L}^{(ij)}(0) = L^{(ij)}(\infty) = I, \quad \widehat{K}^{(ij)}(0) = K^{(ij)}(\infty),$$

ми можемо записати

$$\frac{1}{p}\left[\widehat{L}^{(ij)}(p) - \widehat{L}^{(ij)}(0)\right] = \frac{1}{p}\left[\widehat{K}^{(ij)}(p) - \widehat{K}^{(ij)}(0)\right] +$$

$$+\sum_{n\neq j} \frac{1}{p}\left[\widehat{K}^{(in)}(p) - \widehat{K}^{(in)}(0)\right] \cdot \widehat{L}^{(nj)}(p) + \sum_{n\neq j} \frac{1}{p}\widehat{K}^{(in)}(0) \cdot \left[\widehat{L}^{(nj)}(p) - \widehat{L}^{(nj)}(0)\right].$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $p \to 0$ і врахувавши, що

$$\left(\widehat{L}^{(ij)}(0)\right)' = \int\limits_0^\infty tL^{(ij)}(dt) = M^{(ij)}, \quad \left(\widehat{K}^{(ij)}(0)\right)' = \int\limits_0^\infty tK^{(ij)}(dt) = R^{(ij)},$$

одержуємо

$$M^{(ij)} = \sum_{n=1}^{m} R^{(in)} + \sum_{n\neq j} K^{(in)}(\infty) M^{(nj)}.$$

Домножимо останню рівність на p_i та підсумуємо за всіма $i = \overline{1,m}$, використавши умову (5)

$$\sum_i p_i\, M^{(ij)} = \sum_{i,n} p_i R^{(in)} + \sum_{n\neq j} p_n M^{(nj)}.$$

Тоді

$$M^{(jj)} = \frac{1}{p_j}\sum_{i,n} p_i R^{(in)}.$$

Оскільки $R^{(ij)}$ є діагональною матрицею зі скінченними додатними діагональними елементами, то такою ж є і матриця $M^{(jj)}$. А тому існує обернена до неї матриця $[M^{(jj)}]^{-1}$.

Визначимо послідовність ρ^ε так:

$$\rho^\varepsilon = \sum_{s=1}^{d}\sum_{j=1}^{m} \rho_s^{\varepsilon(j)}, \quad \text{де} \quad \rho_s^{\varepsilon(j)} = \frac{1 - L_{ss}^{\varepsilon(jj)}(\infty)}{M_{ss}^{(jj)}}, \quad s = \overline{1,d};\ j = \overline{1,m}.$$

Зрозуміло, що $\rho^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Введемо сім'ю матриць $\{C^{\varepsilon(j)},\ j \in E\}$ з елементами

$$C_{s\,s}^{\varepsilon(j)} = -\frac{\rho_s^{\varepsilon(j)}}{\rho^\varepsilon}; \quad C_{s\,k}^{\varepsilon(j)} = \frac{L_{s\,k}^{\varepsilon(jj)}(\infty)}{\rho^\varepsilon\, M_{ss}^{(jj)}},\ s \neq k.$$

Оскільки

$$\left|C_{s\,s}^{\varepsilon(j)}\right| \leqslant 1, \quad C_{s\,k}^{\varepsilon(j)} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad s \neq k$$

і виконується нерівність

$$\sum_{k\neq s} C_{s\,k}^{\varepsilon(j)} = \frac{\sum\limits_{k\neq s} L_{s\,k}^{\varepsilon(jj)}(\infty)}{\rho^\varepsilon M_{ss}^{(jj)}} \leqslant \frac{1 - L_{s\,s}^{\varepsilon(jj)}(\infty)}{\rho^\varepsilon M_{ss}^{(jj)}} = \frac{\rho_s^{\varepsilon(j)}}{\rho^\varepsilon} \leqslant 1,$$

то існує границя $C^{(j)} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} C^{\varepsilon(j)}$. Отже, правильне таке зображення матриці $L^{\varepsilon(jj)}(\infty)$

$$L^{\varepsilon(jj)}(\infty) = I + \rho^\varepsilon M^{(jj)} C^{(j)} + o(\rho^\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0.$$

Використовуючи результат праці [2], можемо стверджувати, що

$$\left[H^{\varepsilon(jj)}\left(\frac{t}{\rho^\varepsilon} + y\right) - H^{\varepsilon(jj)}\left(\frac{t}{\rho^\varepsilon}\right)\right] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} y \cdot e^{tC^{(j)}} \cdot [M^{(jj)}]^{-1}.$$

Зі співвідношення (9) випливає, що для довільних $i, j \in E$

$$\left[H^{\varepsilon(ij)}\left(\frac{t}{\rho^\varepsilon} + y\right) - H^{\varepsilon(ij)}\left(\frac{t}{\rho^\varepsilon}\right)\right] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} y \cdot e^{tC^{(j)}} \cdot [M^{(jj)}]^{-1}. \tag{11}$$

Сім'я $\{A^{\varepsilon(ij)}(t),\ i, j \in E\}$, як вже зазначалося, є рівномірно безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0, \infty)$ і існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^\infty A^{\varepsilon(ij)}(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^\infty \delta_{ij}\Gamma_i^\varepsilon(t) P_i\{t < \tau\}dt =$$

$$= \delta_{ij} \cdot \int\limits_0^\infty \Gamma_i(t) P_i\{t < \tau\}dt = \delta_{ij} \cdot M_i \int\limits_0^\tau \Gamma_i(t)dt.$$

Отож, у масштабі часу t/ρ^ε ми одержуємо таку асимптотику умовного математичного сподівання випадкової еволюції

$$X^{\varepsilon(ij)}\left(\frac{t}{\rho^\varepsilon}\right) = \sum_{l=1}^m H^{\varepsilon(il)} * A^{\varepsilon(lj)}\left(\frac{t}{\rho^\varepsilon}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} e^{tC^{(j)}} \cdot [M^{(jj)}]^{-1} \cdot M_j \int\limits_0^\tau \Gamma_j(u)du.$$

Теорему доведено.

---

1. *Королюк В.С., Свищук А.В.* Полумарковские случайные эволюции. – К., 1992.
2. *Куция П.П.* Одна теорема многомерного восстановления// Изв. АН УССР. – 1989. – Т. 135. – N 3. – С.463–466.

I. Nishchenko

ON THE EXISTENCE OF A SMALL PARAMETER FOR A FAMILY OF SEMIMARKOV PROCESS

On the trajectories of a semimarkov process with a finit set state and continuous time we consider a family of random evolutions $N^\varepsilon(t)$. We have found such a scale of time in which asymptotic representation of the mean value of random evolution exist as $\varepsilon \to 0$.

Стаття надійшла до редколегії 20.01.2000

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.135–141 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.135–141*

УДК 539.3

Віктор Опанасович, Андрій Шелевач

ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙСНЕРА З ПРЯМОЛІНІЙНОЮ ТРІЩИНОЮ, КРУТНИМИ МОМЕНТАМИ ТА ПЕРЕРІЗУВАЛЬНИМИ СИЛАМИ, ПРИКЛАДЕНИМИ ДО ЇЇ БЕРЕГІВ

У праці на основі методів теорії функцій комплексної змінної запропоновано спосіб зведення розв'язку задачі про згин пластини Рейснера з прямолінійною наскрізною тріщиною до системи сингулярних інтегральних рівнянь, коли до її берегів прикладені крутні моменти та перерізувальні сили. В праці [1] розглянуто задачу про кручення пластини з тріщиною рівномірно розподіленими на нескінченності крутними моментами, де розв'язок задачі зведений до парних інтегральних рівнянь, ці результати містить також [2].

1. Формулювання задачі та її розв'язок. Розглянемо безмежну ізотропну пластину постійної товщини h, яка містить наскрізну прямолінійну тріщину завдовжки $2l$. Вважаємо, що до берегів тріщини прикладено самозрівноважене навантаження у вигляді крутних моментів та перерізувальних сил. Крім того, під час деформації пластини береги тріщини не контактують, а згин пластини описується рівняннями теорії Рейснера. В середній площині пластини виберемо декартову систему координат з початком у центрі розрізу, направивши вісь Ox вздовж лінії перетину тріщини з цією площиною.

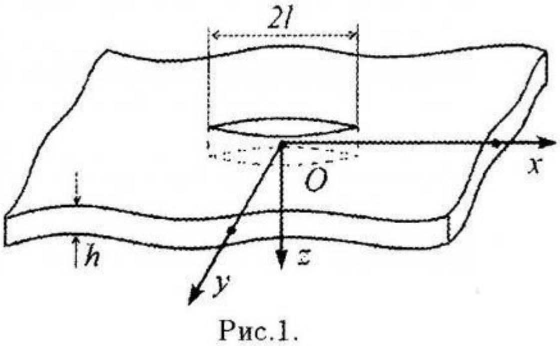

Рис.1.

Граничні умови задачі матимуть вигляд:

$$M_y^{\pm} = 0, \quad H_{xy}^{\pm} = 0,5q_1(x), \quad Q_y^{\pm} = 0,5q_2(x), \quad |x| < l. \tag{1}$$

Тут і надалі індексами " $+$ " і " $-$ " позначено граничне значення відповідних функцій при $y \to \pm 0$; M_y – згинальний момент; H_{xy} – крутний момент; Q_y – перерізувальна сила.

Крайові умови (1) перепишемо так:

$$M_y^+ - M_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ - H_{xy}^- = 0, \quad Q_y^+ - Q_y^- = 0, \quad |x| < l; \tag{2}$$

$$M_y^+ + M_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ + H_{xy}^- = q_1(x), \quad Q_y^+ + Q_y^- = q_2(x), \quad |x| < l. \tag{3}$$

Якщо ввести в розгляд комплексні потенціали $\Phi(z) = \phi'(z), \Psi(z) = \psi'(z)$ та функцію $\Omega(z,\overline{z})$ [2,3], то згинальні та крутні моменти, перерізувальні сили визначимо на підставі формул $M_y + M_x = 2m[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]$,

$$M_y + iH_{xy} = m[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] + n[z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}] + \rho[2\overline{\Phi''(z)} + i\frac{\partial^2\Omega(z,\overline{z})}{\partial z^2}], \tag{4}$$

$$Q_x - Q_y = -2D[2\Phi'(z) - i\frac{\partial\Omega(z,\overline{z})}{\partial z}], \tag{5}$$

$$\partial e m = -D(1+\nu);\ n = D(1-\nu);\ \rho = \frac{4D}{k^2};\ k = \frac{\sqrt{10}}{h};\ D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)};$$

$$z = x + iy;\ \overline{z} = x - iy;\ i = \sqrt{-1};\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right);$$ E, ν – відповідно модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Подамо функції $\Phi(z)$ та $\Omega(z,\overline{z})$ у вигляді

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-l}^{l} \frac{f(t)dt}{t-z}, \tag{6}$$

$$\Omega(z,\overline{z}) = -\frac{1}{\pi} Re\left[\int_{-l}^{l} \mu(t)\frac{WK_1(W)}{t-z}dt\right], \tag{7}$$

де $\mu(t), f(t)$ – невідомі дійсні функції; $W = k\sqrt{(t-x)^2 + y^2}$; $K_j(x)$ – функція Макдональда j-го порядку.

Введемо у розгляд функцію

$$V(z) = q\overline{\Phi}(z) + z\overline{\Phi'}(z) + \overline{\Psi}(z) + n_1\overline{\tilde{q}}(z), \tag{8}$$

причому

$$\tilde{q}(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_{-l}^{l} \frac{\tilde{s}(t)dt}{(t-z)^3}, \quad \overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}, \quad \tilde{s}(t) = -2f(t) + \mu(t),$$

$$q = -\frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad n_1 = \frac{2h^2}{5(1-\nu)}.$$

Враховуючи (8), формулу (4) подамо у вигляді

$$M_y + iH_{xy} = n[q\Phi(z) + V(\overline{z}) + (z-\overline{z})\overline{\Phi'(z)} + in_1\overline{\Omega_1(z,\overline{z})}], \tag{9}$$

де

$$\Omega_1(z,\overline{z}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} \frac{W[2\tilde{K}_1(W) + WK_0(W)]\mu(t)}{(t-z)^3}dt +$$

$$+\frac{k^2}{4\pi}Re\left[\int\limits_{-l}^{l}\frac{WK_1(W)\mu(t)}{t-z}dt\right]+\frac{k^6}{2\pi}\int\limits_{-l}^{l}\frac{(x-t)^2}{W^3}K_1(W)(\overline{z}-t)\mu(t)dt,$$

$$\tilde{K}_1(W)=K_1(W)-\frac{1}{W}.$$

Враховуючи (6) і (7), формулу (5) перепишемо так:

$$Q_x-iQ_y=2D[P(z)+i\tilde{\Omega}(z,\overline{z})],\quad P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-l}^{l}\frac{\delta(t)dt}{(t-z)^2},\tag{10}$$

$$\tilde{\Omega}(z,\overline{z})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-l}^{l}\left[\frac{W^2\tilde{K}_1'(W)}{(t-z)^2}+\frac{ik^4y(t-\overline{z})K_0(W)}{W^2}\right]\mu(t)dt,$$

де $\delta(t)$ – невідома дійсна функція.

Функцію $V(z)$ шукатимемо у вигляді

$$V(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-l}^{l}\frac{g(t)dt}{t-z},\tag{11}$$

де $g(t)$ - невідома дійсна функція. Використовуючи граничні умови (2) та враховуючи (6), (9) – (11), матимемо

$$g(t)=qf(t),\quad t\in[-l,l],\tag{12}$$

при цьому вважаємо, що $\delta(\pm l)=0$.

Задовольняючи крайові умови (3) та враховуючи (6), (9) – (12), одержимо систему сингулярних інтегральних рівнянь для знаходження невідомих функцій $f(t)$ і $\delta(t)$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l}\frac{2q-k^2n_1W\tilde{K}_2'(W)}{t-x}f(t)dt+\frac{n_1k^2}{2\pi}\int\limits_{-l}^{l}\tilde{K}_2'(W)\delta'(t)dt=-\frac{1}{n}q_1(x),\tag{13}$$

$$\frac{2kD}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\int\limits_{-l}^{l}\frac{WK_1(W)}{t-x}\delta'(t)dt+2k\int\limits_{-l}^{l}\tilde{K}_1'(W)f(t)dt\right]=-q_2(x),\ (x\in[-l,l]),$$

де

$$\tilde{K}_2(W)=K_2(W)-\frac{2}{W^2},\quad W=k|t-x|.$$

Систему рівнянь (13) доповнюємо додатковими залежностями

$$\int\limits_{-l}^{l}f(t)dt=0,\quad m_1\int\limits_{-l}^{l}tf(t)dt-n_1\int\limits_{-l}^{l}\delta'(t)dt=0,\quad m_1=\frac{4}{1-\nu},\tag{14}$$

які відображають однозначність прогину і кутів повороту [4].

2. Числовий аналіз задачі. Розв'язок системи рівнянь (13), (14) шукатимемо за допомогою методу механічних квадратур [5,6]. Для прикладу розглянемо два випадки прикладання навантаження до берегів тріщини. У першому до берегів тріщини прикладені сталі крутні моменти H і тому розв'язок системи рівнянь (13), (14) подамо у вигляді

$$f(lt) = -\frac{2H}{n}\frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \delta'(lt) = -\frac{2H}{nl}\frac{v(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad |t| < 1;$$

у другому випадку до берегів тріщини прикладені сталі перерізувальні сили Q і розв'язок системи рівнянь (13), (14) доцільно подати у вигляді

$$f(lt) = -\frac{Q}{kD}\frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \delta'(lt) = -\frac{Q}{lkD}\frac{v(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad |t| < 1.$$

Тут $u(t)$ і $v(t)$ – невідомі функції, для знаходження вузлових значень яких матимемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}[u(t_m)K_{j1}(t_m, x_r) + v(t_m)K_{j2}(t_m, x_r)] = C_j, \quad j = 1, 2, \quad r = \overline{1, M-1},$$

$$\sum_{m=1}^{M} u(t_m) = 0, \quad m_1 \sum_{m=1}^{M} t_m u(t_m) - n^* \sum_{m=1}^{M} v(t_m) = 0, \tag{15}$$

де $C_1 = 1, C_2 = 0$ для першого випадку; $C_1 = 0, C_2 = 1$ для другого випадку навантаження тріщини;

$$t_m = \cos\frac{2m-1}{2M}\pi, \quad x_r = \cos\frac{\pi r}{M},$$

$$K_{11}(t,x) = \frac{2q + m_1[2\tilde{K}_2(W) - |x-t|K_1(W)]}{t-x},$$

$$K_{12}(t,x) = n_2\tilde{K}_2(W), \quad K_{21}(t,x) = \frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{W}\tilde{K}_1(W) - \tilde{K}_2(W)\right),$$

$$K_{22}(t,x) = -\lambda\frac{WK_1(W)}{t-x}, \quad K_1(W) = \frac{1}{W} + \tilde{K}_1(W),$$

$$n^* = \lambda^2 m_1, \quad n_2 = 2m_1, \quad W = \frac{1}{\lambda}|t-x|, \quad \lambda = \frac{h}{l\sqrt{10}}.$$

Згідно з [7] функції $\tilde{K}_1(W)$ і $\tilde{K}_2(W)$ мають вигляд

$$\tilde{K}_1(W) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2(n+1)} + C + \ln\frac{W}{2}\right]\frac{(\frac{W}{2})^{2n+1}}{n!(n+1)!},$$

$$\tilde{K}_2(W) = -\frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+2)!}\left(\frac{W}{2}\right)^{2(k+1)}\left[\ln\frac{W}{2} + C - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} - \frac{2k+3}{2(k+1)(k+2)}\right],$$

де C – стала Ейлера.

Розподіл силових і моментних чинників поблизу вістря тріщини має вигляд [8]

$$M_x - M_y - 2iH_{xy} = \frac{0,5(K_M^{(p)} - iK_H^{(p)})\overline{z_j}}{\sqrt{2z_j^3}} - \frac{0,5(K_M^{(p)} + 3iK_H^{(p)})}{\sqrt{2z_j}} + O(1),$$

$$M_x + M_y = 2Re[(K_M^{(p)} - iK_H^{(p)})/\sqrt{2z_j}] + O(1),$$

$$Q_x - iQ_y = -\frac{iK_Q^{(p)}}{\sqrt{2z_j}} + O(1),$$

де $z_j = re^{i\theta}; r, \theta$ – полярні координати точки з початком у вершині тріщини; $K_M^{(p)}, K_H^{(p)}, K_Q^{(p)}$ – коефіцієнти інтенсивності моментів та перерізувальних сил, які для першого випадку визначаємо за формулами

$$K_M^{(p)} = 0, \quad K_H^{(p)} = h\sqrt{l}F_2(\lambda,\nu), \quad K_Q^{(p)} = \frac{\sqrt{10}H\sqrt{l}}{h(1+\nu)}F_3(\lambda,\nu),$$

і для другого випадку навантаження тріщини

$$K_M^{(p)} = 0, \quad K_H^{(p)} = \frac{1}{2}\frac{(1-\nu)Qh\sqrt{l}}{\sqrt{10}}F_2(\lambda,\nu), \quad K_Q^{(p)} = \frac{1}{2}\frac{1-\nu}{1+\nu}Q\sqrt{l}F_3(\lambda,\nu).$$

У попередніх формулах введено позначення

$$F_2(\lambda,\nu) = -2\frac{1+\nu}{1-\nu}u(1), \quad F_3(\lambda,\nu) = 2\lambda\frac{1+\nu}{1-\nu}v(1), \tag{16}$$

де

$$\begin{pmatrix} u(1) \\ v(1) \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+1}\begin{pmatrix} u(t_m) \\ v(t_m) \end{pmatrix} ctg\frac{2m-1}{4M}\pi.$$

Для чисельного розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (15) та для обчислення перехідних функцій $F_2(\lambda,\nu)$, $F_3(\lambda,\nu)$ (16) і приведених коефіцієнтів інтенсивності напружень

$$K_H^* = \frac{K_H^{(p)}}{Q\sqrt{l^3}}, \quad K_Q^* = \frac{K_Q^{(p)}}{Q\sqrt{l}}$$

було використано пакет прикладних програм "Delphi". Результати аналізу подано в табл. та на рис. 2 і 3. У таблиці наведено значення функцій $2F_2(\lambda,\nu)$, $F_3(\lambda,\nu)$ залежно від параметра $\lambda = \frac{h}{l\sqrt{10}}$ та коефіцієнта Пуассона ν для різної розмірності M матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (15) і постійному крутному моментові на її берегах. Друга стрічка для кожної функції відповідає M=30, третя M=100, збільшення M у два рази вже не призводить до покращення числових значень. Жирним шрифтом (перша стрічка) наведено результати праці [1]. Як видно з табл., деякі результати цієї праці збігаються з результатами публікації [1], а деякі відрізняються, що зумовлено недостатньою точністю виконаних у ній обчислень. Крім того, при $\lambda > 0.2$ для функції $F_2(\lambda,\nu)$ можна обмежитись, наприклад, $M = 30$, а от для малих λ потрібно M збільшувати, це ж стосується до значень функції $F_3(\lambda,\nu)$ при різних параметрах λ і ν.

Графіки зміни приведених коефіцієнтів інтенсивності напружень K_H^* і K_Q^* залежно від параметра λ при різних значеннях ν зображено на рис. 2 і 3 при дії

ν		λ					
		0,05	0,2	1	1,5	2	2,5
0	$-F_3$	**0,1051**	**0,1167**	**0,02824**	-	-	-
		0,14768	0,11506	0,01065	0,00415	0,00207	0,00119
		0,12294	0,10565	0,00924	0,00340	0,00159	0,00092
	$2F_2$	**0,1471**	**0,3576**	**0,7692**	-	-	-
		0,14494	0,39440	0,42532	0,35227	0,29886	0,25931
		0,15868	0,39480	0,42532	0,35227	0,29886	0,25931
$0,25$	$-F_3$	**0,1312**	**0,1382**	**0,02995**	-	-	-
		0,18146	0,13673	0,01263	0,00497	0,00249	0,00145
		0,15170	0,12557	0,01119	0,00420	0,00200	0,00111
	$2F_2$	**0,1647**	**0,3983**	**0,8050**	-	-	-
		0,17720	0,47032	0,50478	0,42175	0,36011	0,31395
		0,19232	0,47073	0,50478	0,42175	0,36011	0,31395
$0,5$	$-F_3$	**0,1567**	**0,1575**	**0,0302**	-	-	-
		0,21417	0,15637	0,01440	0,00572	0,00288	0,00168
		0,17966	0,14363	0,01277	0,00483	0,00231	0,00129
	$2F_2$	**0,1807**	**0,4336**	**0,8313**	-	-	-
		0,20815	0,53950	0,57659	0,48560	0,41711	0,36528
		0,22428	0,53990	0,57659	0,48561	0,41711	0,36528

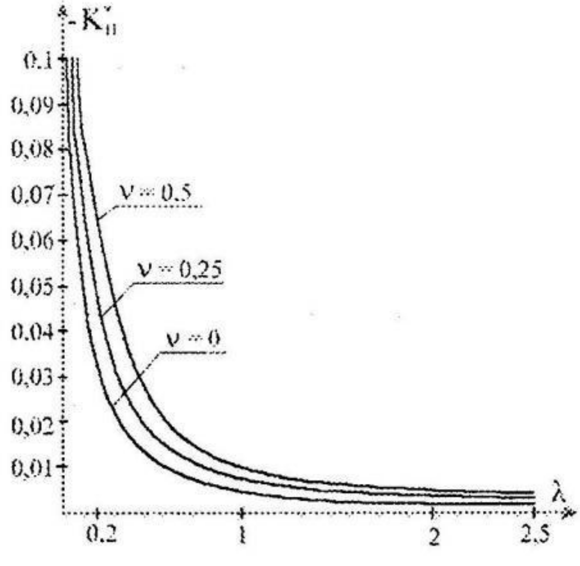

Рис. 2.

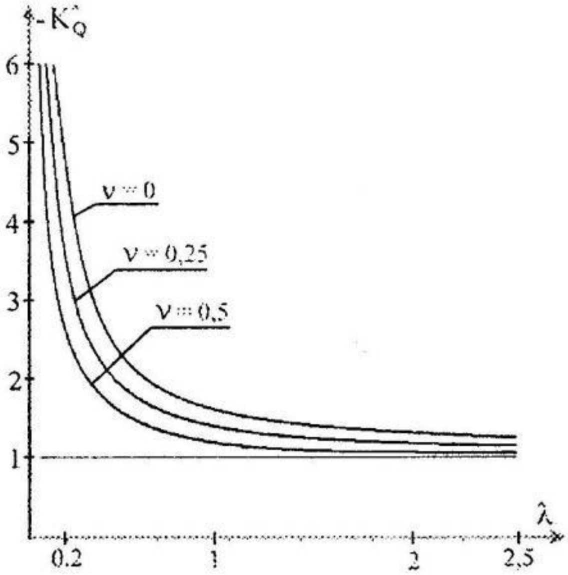

Рис. 3.

сталої на берегах тріщини перерізувальної сили Q. Як видно з графіків, зі зменшенням параметра λ, тобто зі зменшенням товщини пластини або збільшенням довжини тріщини, значення коефіцієнтів збільшуються за абсолютною величиною.

---

1. *Wang N.M.* Twisting of an elastic plate containing a crack// Int. J. Fract. Mech. – 1970. – Vol.6. – N4. – P.367–378.

2. *Бережницкий Л.Т., Делявский М.В., Панасюк В.В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – К., 1979.

3. *Угодчиков А.Г., Соболев В.А.* Концентрация напряжений около отверстий в плитах по теории Рейсснера //Прикл. механика. – 1972. – Т.8. – N6. – С. 58–66.

4. *Тимошенко С.П., Войновски-Кригер.* Пластины и оболочки. – М., 1966.

5. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишын А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К., 1976.

6. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К., 1981.

7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., 1971.

8. *Мазурак Л.П., Бережницкий Л.Т.* Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – К., 1990.

V. Opanasovych, A. Shelevach

BEND OF THE REYSSNER'S PLATE WITH A RECTILINEAL CRACK BY ROTATIONAL MOMENTS AND CUTTING POWERS EXERTED TO ITS SIDES

In the work with use of function theory system of complex variable the problem of bend of a isotropic plate with a crack according to Reyssner's theory has been studied, when to its sides rotational moments and cutting powers were exerted. The problem solution comes to a system of singular integral equations which are solved numerically with help of the method of mechanic guadratures. For constant load on the sides of the crack both a numerical analysis of transient functions connected with intensity coefficients of moments and cutting powers by different quantity of geometrical and mechanical problem parameters and a comparison of results with ones known in publications have been carried out.

Стаття надійшла до редколегії 07.07.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.142–149

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.142–149

УДК 517.95

Неля Пабирівська

ТЕПЛОВІ МОМЕНТИ В ОБЕРНЕНІЙ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Розв'язуючи обернені задачі дуже важливо вибрати вид додаткової інформації про розв'язок, який би допоміг однозначно визначити невідомі параметри досліджуваного процесу. Одне з джерел такої інформації – моменти. Спробу розв'язати пряму задачу теплопровідності, задаючи теплові моменти замість крайових умов, було зроблено в [1]. У цій праці теплові моменти використано при визначенні залежних від часу коефіцієнта температуропровідності та одного з молодших коефіцієнтів шляхом зведення поставленої задачі до задачі визначення двох молодших коефіцієнтів.

Обернені задачі визначення двох коефіцієнтів у параболічному рівнянні досліджені в працях [2 – 4].

В області $\Omega = \{(x,t):\ 0<x<h,\ 0<t<T\}$ розглянемо рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомими коефіцієнтами $a(t)$ та $b(t)$, з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant h, \tag{2}$$

та з крайовими умовами першого роду

$$u(0,t) = \nu_1(t), \quad u(h,t) = \nu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3}$$

Визначимо коефіцієнт температуропровідності $a(t)$, коефіцієнт при молодшому члені $b(t)$ та розв'язок $u(x,t)$ задачі (1)-(3) так, щоб задовольнялись умови

$$\int_0^h u(x,t)\,dx = \mu_1(t), \quad \int_0^h xu(x,t)\,dx = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4}$$

Означення. *Розв'язком оберненої задачі (1)-(4) будемо називати трійку функцій $\big(a(t), b(t), u(x,t)\big)$ з класу $C[0,T]\times C[0,T]\times C^{2,1}(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$, що задовольняють умови (1)-(4), причому $a(t)>0$ на проміжку $[0,T]$.*

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\varphi \in C^1[0,h]$, $\nu_i, \mu_i \in C^1[0,T]$, $i=1,2$, функція $f \in C(\overline{\Omega})$ і неперервна за Гельдером стосовно x в $\overline{\Omega}$ рівномірно по відношенню до t з показником $\beta, 0<\beta<1$;

2) $\mu_2'(t)\big(\nu_2(t)-\nu_1(t)\big) - \mu_1'(t)\big(h\nu_2(t)-\mu_1(t)\big) > 0$, $h\nu_1(t)-\mu_1(t) \geqslant 0$, $\mu_1(t) - h\nu_2(t) \geqslant 0$, $\big(\nu_2(t)-\nu_1(t)\big)\int_0^h xf(x,t)\,dx - \big(h\nu_2(t)-\mu_1(t)\big)\int_0^h f(x,t)\,dx > 0$, $t \in [0,T]$; $\varphi'(x)>0$, $x\in[0,h]$;

3) $\nu_1(0) = \varphi(0), \quad \nu_2(0) = \varphi(h), \quad \int\limits_0^h \varphi(x)\,dx = \mu_1(0), \quad \int\limits_0^h x\varphi(x)\,dx = \mu_2(0).$

Тоді існує розв'язок задачі (1)-(4) при $x \in [0, h]$, $t \in [0, t_0]$, *де число* t_0, $0 < t_0 \leqslant T$, *визначається вихідними даними.*

Доведення. Зробимо в задачі (1)-(4) заміну

$$\eta = \theta(t), \quad \text{де} \quad \theta(t) = \int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Нехай $z(\eta)$ – функція, обернена до $\theta(t)$:

$$z(\eta) = t, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \theta_0, \quad \text{де} \quad \theta_0 = \theta(T).$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned} U(x,\eta) &= u\big(x, z(\eta)\big), & F(x,\eta) &= f\big(x, z(\eta)\big), \\ A(\eta) &= a\big(z(\eta)\big), & N_i(\eta) &= \nu_i\big(z(\eta)\big), \quad i = 1, 2, \\ B(\eta) &= b\big(z(\eta)\big), & M_i(\eta) &= \mu_i\big(z(\eta)\big), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Задача (1)-(4) в цих позначеннях набуде вигляду

$$U_x = U_{xx} + P(\eta)U_x + R(\eta)F(x,\eta), \quad 0 < x < h, \quad 0 < \eta < \theta_0, \tag{5}$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant h, \tag{6}$$

$$U(0,\eta) = N_1(\eta), \quad U(h,\eta) = N_2(\eta), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \theta_0, \tag{7}$$

$$\int\limits_0^h U(x,\eta)\,dx = M_1(\eta), \quad \int\limits_0^h xU(x,\eta)\,dx = M_2(\eta), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \theta_0, \tag{8}$$

$$\text{де} \quad P(\eta) = \frac{B(\eta)}{A(\eta)}, \quad R(\eta) = \frac{1}{A(\eta)}. \tag{9}$$

Очевидно, що задача (1)-(4) визначення коефіцієнтів $a(t)$ та $b(t)$ еквівалентна оберненій задачі визначення двох молодших коефіцієнтів $P(\eta)$ та $R(\eta)$.

Зведемо задачу (5)-(8) до системи рівнянь стосовно $P(\eta)$ і $R(\eta)$. Домножуючи рівняння (5) на x^i, $i = 0, 1$, інтегруючи за x від 0 до h і беручи до уваги умови (8), одержимо

$$\begin{cases} M_1'(\eta) = U_x(h,\eta) - U_x(0,\eta) + P(\eta)\big(N_2(\eta) - N_1(\eta)\big) + R(\eta)\displaystyle\int\limits_0^h F(x,\eta)\,dx, \\ M_2'(\eta) = hU_x(h,\eta) - N_2(\eta) + N_1(\eta) + P(\eta)\big(hN_2(\eta) - M_1(\eta)\big) + R(\eta)\displaystyle\int\limits_0^h xF(x,\eta)\,dx. \end{cases}$$

Зведемо отриману систему до вигляду

$$R(\eta) = \frac{P_1(\eta) + \big(N_2(\eta) - N_1(\eta)\big)^2 + P_2(\eta)U_x(h,\eta) + P_3(\eta)U_x(0,\eta)}{P_4(\eta)}, \tag{10}$$

$$P(\eta) = \frac{M_1'(\eta) + U_x(0,\eta) - U_x(h,\eta) - R(\eta)\int\limits_0^h F(x,\eta)\,dx}{N_2(\eta) - N_1(\eta)}, \tag{11}$$

де

$$P_1(\eta) = M_2'(\eta)\big(N_2(\eta) - N_1(\eta)\big) - M_1'(\eta)\big(hN_2(\eta) - M_1(\eta)\big),$$
$$P_2(\eta) = hN_1(\eta) - M_1(\eta), \quad P_3(\eta) = M_1(\eta) - hN_2(\eta),$$
$$P_4(\eta) = \big(N_2(\eta) - N_1(\eta)\big)\int\limits_0^h xF(x,\eta)\,dx - \big(hN_2(\eta) - M_1(\eta)\big)\int\limits_0^h F(x,\eta)\,dx,$$

$U(x,\eta)$ – розв'язок прямої задачі (5)-(7). Вважаючи тимчасово відомими неперервні функції $P(\eta)$, $R(\eta)$, запишемо цей розв'язок за допомогою функції Гріна [5] для рівняння теплопровідності і продиференціюємо його за x аналогічно до [6]:

$$U_x(x,\eta) = \int\limits_0^h \varphi'(\xi)G_2(x,\eta,\xi,0)\,d\xi + \int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \big(P(\tau)U_\xi(\xi,\tau) +$$
$$+ R(\tau)F(\xi,\tau)\big)G_{1x}(x,\eta,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau - \int\limits_0^\eta N_1'(\tau)G_2(x,\eta,0,\tau)\,d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^\eta N_2'(\tau)G_2(x,\eta,h,\tau)\,d\tau. \tag{12}$$

До системи рівнянь (10)-(11) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора.

Перейшовши в умові 2) теореми до змінної η, отримаємо

$$P_1(\eta) > 0, \quad P_2(\eta) \geqslant 0, \quad P_3(\eta) \geqslant 0, \quad P_4(\eta) > 0. \tag{13}$$

Оскільки $U_x(x,0) = \varphi'(x)$, $x \in [0,h]$, то з умови 2) теореми і умов (13) випливає існування деякого проміжка $[0,\eta_0]$, $0 < \eta_0 \leqslant \theta_0$, на якому $R(\eta) > 0$ (число η_0 буде визначене нижче).

Визначимо оцінки розв'язків системи рівнянь (10), (11). Легко бачити, що

$$R(\eta) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,\theta_0]}\Big(P_1(\eta) + \big(N_2(\eta) - N_1(\eta)\big)^2\Big)}{\min\limits_{[0,\theta_0]} P_4(\eta)} +$$
$$+ \frac{\max\limits_{[0,\theta_0]}\Big(P_2(\eta) + P_3(\eta)\Big)}{\min\limits_{[0,\theta_0]} P_4(\eta)} \max\limits_{[0,h]}|U_x(x,\eta)| = C_1 + C_2V(\eta), \tag{14}$$

де

$$V(\eta) = \max\limits_{[0,h]}|U_x(x,\eta)|.$$

Застосовуючи оцінку (14), з рівняння (11) знаходимо

$$|P(\eta)| \leqslant C_3 + C_4V(\eta). \tag{15}$$

Завдяки (14), (15) зі співвідношення (12) отримуємо оцінку

$$V(\eta) \leqslant C_5 + C_6 \int_0^h \frac{V^2(\tau) + V(\tau)}{\sqrt{\eta - \tau}}\, d\tau \leqslant C_5 + C_6 \int_0^h \frac{\left(V(\tau) + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{\eta - \tau}}\, d\tau. \qquad (16)$$

Позначивши $W(\eta) = V(\eta) + \frac{1}{2}$, матимемо

$$W(\eta) \leqslant C_7 + C_6 \int_0^h \frac{W^2(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\eta - \tau}}. \qquad (17)$$

Піднесемо нерівність (17) до квадрата і, змінивши η на σ та домноживши ліву і праву частини нерівності на $\dfrac{1}{\sqrt{\eta - \sigma}}$, проінтегруємо її від 0 до η. Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, в результаті одержимо:

$$\int_0^h \frac{W^2(\sigma)\, d\sigma}{\sqrt{\eta - \sigma}} \leqslant 4C_7^2\sqrt{\theta_0} + 4\pi C_6^2\sqrt{\theta_0} \int_0^h W^4(\tau)\, d\tau.$$

Повертаючись до оцінки (17), прийдемо до нерівності

$$W(\eta) \leqslant C_7 + \sqrt{\theta_0}\left(C_8 + C_9 \int_0^h W^4(\tau)\, d\tau\right). \qquad (18)$$

Позначивши праву частину (18) через $K(\eta)$, знаходимо

$$K'(\eta) \leqslant \sqrt{\theta_0}\, C_9 K^4(\eta).$$

Розділивши останню нерівність на $K^4(\eta)$, замінимо η на τ і зінтегруємо за τ від 0 до η. Отриману нерівність розв'яжемо стосовно $K(\eta)$, враховуючи, що $K(0) = C_7 + \sqrt{\theta_0}C_8$:

$$K(\eta) \leqslant \frac{C_7 + \sqrt{\theta_0}C_8}{\sqrt[3]{1 - 3C_9\sqrt{\theta_0}\left(C_7 + \sqrt{\theta_0}C_8\right)^3 \eta}}.$$

Зафіксуємо число η_1, $0 < \eta_1 \leqslant \theta_0$, так, щоб виконувалась нерівність

$$1 - 3C_9\sqrt{\theta_0}\left(C_7 + \sqrt{\theta_0}C_8\right)^3 \eta_1 > 0. \qquad (19)$$

Тоді

$$K(\eta) \leqslant C_{10}, \quad \eta \in [0, \eta_1]. \qquad (20)$$

Завдяки оцінкам (18), (20) з (16), (14), (15) одержуємо

$$|U_x(x,\eta)| \leqslant C_{11} < \infty, \quad (x,\eta) \in [0,h] \times [0,\eta_1], \qquad (21)$$

$$R(\eta) \leqslant C_{12} < \infty, \quad \eta \in [0,\eta_1], \qquad (22)$$

$$|P(\eta)| \leqslant C_{13} < \infty, \quad \eta \in [0,\eta_1]. \qquad (23)$$

Враховуючи рівняння (10), оцінимо $R(\eta)$ знизу

$$R(\eta) \geqslant \left(\min_{[0,\eta_1]}\left(P_1(\eta) + \left(N_2(\eta) - N_1(\eta)\right)^2\right) + \min_{[0,\eta_1]}\left(P_2(\eta) + P_3(\eta)\right)\left(\min_{[0,h]}\varphi'(x) - \right.\right.$$
$$- \int_0^\eta\int_0^h \left(\left|P(\tau)\right| \cdot \left|U_\xi(\xi,\tau)\right| + R(\tau)\left|F(\xi,\tau)\right|\right)\left|G_{1x}(x,\eta,\xi,\tau)\right| d\xi\, d\tau -$$
$$\left.\left. - \int_0^t \left|N_1'(\tau)\right| G_2(x,\eta,0,\tau)\, d\tau - \int_0^t \left|N_2'(\tau)\right| G_2(x,\eta,h,\tau)\, d\tau\right)\right)\left(\max_{[0,\eta_1]} P_4(\eta)\right)^{-1}.$$

Використовуючи оцінки (21)-(23) та умови 1), 2) теореми, отримаємо

$$R(\eta) \geqslant C_{14} - C_{15}\eta - C_{16}\sqrt{\eta}.$$

Зафіксуємо число η_0, $0 < \eta_0 \leqslant \eta_1$, так, щоб виконувалась нерівність

$$C_{14} - C_{15}\eta_0 - C_{16}\sqrt{\eta_0} > 0. \tag{24}$$

Тоді

$$R(\eta) \geqslant C_{17} > 0, \quad \eta \in [0, \eta_0]. \tag{25}$$

Отже, оцінки розв'язків системи (10), (11) визначено. Подальша перевірка виконання умов теореми Шаудера виконується аналогічно до праці [6], що дає існування розв'язку системи рівнянь (10), (11) на проміжку $[0,\eta_0]$, де число η_0 визначається з нерівності (24). Отже, розв'язок задачі (5)-(8) існує на проміжку $[0,\eta_0]$.

Повертаючись до змінної t і невідомих задачі (1)-(4), з (9) одержуємо систему рівнянь стосовно $a(t)$ та $b(t)$:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{R\left(\theta(t)\right)}, \\ b(t) &= a(t)P\left(\theta(t)\right), \quad t \in [0, t_0], \end{aligned} \tag{26}$$

(число t_0 буде визначене нижче).

З першого рівняння системи (26) матимемо

$$\int_0^{\theta(t)} R(z)\, dz = t, \quad t \in [0, t_0]. \tag{27}$$

Застосовуючи оцінку (25) до функції $r(s) = \int_0^s R(z)\, dz$, отримаємо $r(s) \geqslant C_{17}s$, $\lim_{s\to\infty} r(s) = +\infty$ і $r'(s) = R(s)$ – неперервна функція. Це означає, що існує функція $r^{-1}(s)$, обернена до $r(s)$ і визначена на проміжку $[0,\infty)$. Враховуючи це, з (27) матимемо

$$\theta(t) = r^{-1}(t), \quad t \in [0, t_0].$$

Повертаючись до системи (26), знаходимо

$$a(t) = \frac{1}{R\left(r^{-1}(t)\right)}, \quad b(t) = \frac{P\left(r^{-1}(t)\right)}{R\left(r^{-1}(t)\right)}, \quad t \in [0, t_0], \tag{28}$$

тобто розв'язок задачі (1)-(4) існує при $t \in [0, t_0]$.

Визначимо довжину проміжка, на якому існує розв'язок задачі (1)-(4).

Завдяки оцінці (25), зі співвідношення (28) одержуємо

$$a(t) \leqslant \frac{1}{C_{17}}.$$

Тоді з (19) та (24), враховуючи, що $\eta = \theta(t) = \int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau$, отримуємо нерівності, які визначають число t_0:

$$1 - \frac{3C_9\sqrt{T}}{\sqrt{C_{17}^3}}\left(C_7 + C_8\sqrt{\frac{T}{C_{17}}}\right)^3 t_0 > 0, C_{14} - \frac{C_{15}}{C_{17}}t_0 - \frac{C_{16}}{\sqrt{C_{17}}}\sqrt{t_0} > 0.$$

Єдиність розв'язку задачі (1)-(4) визначає теорема 2.

Теорема 2. *Розв'язок задачі (1)-(4) єдиний, якщо виконується умова*

$$\big(\nu_2(t) - \nu_1(t)\big)\int\limits_0^h xf(x,t)\,dx - \big(h\nu_2(t) - \mu_1(t)\big)\int\limits_0^h f(x,t)\,dx \neq 0, \quad t \in [0,T]. \tag{29}$$

Доведення. Оскільки задачі (1)-(4) та (5)-(8) еквівалентні, то з єдиності розв'язку задачі (5)-(8) буде випливати єдиність розв'язку задачі (1)-(4).

Доведемо єдиність розв'язку задачі (5)-(8) від супротивного.

Припускаючи, що $\big(P_i(\eta), R_i(\eta), U_i(x,\eta)\big)$, $i = 1, 2$, – два розв'язки задачі (5)-(8), для їхньої різниці

$$v(x,\eta) = U_1(x,\eta) - U_2(x,\eta), \quad l(\eta) = P_1(\eta) - P_2(\eta), \quad m(\eta) = R_1(\eta) - R_2(\eta)$$

одержуємо

$$v_\eta = v_{xx} + P_2(\eta)v_x + l(\eta)U_{1x}(x,\eta) + m(\eta)F(x,\eta), \quad (x,\eta) \in (0,h)\times(0,\theta_0), \tag{30}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{31}$$

$$v(0,\eta) = 0, \quad v(h,\eta) = 0, \quad \eta \in [0,\theta_0], \tag{32}$$

$$\int\limits_0^h v(x,\eta)\,dx = 0, \quad \int\limits_0^h xv(x,\eta)\,dx = 0, \quad \eta \in [0,\theta_0]. \tag{33}$$

Інтегруючи за x від 0 до h рівняння (30) та рівняння, отримане з (30) множенням на x, враховуючи умови (32), (33), приходимо до системи рівнянь

$$\left\{\begin{array}{rcl} (N_2(\eta) - N_1(\eta))l(\eta) - m(\eta)\int\limits_0^h F(x,\eta)\,dx & = & v_x(0,\eta) - v_x(h,\eta), \\ (hN_2(\eta) - M_1(\eta))l(\eta) - m(\eta)\int\limits_0^h xF(x,\eta)\,dx & = & -hv_x(h,\eta), \end{array}\right. \tag{34}$$

де $v(x,\eta)$ – розв'язок задачі (30)-(32). Записуючи цей розв'язок за допомогою функції Гріна $G(x,\eta,\xi,\tau)$ [7] для рівняння

$$v_\eta = v_{xx} + P_2(\eta)v_x,$$

продиференціюємо його за x; в результаті одержимо:

$$v_x(x,\eta) = \int_0^\eta \int_0^h \big(l(\tau)U_{1\xi}(\xi,\tau) + m(\tau)F(\xi,\tau)\big)G_x(x,\eta,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Якщо виконується умова

$$\big(N_2(\eta) - N_1(\eta)\big)\int_0^h xF(x,\eta)\,dx - \big(hN_2(\eta) - M_1(\eta)\big)\int_0^h F(x,\eta)\,dx \neq 0, \qquad (35)$$

то система рівнянь (34) зводиться до нормального вигляду. Отримана система буде однорідною системою інтегральних рівнянь Вольтери другого роду

$$l(\eta) = \int_0^\eta \big(K_{11}(\eta,\tau)l(\eta) + K_{12}(\eta,\tau)m(\tau)\big)\,d\tau,$$

$$m(\eta) = \int_0^\eta \big(K_{21}(\eta,\tau)l(\eta) + K_{22}(\eta,\tau)m(\tau)\big)\,d\tau, \quad \tau \in [0,\theta_0],$$

з інтегровними ядрами $K_{ij}(\eta,\tau)$, $i,j=1,2$. Звідси випливає, що $l(\eta)\equiv 0$, $m(\eta)\equiv 0$, $\eta\in[0,\theta_0]$, а також $v(x,\eta)\equiv 0$, $(x,\eta)\in[0,h]\times[0,\theta_0]$, тобто розв'язок задачі (5)-(8) єдиний, якщо виконується умова (35). Ця умова при переході до змінної t перетворюється в умову (29). Отже, умова (29) гарантує єдиність розв'язку задачі (1)-(4). Теорему доведено.

1. *Вігак В.М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами // Доп. АН України. – 1994. – № 8. – С. 57-60.

2. *Иванчов Н.И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн. – 1994. – Т. 35. – № 3. – С. 612-621.

3. *Искендеров А.Д.* Регуляризация одной многомерной обратной задачи и ее оптимизационной постановки // Док. АН АзССР. – 1984. – Т.40. – № 9. – С. 11-15.

4. *Музылёв Н.П.* О единственности решения одной обратной задачи нелинейной теплопроводности // Журн. выч. мат. и мат. физики. – 1985. – Т.25. – № 9. – С. 1346-1352.

5. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М., 1970.

6. *Иванчов Н.И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39. – № 3. – С. 539-550.

7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

N. Pabyrivs'ka

INTEGRAL CONDITIONS IN AN INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION

We establish the existence and uniqueness condition for solution of an inverse problem for a parabolic equation with two unknown time-dependent coefficients in the case of integral overdetermination conditions.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.150–156 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.150–156*

УДК 517.9

Сергій Підкуйко

НЕІНТЕГРОВНІ ГАМІЛЬТОНОВІ СИСТЕМИ РЕДУКОВАНОЇ ЗАДАЧІ ТРЬОХ ТІЛ НА ПРЯМІЙ З ПОТЕНЦІАЛОМ ВЗАЄМОДІЇ НАЙБЛИЖЧИХ СУСІДІВ

Розглядається клас гамільтонових систем задачі трьох тіл (частинок, точок) на прямій з потенціалом взаємодії найближчих сусідів. Такі гамільтонові системи описуються гамільтоніанами вигляду

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + V(x_1 - x_2) + W(x_2 - x_3)\,, \tag{1}$$

де x_j, p_j позначають, відповідно, координату та імпульс j-ої точки, а функції V, W – потенціали взаємодії між першою і другою та другою і третьою точками цієї гамільтонової системи.

На функції V, W накладемо такі умови:

I. V, W аналітичні в деяких околах точок a і b, відповідно;

II. $V'(a) = W'(b) = 0$;

III. $V''(a) > 0, \quad W''(b) > 0$. Нехай $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)$ – точка фазового простору гамільтонової системи (1), де $a_1 - a_2 = a, \quad a_2 - a_3 = b$. Тоді гамільтоніан H буде аналітичним в деякому околі цієї точки, і матиме в цій точці локальний мінімум.

Оскільки гамільтонова система (1) має два функціонально незалежних перших інтеграли – сам гамільтоніан (1) і повний імпульс

$$P = p_1 + p_2 + p_3\,, \tag{2}$$

то для повної інтегровності системи (1) досить ще одного додаткового першого інтеграла, функціонально незалежного з H і P, і який перебуває в інволюції з P. (Треба зазначити, що до повного інволютивного набору перших інтегралів функцію P включати не обов'язково, але тоді для повної інтегровності системи (1) потрібно два додаткових перших інтеграли, що перебувають в інволюції і разом з H утворюють функціонально незалежну трійку функцій).

Природно шукати перші інтеграли з того самого класу гладкості, до якого належить сам гамільтоніан H, тобто які задовольняють умову аналітичності в околі точки $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)$.

Визначимо редуковану стосовно повного моменту гамільтонову систему (1). Канонічним перетворенням

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2, \qquad q_1 = (2p_1 - p_2 - p_3)/3,\\ y_2 &= x_2 - x_3, \qquad q_2 = (p_1 + p_2 - 2p_3)/3,\\ y &= x_1 + x_2 + x_3, \quad q = (p_1 + p_2 + p_3)/3, \end{aligned}$$

гамільтонова система (1) зводиться до вигляду

$$J = \frac{3}{2}\, q^2 + (q_1^2 + q_2^2 - q_1\, q_2) + V(y_1) + W(y_2). \tag{3}$$

Гамільтонову систему з гамільтоніаном

$$K = p_1^2 + p_2^2 - p_1\, p_2 + V(a + x_1) + W(b + x_2) \tag{4}$$

називатимемо *редукованою стосовно повного моменту* (2)гамільтоновою системою задачі трьох тіл (частинок, точок) на прямій з потенціалом взаємодії найближчих сусідів.

Правильна така лема.

Лема 1. *Гамільтонова система (1) допускає аналітичний в околі точки* $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)$ *перший інтеграл, який перебуває в інволюції з* P, *і який є функціонально незалежним з* H *і* P, *тоді й лише тоді, коли гамільтонова система (4) допускає аналітичний в околі точки* $(0, 0, 0, 0)$ *перший інтеграл, функціонально незалежний з* K.

У цій праці доведено аналог відомого результату Зігеля [1] (і його узагальнення, доведеного автором [6]) про щільність у класі гамільтонових систем (4) множини неінтегровних гамільтоніанів (з цього ж класу).

Основний результат роботи сформульовано в теоремах, які згідно з лемою 1 є еквівалентними.

Теорема 1. *Нехай* $\{\varepsilon_k\}$ *довільна додатна послідовність, нехай потенціали* V, W *гамільтонової системи (1)задовольняють умови I, II, III.*

Тоді знайдеться такий потенціал $\widetilde{W}$, *що задовольняє умови I, II і III, для якого:*

1)

$$|W^{(k)}(b) - \widetilde{W}^{(k)}(b)| < \varepsilon_k\,, \qquad k = 2, 3, \ldots\,; \tag{5}$$

2) будь-який аналітичний в околі точки $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)$ *перший інтеграл гамільтонової системи*

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(x_1 - x_2) + \widetilde{W}(x_2 - x_3)\,, \tag{6}$$

який перебуває в інволюції з P, *є функцією від* $\widetilde{H}$ *і* P.

Теорема 2. *Нехай* $\{\varepsilon_k\}$ *довільна додатна послідовність, і нехай потенціали* V, W *гамільтонової системи (4) задовольняють умови I, II і III.*

Тоді знайдеться такий потенціал $\widetilde{W}$, *що задовольняє умови I, II і III, для якого:*

1)

$$|W^{(k)}(b) - \widetilde{W}^{(k)}(b)| < \varepsilon_k\,, \qquad k = 2, 3, \ldots\,; \tag{7}$$

2) будь-який аналітичний в околі точки $(0, 0, 0, 0)$ *перший інтеграл гамільтонової системи*

$$\widetilde{K} = \frac{1}{2}\,(p_1^2 + p_2^2) + V(a + x_1) + \widetilde{W}(b + x_2)\,, \tag{8}$$

є функцією від $\widetilde{K}$.

Доведення теореми 2. Доведення теореми 2 спирається на кілька лем.

Лема 2. *Існує такий потенціал W_1, що задовольняє умови I, II і III, для якого:*
1)

$$|W_1''(b) - W''(b)| < \frac{1}{2}\varepsilon_2, \qquad W_1^{(k)}(b) = W^{(k)}(b), \qquad k = 3, 4, \dots; \tag{9}$$

2) існує лінійне канонічне перетворення змінних $(x_1, x_2, p_1, p_2) \mapsto (u_1, u_2, v_1, v_2)$, яке квадратичну частину K_2 гамільтонової системи з гамільтоніаном

$$K = p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2 + V(a + x_1) + W_1(b + x_2) \tag{10}$$

зводить до нормальної форми

$$E_2 = \lambda_{11} u_1 v_1 + \lambda_{12} u_2 v_2, \tag{11}$$

де коефіцієнти λ_{11}, λ_{12} – чисто уявні та раціонально незалежні.

Доведення леми 2. Введемо позначення

$$c_0 = V''(a), \quad d_0 = W''(b). \tag{12}$$

Відомо [1], що стовпці матриці такого канонічного перетворення є власними векторами матриці лінійної частини канонічних рівнянь Гамільтона, яка в нашому випадку має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -c_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_0^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристичний многочлен цієї матриці має вигляд

$$\lambda^4 + \lambda^2 (c_0^2 + d_0^2) + 3 c_0^2 d_0^2.$$

Звідси знаходимо власні значення

$$\pm i \sqrt{c_0^2 + d_0^2 \pm \sqrt{c_0^4 - c_0^2 d_0^2 + d_0^4}}.$$

Підставимо замість d_0 в матрицю параметр d і розглянемо власні значення матриці як функції від d:

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(d) = i \sqrt{c_0^2 + d^2 \pm \sqrt{c_0^4 - c_0^2 d^2 + d^4}}. \tag{13}$$

Оскільки

$$\frac{\lambda_1(d)}{\lambda_2(d)} = \frac{c_0^2 + d^2 + \sqrt{c_0^4 - c_0^2 d^2 + d^4}}{\sqrt{3}\, c_0\, d}, \tag{14}$$

то в околі $(d_0 - \varepsilon_2/2,\ d_0 + \varepsilon_2/2)$ знайдеться таке d_1, що $\dfrac{\lambda_1(d_1)}{\lambda_2(d_1)}$ – ірраціональне число. Тоді

$$\lambda_{11} = \lambda_1(d_1), \qquad \lambda_{12} = \lambda_2(d_1).$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $d_1 > c_0$ і ε_2 настільки мале (якщо потрібно, то його можна зменшити), що $d_1 - \varepsilon_2/2 > c_0$ і

$$\left| \frac{\lambda_2(d)}{\lambda_2(d_1)} \right| < 2, \qquad \forall d \in [d_1 - \varepsilon_2/2,\ d_1 + \varepsilon_2/2]. \tag{15}$$

Введемо позначення:

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{1,2}(d) = \left(c_0^2 + d^2 \pm \sqrt{c_0^4 - c_0^2\, d^2 + d^4} \right)^{1/4} .$$

Тоді

$$x_2 = \frac{\alpha_1(d)}{2d}\, u_1 + \frac{\alpha_2(d)}{2d}\, u_2 + i\, \frac{\alpha_1(d)}{2d}\, v_1 + i\, \frac{\alpha_2(d)}{2d}\, v_2 . \tag{16}$$

Нехай

$$\beta = \min \left\{ \left| \frac{\alpha_1(d)}{2d} \right|, \left| \frac{\alpha_2(d)}{2d} \right| \Big/ d \in [d_1 - \varepsilon_2/2,\, d_1 + \varepsilon_2/2] \right\} . \tag{17}$$

Тоді $\beta > 0$.

Визначимо додатну послідовність $\{\epsilon_n\}$:

$$\epsilon_n = \varepsilon_n\, \frac{\beta^n}{n!} , \qquad n = 3, 4, \ldots , \tag{18}$$

а ϵ_2 настільки мале, що

$$\frac{|\lambda_{11}| \pm \epsilon_2}{|\lambda_{12}|} \in \left(\frac{\lambda_1(d_1 - \varepsilon_2/2)}{\lambda_2(d_1 - \varepsilon_2/2)} ,\, \frac{\lambda_1(d_1 + \varepsilon_2/2)}{\lambda_2(d_1 + \varepsilon_2/2)} \right) . \tag{19}$$

Згідно з [1] виберемо два цілих числа q, r, що задовольняють нерівності,

$$q > 1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} + 2\, |\lambda_{12}|\, {\epsilon_2}^{-1} , \tag{20}$$

$$\left| q\, \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} + r \right| < 1 , \tag{21}$$

і визначимо три послідовності $\{q_m\}, \{r_m\}, \{l_m\}$, $(m = 1, 2, \ldots)$:

$$l_m = q_m + |r_m| , \tag{22}$$

$$r_m = q_m \left(\frac{r}{q} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{q_k} \right) , \tag{23}$$

$$q_1 = q^2 , \tag{24}$$

де q_{m+1} є найменшим цілим степенем q, що задовольняє нерівність

$$q_{m+1} > q_m^2 + 4\, |\lambda_{12}|\, {\epsilon_{l_m}}^{-1}\, {l_m}^{m l_m} . \tag{25}$$

Нехай

$$\widetilde{\lambda}_2 = \lambda_{12} , \qquad \widetilde{\lambda}_1 = \lambda_{12} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_m} - \frac{r}{q} \right) . \tag{26}$$

Тоді

1) послідовність $\{l_m\}$ строго зростає, $l_1 \geqslant 4$;
2) числа $\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2$ є чисто уявними та раціонально незалежними, $|\widetilde{\lambda}_1 - \lambda_{11}| < \epsilon_2$;
3) правильна оцінка

$$q_m\, |\widetilde{\lambda}_1\, q_m + \widetilde{\lambda}_2\, r_m|^{-1}\, \epsilon_{l_m} > 2\, {l_m}^{m l_m} , \qquad m = 1, 2, \ldots . \tag{27}$$

Лема 3. *Існує такий потенціал W_2, що задовольняє умови I, II і III, для якого:*
1)

$$|W_2''(b) - W''(b)| < \varepsilon_2, \qquad W_2^{(k)}(b) = W^{(k)}(b), \qquad k = 3, 4, \dots; \tag{28}$$

2) існує лінійне канонічне перетворення змінних $(x_1, x_2, p_1, p_2) \mapsto (u_1, u_2, v_1, v_2)$, яке квадратичну частину K_2 гамільтонової системи з гамільтоніаном

$$K = p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2 + V(a + x_1) + W_2(b + x_2) \tag{29}$$

зводить до нормальної форми

$$E_2 = \lambda_{21} u_1 v_1 + \lambda_{22} u_2 v_2, \tag{30}$$

де коефіцієнти λ_{21}, λ_{22} – чисто уявні та раціонально незалежні, і задовольняють такі умови:

$$\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}} = \frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_2}, \qquad \left|\frac{\lambda_{22}}{\widetilde{\lambda}_2}\right| < 2. \tag{31}$$

Доведення леми 3. Згідно з (19) і внаслідок неперервності функції $\dfrac{\lambda_1(d)}{\lambda_2(d)}$

$$\exists\, d_2 \in (d_1 - \varepsilon_2/2,\, d_1 + \varepsilon_2/2): \qquad \frac{\lambda_1(d_2)}{\lambda_2(d_2)} = \frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_2}. \tag{32}$$

Візьмемо

$$W_2''(b) = d_2, \quad \lambda_{21} = \lambda_1(d_2), \quad \lambda_{22} = \lambda_2(d_2).$$

Оцінка (28) випливає з леми 2, а оцінка (31) випливає з (15).

Позначимо гамільтоніан K, записаний у нових змінних (u_1, u_2, v_1, v_2), через E. Гамільтоніан E задовольняє систему канонічних рівнянь Гамільтона

$$\dot{u}_k = E_{v_k}, \quad \dot{v}_k = -E_{u_k}, \qquad k = 1, 2. \tag{33}$$

В околі точки $(0, 0, 0, 0)$ його можна розкласти в ряд Тейлора

$$E = \sum_{n=2}^{\infty} E_n, \tag{34}$$

де E_n позначає однорідну степеня n компоненту степеневого ряду E.

Гамільтоніан $\widetilde{K}$, записаний у нових змінних, позначимо через $\widetilde{E}$. Тоді

$$\widetilde{E} = \sum_{n=2}^{\infty} \widetilde{E}_n.$$

Крім того, введемо таке позначення: для однорідного многочлена G від кількох змінних через $\overline{|G|}$ позначатимемо абсолютну величину максимального за модулем коефіцієнта многочлена G.

Відомо [1], що існує такий ("біркгофівський") перший інтеграл s гамільтонової системи (33),

$$s = u_1 v_1 + \sum_{n=3}^{\infty} s_n, \tag{35}$$

без членів вигляду

$$c\prod_{k=1}^{n}(u_k\,v_k)^{\alpha_k}\,,\qquad \alpha_1+\cdots+\alpha_n>1\,,\tag{36}$$

що кожен перший інтеграл системи (33) є рядом за степенями $E,\ s$.

Потрібно зазначити, що степеневий ряд s є загалом розбіжний.

Позначимо через $\widetilde{s}$ відповідний ("біркгофівський") інтеграл гамільтонової системи з гамільтоніаном $\widetilde{E}$.

Лема 4. *Існує такий потенціал* $\widetilde{W}$, *що задовольняє умови I, II і III, для якого*

$$\widetilde{W}''(b)=W_2''(b),\tag{37}$$

$$\widetilde{W}^{(n)}(b)=W^{(n)}(b)\,,\qquad n\notin\{l_m\,/\,m=1,2,\ldots\},\tag{38}$$

$$\widetilde{W}^{(l_m)}(b)=W^{(l_m)}(b)\pm\frac{1}{2}\,\varepsilon_{l_m}\,,\qquad m=1,2,\ldots.\tag{39}$$

До того ж у (39) знаки $(+)$ *або* $(-)$ *можна вибрати так, що*

$$\overline{|\widetilde{s}_{l_m}|}>\frac{1}{2}\,{l_m}^{m l_m}\,,\qquad m=1,2,\ldots.\tag{40}$$

Доведення леми 4. Оскільки $\widetilde{s}$ є першим інтегралом гамільтонової системи з гамільтоніаном $\widetilde{E}$, то його дужка Пуассона з $\widetilde{E}$ дорівнює нулю,

$$\{\widetilde{s},\,\widetilde{E}\}=0\,.$$

Звідси отримуємо

$$\lambda_{21}\left(u_1\frac{\partial\widetilde{s}_l}{\partial u_1}-v_1\frac{\partial\widetilde{s}_l}{\partial v_1}\right)+\lambda_{22}\left(u_2\frac{\partial\widetilde{s}_l}{\partial u_2}-v_2\frac{\partial\widetilde{s}_l}{\partial v_2}\right)=$$

$$=u_1\frac{\partial\widetilde{E}_l}{\partial u_1}-v_1\frac{\partial\widetilde{E}_l}{\partial v_1}-\sum_{k=2}^{l}\{\widetilde{s}_k,\,\widetilde{E}_{l+2-h}\}=0\,,\qquad l=3,4,\ldots.\tag{41}$$

Позначимо $s_{m_1m_2n_1n_2}u_1^{m_1}u_2^{m_2}v_1^{n_1}v_2^{n_2}$, $E_{m_1m_2n_1n_2}u_1^{m_1}u_2^{m_2}v_1^{n_1}v_2^{n_2}$, $\quad m_1+m_2+n_1+n_2=l$, відповідні одночлени поліномів $\widetilde{s}_l,\ \widetilde{E}_l$. Тоді вираз

$$s_{m_1m_2n_1n_2}-\frac{m_1-n_1}{\lambda_{21}\,(m_1-n_1)+\lambda_{22}\,(m_2-n_2)}\,E_{m_1m_2n_1n_2}\tag{42}$$

залежить лише від m_1,m_2,n_1,n_2 і коефіцієнтів поліномів $\widetilde{s}_k,\widetilde{E}_k,\quad k=3,4,\ldots l-1$. Для $l=l_m$ приймемо

$$m_1=q_m\,,\quad m_2=r_m\,,\quad n_1=0\,,\quad n_2=0\,,\quad \text{коли}\quad r_m\geqslant 0\,,\tag{43}$$

$$m_1=q_m\,,\quad m_2=0\,,\quad n_1=0\,,\quad n_2=r_m\,,\quad \text{коли}\quad r_m<0\,,\tag{44}$$

і відповідні коефіцієнти поліномів $\widetilde{s}_{l_m},\ \widetilde{E}_{l_m}$ позначимо $\widetilde{\sigma}_m,\ \widetilde{\eta}_m$.

Якщо тепер для $\widetilde{W}^{(l_m)}(b)$ вибрати два значення

$$\widetilde{W}^{(l_m)}(b)=W^{(l_m)}(b)\pm\frac{1}{2}\,\varepsilon_{l_m}\,,\tag{45}$$

ми отримаємо два значення для $\widetilde{\eta}_m$ і відповідні два значення для $\widetilde{\sigma}_m$, які будуть відрізнятися на величину, модуль якої дорівнює:

$$q_m \left|\lambda_{21} q_m + \lambda_{22} r_m\right|^{-1} \left|\frac{\alpha_1(d_2)}{2d_2}\right|^{q_m} \left|\frac{\alpha_2(d_2)}{2d_2}\right|^{r_m} \frac{(q_m)!\,(r_m)!}{(l_m)!} \varepsilon_2 \,, r_m \geqslant 0 \,,$$

$$q_m \left|\lambda_{21} q_m + \lambda_{22} r_m\right|^{-1} \left|\frac{\alpha_1(d_2)}{2d_2}\right|^{q_m} \left|\frac{\alpha_2(d_2)}{2d_2}\right|^{-r_m} \frac{(q_m)!\,(-r_m)!}{(l_m)!} \varepsilon_2 \,, r_m < 0 \,.$$

Використовуючи (16), (17), (18), (31) і (27), цю величину в обох випадках можна оцінити знизу величиною

$$q_m \frac{1}{2} \left|\widetilde{\lambda}_1 q_m + \widetilde{\lambda}_2 r_m\right|^{-1} \epsilon_2 > (l_m)^{ml_m} \,. \tag{46}$$

Отже, в (45) знак можна вибрати так, що

$$|\widetilde{\sigma}_m| > \frac{1}{2} l_m{}^{ml_m} \,. \tag{47}$$

З лем 2, 3 і 4 випливає, що $\widetilde{W}$ задовольняє нерівності (7) першого твердження теореми 2, а згідно з [1, лема 4] гамільтоніан (4) задовольняє друге твердження теореми 2.

---

1. *Carl Ludwig Ziegel.* On the integrals of canonical systems// Ann. of Math. – 1941. – Vol. 42. – N 2. – P. 806-822.
2. *Carl Ludwig Ziegel.* Uber die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleichgewichtslosung// Math. Ann. – 1954. – Vol. 128. – P. 144-170.
3. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М., 1974.
4. *Брюно А.Д.* Нормальная форма системы, близкой к гамильтоновой// Мат. заметки. – 1990. – Т. 48. – N 5. – С. 35-46.
5. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Успехи мат. наук. – 1983. – Т. 38. – N 1. – С. 3-67.
6. *Пидкуйко С.И.* О плотности множества неинтегрируемых гамильтонианов // Изв. Росс. Акад. Наук. Сер. Мат. – 1992. Т. 56. – N 4. – С.863-876.
7. *Пидкуйко С.И.* О массивности множества неинтегрируемых гамильтонианов// Мат. сб. – 1994. – Т. 185. – N 12. – С. 101-122.

S. Pidkuyko

ON DENSENESS OF NONINTEGRABLE HAMILTONIAN SYSTEMS CLOSE TO BILLIARDS

The class of Hamiltonian systems, close to billiard systems, is considered. It is proved that nonintegrable Hamiltonian systems in that class make up an everywhere dense subset (some analog of famous Ziegel theorem).

Стаття надійшла до редколегії 30.03.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.157–169

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.157–169

УДК 517.95

Наталія Процах

ВНУТРІШНЯ ГЛАДКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ З ВИРОДЖЕННЯМ

Коректність задачі Коші для параболічних систем вищих порядків з виродженням за змінною t на початковій гіперплощині досліджено у працях [1 – 5]. Знаходженню класичного розв'язку задачі Коші для гіперболічного рівняння другого порядку з виродженням присвячена праця [6]. Еволюційні системи вищих порядків за просторовими змінними та другого порядку за часовою змінною з виродженням при $t = 0$, які, як частковий випадок, містять гіперболічні рівняння другого порядку вивчено у працях [7,8] .

У цій статті наведено результати дослідження гладкості узагальненого розв'язку для однієї еволюційної системи вищого порядку, яка вироджується на початковій гіперплощині. Частковим випадком запропонованої системи є деякі системи параболічного та гіперболічного типів. Єдиність розв'язку для зазначеної системи доведено у працях [9,10], існування – у статті [11].

Формулювання задач

Задача 1. Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega_\tau = Q \bigcap \{t = \tau\}$. Позначимо через $S = \partial\Omega \times (0,T)$. Припустимо, що $\partial\Omega \in C^1$.

Розглянемо в області Q систему рівнянь

$$(\Phi(x,t)u_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t) D^\alpha u) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} C_\alpha(x,t) D^\alpha u_t = \sum_{|\alpha|\leqslant p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t) \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$D^\alpha u\Big|_S = 0, \quad |\alpha| \leqslant l-1, \qquad (2)$$

де $l \geqslant m$; $m \geqslant 1$; $0 \leqslant p \leqslant m$; Φ, $A_{\alpha\beta}$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant m$, $B_{\alpha\beta}$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant l$, $G_\alpha, 1 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, C_α, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant l$ – квадратні матриці порядку N; $u = \mathrm{colon}(u_1, ..., u_N)$; $F_\alpha = \mathrm{colon}(F_{\alpha_1}, ..., F_{\alpha_N})$, $|\alpha| \leqslant p$; $x = (x_1, .., x_n)$;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Припустимо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються такі умови.

Умова (Φ_0). $\Phi \in L^\infty(Q)$; $(\Phi(x,t)\xi, \xi) \geqslant \varphi(t)|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, де $\varphi \in C([0,T])$; $\varphi(0) = 0$; $\varphi(t) > 0$, $t \in (0,T]$; $\varphi' \in C((0,T])$; $\varphi'(t) \geqslant 0$, $t \in (0,T]$; $\Phi(x,t) = \Phi^*(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$.

Умова (Φ_1). $\Phi_t \in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$ $\forall\varepsilon > 0$; $(\Phi_t(x,t)\xi,\xi) \geqslant \varphi_1(t)|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $\forall\xi \in \mathbb{R}^N$, де $\varphi_1 \in C((0,T])$; $\varphi_1(t) \geqslant 0$, $t \in [0,T]$, $Q_{\varepsilon,T} = \Omega \times (\varepsilon, T)$.

Умова (A_0). $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta t}$, $A_{\alpha\beta x_k}$, $A_{\alpha\beta x_k t} \in L^\infty(Q)$, $k = 1,\dots,n$;

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)\,dx \geqslant a_0 \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2\,dx, \quad a_0 > 0$$

для майже всіх $t \in (0,T)$, $\forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$; $A_{\alpha\beta}(x,t) = A_{\beta\alpha}(x,t)$, $A_{\alpha\beta}(x,t) = A^*_{\beta\alpha}(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $|\beta| = |\alpha| \leqslant m$.

Умова (B_0). $B_{\alpha\beta} \in L^\infty(Q)$; $B_{\alpha\beta} = B^*_{\alpha\beta}$

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)\,dx \geqslant b_0\psi(t) \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2\,dx, \quad b_0 > 0$$

для майже всіх $t \in (0,T)$, $\forall v \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega)$; $\psi \in C([0,T])$; $\psi(0) \geqslant 0$; $\psi(t) > 0$, $\forall t \in (0,T]$.

Тут $\overset{\circ}{H}{}^k(\Omega)$ – замикання простору функцій $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою простору $H^k(\Omega)$.

Введемо простори функцій $H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}(Q)$, $H^{l+1,1}_{0,\varphi,\psi}(Q)$, $H^{l,2}_{0,\varphi,\psi}(Q)$ як замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q}$, які дорівнюють нулю в околі S за нормами

$$\|u\|^2_{l,1} = \int\limits_Q \Big(\varphi(t)|u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2\Big)\,dx\,dt;$$

$$\|u\|^2_{l+1,1} = \int\limits_Q \Big(\varphi(t)|u_{x_k t}|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_{x_k}|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_{x_k t}|^2\Big)\,dx\,dt; \ k = 1,\dots,n;$$

$$\|u\|^2_{l,2} = \int\limits_Q \Big(\varphi(t)|u_{tt}|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_t|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_{tt}|^2\Big)\,dx\,dt.$$

відповідно. Позначимо через $H^{l,1}_{0,\varphi,\psi,\mathrm{loc}}(Q)$ – множину функцій з простору $H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}(Q')$ для кожної строго внутрішньої підобласті Q' області Q.

Розглянемо початкові умови

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \sqrt{\varphi(t)}\,u_t(x,t) = 0. \tag{3}$$

Вкористовуватимемо оцінку Фрідріхса [12, с.50]

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha v|^2\,dx \leqslant \gamma_{k,j}(t) \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha v|^2\,dx, \quad j = 0,\dots,k,$$

яка справджується для функцій $v \in \overset{\circ}{H}{}^k(\Omega)$.

Позначимо:

$$\alpha_0 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \frac{\varphi_1(t)}{\psi(t)}; \quad \Gamma_k(t) = \sum_{j=1}^k \gamma_{k,j}(t); \quad \beta_0 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \frac{\Gamma_l(t)c_0(t)}{2b_0};$$

$$\omega(t)=\begin{cases}\psi(t), & \text{якщо } \alpha_0=0\\ \varphi_1(t), & \text{якщо } \alpha_0>0\end{cases};\quad \nu_1=\inf_{[0,T]}\sup_{[0,\tau]}\left[\beta_0\omega(t)-\frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)}\right];$$

$$\nu_2=\inf_{[0,T]}\sup_{[0,\tau]}\left[\beta_0\omega(t)-3\frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)}\right];\quad c_i(t)=\sup_{Q_t}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}\frac{\|C^{(i)}_{\alpha t}(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)\omega(\tau)\psi(\tau)};$$

$$g_i(t)=\sup_{Q_t}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\frac{\|G^{(i)}_{\alpha t}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\varphi'(\tau)};i=0,1.\quad c^1(t)=\sup_{Q_t}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}\frac{\|C_{\alpha x_k}(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)\omega(\tau)\psi(\tau)};$$

$$g_0(t)=\sup_{Q_t}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\frac{\|G_{\alpha x_k}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\varphi'(\tau)};\quad b^1(t)=\sup_{Q_t}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\frac{\|B_{\alpha\beta x_k}(x,\tau)\|^2}{(\psi(\tau))^2};$$

$$b_i(t)=\sup_{Q_t}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\frac{\|B^{(i)}_{\alpha\beta t}(x,\tau)\|^2}{(\psi(\tau))^2};\ i=0,1;\quad c_{01}(t)=\sup_{Q_t}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}\frac{\|C_{\alpha}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\psi(\tau)};$$

$$g_{01}(t)=\sup_{Q_t}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\frac{\|G_{\alpha}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)};\quad c^1_{01}(t)=\sup_{Q_t}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}\frac{\|C_{\alpha x_k}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\psi(\tau)};$$

$$g^1_{01}(t)=\sup_{Q_t}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\frac{\|G_{\alpha x_k}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)};\qquad \frac{\|\Phi_{x_k}\|^2}{(\omega(t))^2}\leqslant\omega_0^2(t);$$

$$\max\left\{b^1(t),c^1(t),c_0(t),b_0(t),g^1(t),g_0(t)\right\}\leqslant\omega^1(t);\max\left\{b_1(t),c_1(t),g_1(t)\right\}\leqslant\omega_1(t);$$

$$\max\left\{b^1(t),c^1_{01}(t),c_{01}(t),b_0(t),g^1_{01}(t),g_{01}(t)\right\}\leqslant\omega^1_0(t);\ \frac{\|\Phi_{x_k}\|^2}{(\varphi')^2\omega(t)}\leqslant\omega^2(t)\ :$$

$$\varkappa_1=\begin{cases}\nu_1+\delta_0, & \text{якщо } \nu_1\geqslant 0\\ 0, & \text{якщо } \nu_1<0\end{cases},\quad \varkappa_2=\begin{cases}\nu_2+\delta_0, & \text{якщо } \nu_2\geqslant 0\\ 0, & \text{якщо } \nu_2<0\end{cases},\qquad \delta_0>0,$$

$$M_0=[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1\eta}\left[\int\limits_{Q''_\tau}\frac{1}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1\eta}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\left(\frac{|F_{\alpha x_s}(x,t)|^2}{\psi(t)}+\omega^2(t)\frac{|F_{\alpha_t}(x,t)|^2}{\psi(t)}\right)dx\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{Q_\tau}\frac{\omega^1(t)+2+\omega^2(t)\left(\omega_1(t)+\left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2\right)}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1\eta}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}\,dx\,dt\right],\quad s=1,\dots,n.$$

Зауваження 1. Для функції u можна довести оцінки:

$$\|u\|^2_{l,1}\leqslant M_2[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1}\int\limits_Q\frac{1}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}\,dxdt\ ;$$

$$\|u\|^2_{l,2}\leqslant M_2[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1}\int\limits_Q\frac{\omega_1(t)+\left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}\,dxdt+$$

$$+M_3[\varphi(\tau)]^{\varkappa_2}\int\limits_Q\frac{1}{[\varphi(t)]^{\varkappa_2}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_{\alpha_t}(x,t)|^2}{\psi(t)}\,dxdt.$$

Задача 2. Розглянемо мішану задачу для системи рівнянь (1) з крайовими умовами

$$D^{\alpha}u\Big|_{S} = 0, \qquad |\alpha| \leqslant m-1, \tag{4}$$

де $1 \leqslant l \leqslant m$; $p \leqslant m$, та початковими умовами (3). Припустимо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються такі самі умови, як і в задачі 1 при $\varphi(t) = t^{\lambda}$.

Внутрішня гладкість розв'язку

Теорема. *Нехай коефіцієнти системи (1) задовольняють умови* $(\Phi_0), (\Phi_1), (A_0), (B_0)$, G_α $(1 \leqslant |\alpha| \leqslant m)$, $C_\alpha (1 \leqslant |\alpha| \leqslant l) \in L^{\infty}(Q_{\varepsilon,\tau})$, $\forall \varepsilon > 0$. $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, C_α, G_α, $A_{\alpha\beta x_s}, B_{\alpha\beta x_s} C_{\alpha x_s}, G_{\alpha x_s}$ *– неперервні за змінними* x_s, $s = 1, ..., n$; $\omega^1, \omega^2, \omega_0$ *– монотонно незростаючі функції. Якщо, крім того, виконується одна з умов:*

1) ω^1, ω_1, $\omega^2 \in L^{\infty}(0,T)$; $\nu_1 < +\infty, \nu_2 < +\infty, M_0 < +\infty$ *при* $\eta = 1$;

2) $\alpha = 0$; ω_0^1, $\omega_0^2 \in L^{\infty}(0,T)$; $M_0 < +\infty$ *при* $\eta = 0$,

$$\inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \sqrt{\Gamma_l(t) c_{01}(t) \gamma_{l,0}(t)} < 2b_0.$$

Тоді існують узагальнені похідні $D^{\alpha}u_{x_s}$ *та* $D^{\alpha}u_{x_s t}$ *в* Q *для задачі 1 і виконується оцінка:*

$$\int_{Q''_\tau} \left[\varphi(\tau)|u_{x_s t}|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^{\alpha}u_{x_s}|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^{\alpha}u_{x_s t}|^2 \right] dx\,dt \leqslant M_4 M_0, \tag{5}$$

де M_4 *- стала.*

Доведення. Нехай Ω' і Ω'' – довільні строго внутрішні підобласті області Ω. $Q' = \Omega' \times (0,T)$; $Q'' = \Omega'' \times (0,T)$. Підобласті Ω' та Ω'' вибрані так, щоб $Q' \subset Q'' \subset Q$. Позначимо через $\delta > 0$ відстань між межами $\partial\Omega'$ і $\partial\Omega''$, через Ω_δ – множину, яка містить всі точки області Ω, які знаходяться на відстані більшій за δ від межі області Ω, $Q_\delta = \Omega_\delta \times (0,T)$. Розглянемо функцію $\xi(x)$, яка володіє такими властивостями: $\xi(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n), \xi(x) \equiv 1$ в Q''_δ (а, отже, і в Q'), $\xi(x) \equiv 0$ в $Q \setminus Q''_{\frac{2\delta}{3}}$.

Нехай $U(x,t) = \xi(x)u(x,t)$, $u \in \overset{\circ}{H}{}^{l,2}_{0,\varphi,\psi}(Q)$. Обчислимо $L[U]$, де через $L[u]$ позначена ліва частина системи рівнянь (1). Тоді

$$L[U] = \sum_{|\beta|=|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{\beta} D^{\alpha}(A_{\alpha\beta}(x,t) D^{\beta-i}(D\xi D^{i-1}u)) +$$

$$+ \sum_{|\beta|=|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{\alpha} D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}(A_{\alpha\beta}(x,t) D^{\beta}u)) +$$

$$+ \sum_{|\beta|=|\alpha|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{\beta} D^{\alpha}(B_{\alpha\beta}(x,t) D^{\beta-i}(D\xi D^{i-1}u_t)) +$$

$$+ \sum_{|\beta|=|\alpha|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{\alpha} D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}(B_{\alpha\beta}(x,t) D^{\beta}u_t)) +$$

$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} G_\alpha(x,t) \sum_{i=1}^{\alpha} D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}u) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} C_\alpha(x,t) \sum_{i=1}^{\alpha} D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}u_t) +$$

$$+\xi\sum_{|\alpha|\leqslant p}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}F_{\alpha}(x,t). \tag{6}$$

Функція U належить простору $H^{l,2}_{0,\varphi,\psi}(Q'')$, обертається в нуль в $Q\setminus Q''_{\frac{2\delta}{3}}$ і дорівнює функції u в Q''_{δ}. Виберемо функцію $v_1\in H^{l,2}_{0,\varphi,\psi}(Q'')$ і продовжимо її нулем ззовні Q''. Для довільного h, $0<|h|<\frac{\delta}{2}$ розглянемо кінцево-різницеве відношення

$$\delta^k_h g(x,t)=\frac{g(x_1,...,x_{k-1},x_k+h,x_{k+1},...,x_n,t)-g(x,t)}{h}, \tag{7}$$

$k=1,...,n$, де g – фінітна в Q функція, яка належить $L_2(Q)$. Позначимо через $x'=(x_1,...,x_{k-1},x_k+h,x_{k+1},...x_n)$. Кінцево-різницеве відношення $\delta^k_{-h}v_1(x)$ є функцією з $H^{l,2}_{0,\varphi,\psi}(Q''_{\frac{\delta}{2}})\cap L_2(Q'')$.

Домножимо (6) на функцію $\delta^k_{-h}v_1(x,t)e^{-\nu t}$ і зінтегруємо по Q''. До одержаної системи рівнянь застосуємо формулу "інтегрування частинами" [13, с. 119]:

$$\int_Q(\delta^k_h f,g)\,dx\,dt=-\int_Q(f,\delta^k_{-h}g)\,dx\,dt, \tag{8}$$

яка правильна для довільних фінітних в Q функцій f і g, які належать $L_2(Q)$ та рівність [13, с. 220]

$$\delta^k_h(fg)=g\delta^k_h f+f\delta^k_h g.$$

Після цих перетворень з рівності (6) одержимо систему рівнянь:

$$\int_{Q''_\tau}\left(\left(\delta^k_h\Phi(x,t)U_t(x',t)\right)_t+\left(\Phi(x',t)\delta^k_h U_t\right)_t,v_1\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int_{Q''_\tau}\left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(\delta^k_h A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}U(x',t)+A_{\alpha\beta}(x',t)D^{\beta}\delta^k_h U),D^{\alpha}v_1\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int_{Q''_\tau}\left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(\delta^k_h B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}U_t(x',t)+B_{\alpha\beta}(x',t)D^{\beta}\delta^k_h U_t),D^{\alpha}v_1\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int_{Q''_\tau}\left(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}(\delta^k_h G_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}U(x',t)+G_{\alpha\beta}(x',t)D^{\alpha}\delta^k_h U),v_1\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int_{Q''_\tau}\left(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(\delta^k_h C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}U_t(x',t)+C_{\alpha}(x',t)D^{\alpha}\delta^k_h U_t),v_1\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt=$$

$$=\int_{Q''_\tau}\left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}\sum_{i=1}^{\beta}\delta^k_h A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta-i}(D\xi D^{i-1}u)(x',t),D^{\alpha}v_1\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int_{Q''_\tau}\left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}\sum_{i=1}^{\beta}A_{\alpha\beta}(x',t)D^{\beta-i}(\delta^k_h D\xi D^{i-1}u+D\xi D^{i-1}\delta^k_h u),D^{\alpha}v_1\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int_{Q''_\tau}\left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}\sum_{i=1}^{\alpha}\delta^k_h D\xi D^{i-1}(A_{\alpha\beta}D^{\beta}u)(x',t),D^{\alpha-i}v_1\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}\sum_{i=1}^{\alpha}D\xi(x')D^{i-1}(\delta_h^kA_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u(x',t)),D^{\alpha-i}v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}\sum_{i=1}^{\alpha}D\xi(x')D^{i-1}(A_{\alpha\beta}(x',t)D^\beta\delta_h^ku),D^{\alpha-i}v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\beta}\delta_h^kB_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta-i}(D\xi D^{i-1}u_t)(x',t),D^\alpha v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\beta}(B_{\alpha\beta}(x',t)D^{\beta-i}(\delta_h^kD\xi D^{i-1}u_t+D\xi(x')D^{i-1}\delta_h^ku_t),D^\alpha v_1)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\alpha}\delta_h^kD\xi D^{i-1}(B_{\alpha\beta}D^\beta u_t)(x',t),D^{\alpha-i}v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\alpha}D\xi(x')D^{i-1}(\delta_h^kB_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t(x',t)),D^{\alpha-i}v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\alpha}D\xi(x')D^{i-1}(B_{\alpha\beta}(x',t)D^\beta\delta_h^ku_t),D^{\alpha-i}v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\delta_h^kG_\alpha(x,t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}u)(x',t),v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}G_\alpha(x',t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(\delta_h^kD\xi D^{i-1}u+D\xi(x')D^{i-1}\delta_h^ku),v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}\delta_h^kC_\alpha(x,t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}u_t)(x',t),v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}C_\alpha(x',t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(\delta_h^kD\xi D^{i-1}u_t+D\xi(x')D^{i-1}\delta_h^ku_t),v_1\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant p}F_\alpha(x',t),D^\alpha(\delta_h^k\xi v_1)\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant p}\delta_h^kF_\alpha(x,t),D^\alpha(\xi v_1)\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt\;. \tag{9}$$

Виберемо $v_1=\delta_h^kU_t$. Підставимо цю функцію в (9) і оцінимо кожний з одержаних доданків окремо:

$$\tau_1=\int\limits_{Q''_\tau}\Big(\big(\delta_h^k\Phi(x,t)U_t(x',t)\big)_t+\big(\Phi(x',t)\delta_h^kU_t\big)_t,\delta_h^kU_t\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt\geqslant$$

$$-\int\limits_{Q''_\tau}\left(\frac{\|\delta_h^k\Phi U_{tt}(x',t)\|^2\varphi'(t)}{2\delta_1(\varphi'(t))^2\omega(t)}+\frac{\|\delta_h^k\Phi_t U_t(x',t)\|^2\varphi'(t)}{2\delta_1(\varphi'(t))^2\omega(t)}+\delta_1\varphi'(t)\omega(t)|\delta_h^k U_t|^2\right)e^{-\nu t}dx\,dt+$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega''_\tau}\varphi(\tau)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu\tau}\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{Q''_\tau}\varphi_1(t)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt+\frac{\nu}{2}\int\limits_{Q''_\tau}\varphi(t)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt;$$

$$\tau_2=\int\limits_{Q''_\tau}\left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}\left(\delta_h^k A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta U(x',t)+A_{\alpha\beta}(x',t)D^\beta\delta_h^k U\right),D^\alpha\delta_h^k U_t\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt$$

$$\geqslant-\frac{a_2^2}{2\delta_2}\Gamma_m(\tau)\int\limits_{\Omega''_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha U|^2e^{-\nu\tau}\,dx-\left(\delta_2\Gamma_m(\tau)-\frac{a_0}{2}\right)\int\limits_{\Omega''_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2e^{-\nu\tau}\,dx$$

$$-\frac{a_3^2+a_2^2\nu}{2\delta_2}\int\limits_{Q''_\tau}\Gamma_m(t)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha U|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt-\frac{a_2^2}{2\delta_2}\int\limits_{Q''_\tau}\Gamma_m(t)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt$$

$$+\left(\frac{\nu a_0-a_1-\delta_2(\nu+1)\Gamma_m}{2}\right)\int\limits_{Q''_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt;$$

тут a, a_1 , a_2, a_3 – сталі, які обмежують $\|A_{\alpha\beta}\|$, $\|A_{\alpha\beta t}\|$, $\|A_{\alpha\beta x_k}\|$, $\|A_{\alpha\beta x_k t}\|$ відповідно;

$$\tau_3=\int\limits_{Q''_\tau}\left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\left(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta\delta_h^k U_t(x',t)+\delta_h^k B_{\alpha\beta}(x',t)D^\beta U_t\right),D^\alpha\delta_h^k U_t\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt$$

$$\geqslant\left(b_0-\frac{\delta_3\Gamma_l}{2}\right)\int\limits_{Q''_\tau}\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2\delta_3}\int\limits_{Q''_\tau}\Gamma_l(t)b^1(t)\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt;$$

$$\tau_4=\int\limits_{Q''_\tau}\left(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\left(\delta_h^k G_\alpha(x,t)D^\alpha U(x',t)+G_{\alpha\beta}(x',t)D^\alpha\delta_h^k U\right),\delta_h^k U_t\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{Q''_\tau}\left(\frac{\Gamma_m(t)g_0(t)}{2\delta_4}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2+\frac{\Gamma_m(t)g^1(t)}{2\delta_4}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha U|^2\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\delta_4\int\limits_{Q''_\tau}\varphi'(t)\omega(t)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt\ ;$$

$$\tau_5=\int\limits_{Q''_\tau}\left(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}\left(\delta_h^k C_\alpha(x,t)D^\alpha U_t(x',t)+C_{\alpha\beta}(x',t)D^\alpha\delta_h^k U_t\right),\delta_h^k U_t\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{Q''_\tau}\left(\frac{\Gamma_l c_0(t)}{2\delta_5}\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha\delta_h^k U_t|^2+\frac{\Gamma_l c^1(t)}{2\delta_1}\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha U_t|^2\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_5)\int\limits_{Q''_\tau}\varphi'(t)\omega(t)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt;$$

$$\tau_6 = \int\limits_{Q''_\tau}\Bigg(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}\sum_{i=1}^{\beta}\delta_h^k A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta-i}(D\xi D^{i-1}u)(x',t),\, D^\alpha\delta_h^k U_t\Bigg)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Bigg(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}\sum_{i=1}^{\beta}A_{\alpha\beta}(x',t)D^{\beta-i}(D\xi D^{i-1}\delta_h^k u+\delta_h^k D\xi D^{i-1}u),\, D^\alpha\delta_h^k U_t\Bigg)e^{-\nu t}\,dx\,dt$$

$$\leqslant \frac{\Gamma_m C}{2\delta_6}\int\limits_{Q''_\tau}\Bigg((a_3^2+a_1^2+\nu+\nu a^2)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2+(a_2^2+a^2)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u_t|^2\Bigg)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{\Omega''_\tau}\Bigg(\frac{\Gamma_m a_2^2 C}{\delta_6}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^2|+\Gamma_m\delta_6\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2\Bigg)e^{-\nu\tau}\,dx+$$

$$+\delta_6(\nu+1)\int\limits_{Q''_\tau}\Gamma_m\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt\ ;$$

$$\tau_7 = \int\limits_{Q''_\tau}\Bigg(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}\sum_{i=1}^{\alpha}\delta_h^k D\xi D^{i-1}(A_{\alpha\beta}D^\beta u)(x',t),\, D^{\alpha-i}\delta_h^k U_t\Bigg)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Bigg(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}\sum_{i=1}^{\alpha}D\xi(x')D^{i-1}(\delta_h^k(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u(x',t))),\, D^{\alpha-i}\delta_h^k U_t\Bigg)e^{-\nu t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega''_\tau}\Bigg(\frac{\Gamma_m(a_1^2+2a_2^2)}{2\delta_7}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2+\frac{1}{2}\Gamma_m\delta_7 C(2+a_2^2+a^2)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|\Bigg)e^{-\nu\tau}\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Bigg(\frac{\Gamma_m(a_1^2+a_3^2+\nu a^2)C}{\delta_7}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u|^2+\frac{\Gamma_m a^2 C}{\delta_7}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u_t|^2\Bigg)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\delta_7\nu\int\limits_{Q''_\tau}\Gamma_m C((a_2^2+3)+2+a^2)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt\ ;$$

$$\tau_8 = \int\limits_{Q''_\tau}\Bigg(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\beta}\delta_h^k B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta-i}(D\xi D^{i-1}u_t)(x',t),\, D^\alpha\delta_h^k U_t\Bigg)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Bigg(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\beta}B_{\alpha\beta}(x',t)D^{\beta-i}(\delta_h^k(D\xi D^{i-1}u_t)),\, D^\alpha\delta_h^k U_t\Bigg)e^{-\nu t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\delta_8}\Gamma_l\int\limits_{Q''_\tau}(b^1(t)+b_0(t))\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^{\alpha-1}u_t|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{3}{2}\delta_8\int\limits_{Q''_\tau}\Gamma_l\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha\delta_h^k U_t|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt\ ;$$

$$\tau_9 = \int\limits_{Q''_\tau}\Bigg(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\alpha}\delta_h^k D\xi D^{i-1}(B_{\alpha\beta}D^\beta u_t)(x',t),\, D^{\alpha-i}\delta_h^k U_t\Bigg)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Bigg(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\alpha}D\xi(x')D^{i-1}(\delta_h^k B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t(x',t)),\,D^{\alpha-i}\delta_h^k U_t\Bigg)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Bigg(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}\sum_{i=1}^{\alpha}D\xi(x')D^{i-1}(B_{\alpha\beta}(x',t)D^\beta\delta_h^k u_t),\,D^{\alpha-i}\delta_h^k U_t\Bigg)\leqslant$$

$$\frac{5}{2}\delta_9\int\limits_{Q''_\tau}\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt+\frac{\Gamma_l}{\delta_9}\int\limits_{Q''_\tau}(b^1(t)+b_0(t))\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t|^2e^{-\nu t}dxdt\ ;$$

$$\tau_{10}=\int\limits_{Q''_\tau}\Bigg(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}\delta_h^k G_\alpha(x,t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}u)(x',t),\delta_h^k U_t\Bigg)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Bigg(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}G_\alpha(x',t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(\delta_h^k D\xi D^{i-1}u+D\xi(x')D^{i-1}\delta_h^k u),\delta_h^k U_t\Bigg)e^{-\nu t}\,dx\,dt$$

$$\leqslant\frac{1}{2\delta_{10}}\int\limits_{Q''_\tau}\Gamma_m C(g^1(t)+g_0(t))\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u(x')|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\,\delta_{10}\int\limits_{Q''_\tau}\varphi'(t)\omega(t)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt\ ;$$

$$\tau_{11}=\int\limits_{Q''_\tau}\Bigg(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}\delta_h^k C_\alpha(x,t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(D\xi D^{i-1}u_t)(x',t),\delta_h^k U_t\Bigg)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q''_\tau}\Bigg(\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}C_\alpha(x',t)\sum_{i=1}^{\alpha}D^{\alpha-i}(\delta_h^k D\xi D^{i-1}u+D\xi(x')D^{i-1}\delta_h^k u),\delta_h^k U_t\Bigg)c^{-\nu t}\,dx\,dt$$

$$\leqslant\frac{1}{2\delta_{11}}\int\limits_{Q''_\tau}\Gamma_l C(c^1(t)+c_0(t))\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t(x')|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\,\delta_{11}\int\limits_{Q''_\tau}\varphi'(t)\omega(t)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt\ ;$$

$$\tau_{12}=\int\limits_{Q''_\tau}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\Bigg[\Bigg(F_\alpha(x',t),D^\alpha\Big(\delta_h^k\xi\delta_h^k U_t\Big)\Bigg)+\Bigg(\delta_h^k F_\alpha(x,t),D^\alpha\Big(\xi\delta_h^k U_t\Big)\Bigg)\Bigg]e^{-\nu t}\,dx\,dt$$

$$\leqslant\frac{1}{2\delta_{12}}\int\limits_{Q''_\tau}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|\delta_h^k F_\alpha(x,t)|^2+|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}dxdt+$$

$$+\,\frac{1}{2}\delta_{12}C\Gamma_l(t)\int\limits_{Q''_\tau}\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}dxdt.$$

Виберемо $\delta_i=\delta_1,\ i=1,10,11;\ \delta_j=\delta_1,\ j=2,6,7;\ \delta_s=\delta_3,\ s=3,8,9,12$. Тоді з оцінок $\tau_i,\ i=1,...,12$ одержимо нерівність:

$$\int\limits_{\Omega''_\tau}\Bigg[\varphi(\tau)|\delta_h^k U_t|^2+(a_0-\delta_2(4+(2+a_2^2+a^2)C)\Gamma_m(\tau))\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2\Bigg]e^{-\nu\tau}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q''_\tau} \Bigg[\left(-\frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)} - \frac{\nu\varphi(t)}{\varphi'(t)} + \omega(t)(8\delta_1 + 2\delta_4 + \delta_5) \right) \varphi'(t) |\delta_h^k U_t|^2 + \Bigg(a_1 - \nu a_0 +$$

$$+ \Gamma_m(t) \left(\frac{g_0(t)}{\delta_4} + \delta_2(6 + 3\nu + C(3 + \nu(a_1^2 + a^2))) \right) \Bigg) \sum_{|\alpha|=m} |\delta_h^k D^\alpha U|^2 + \Bigg(-2b_0 +$$

$$+ \Gamma_l(t) \left(\frac{c_0(t)}{\delta_5} + \delta_3(8 + C) \right) \Bigg) \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha \delta_h^k U_t|^2 + \frac{\|\delta_h^k \Phi_t\|^2}{\delta_1 (\varphi'(t))^2 \omega(t)} \varphi'(t) |u_t|^2 +$$

$$+ \Gamma_m(t) \left(\frac{g^1(t)}{\delta_4} + \frac{M_1}{\delta_2} + \frac{C(g^1(t) + g_0(t))}{\delta_1} \right) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 +$$

$$+ \Gamma_l(t) \left(\frac{c_0(t) + 2c^1(t)}{\delta_1} + \frac{4b^1(t) + b_0(t)}{\delta_3} \right) \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2 + \frac{\|\delta_h^k \Phi U_{tt}\|^2 \varphi'(t)}{\delta_1 (\varphi'(t))^2 \omega(t)} +$$

$$+ \frac{M_1}{\delta_2} \Gamma_m(t) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha U_t|^2 \Bigg] e^{-\nu t}\, dx\, dt + \frac{M_1}{\delta_2} \Gamma_m(\tau) \int\limits_{\Omega''_\tau} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 e^{-\nu\tau}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\delta_3} \int\limits_{Q''_\tau} \left(\sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|\delta_h^k F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} + \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} \right) e^{-\nu t}\, dx\, dt\,, \qquad (10)$$

де C – стала, яка обмежує $|\xi|^2$ та $|D^\alpha \xi|^2, |\alpha| \leqslant l; M_1$ – стала, яка залежить від $C, \nu,\ a_1,\ \ a_2,\ a_3$. За умовою теореми можна вибрати такі числа $\delta_i > 0, i = 1, ..., 5, \tau_0,\ 0 < \tau_0 < T$, що на відрізку $[0, \tau_0]$ виконуватимуться нерівності:

$$-\frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)} - \frac{\nu\varphi(t)}{\varphi'(t)} + \omega(t)(8\delta_1 + 2\delta_4 + \delta_5) \leqslant \nu_1 + \delta_0\ ;$$

$$a_1 - \nu a_0 + \Gamma_m(t) \left(\frac{g_0(t)}{\delta_4} + \delta_2(6 + 3\nu + C(3 + \nu(a_1^2 + a^2))) \right) \leqslant -\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 > 0;$$

$$-2b_0 + \Gamma_l(t) \left(\frac{c_0(t)}{\delta_5} + \delta_3(8 + C) \right) \leqslant -\varepsilon_2, \qquad \varepsilon_2 > 0;$$

$$a_0 - \delta_2(4 + (2 + a_2^2 + a^2)C)\Gamma_m(\tau) > 0.$$

З означення функцій $\omega_0\ , \omega^1\ , \omega^2$ та оцінок норми узагальненого розв'язку u бачимо, що останні доданки нерівності (10) обмежені:

$$\int\limits_{Q''_\tau} \Bigg(\frac{\|\delta_h^k \Phi_t\|^2}{\delta_1 (\varphi'(t))^2 \omega(t)} \varphi'(t) |u_t|^2 + \Gamma_m(t) \left(\frac{g^1(t)}{\delta_4} + \frac{M_1}{\delta_2} + \frac{C(g^1(t) + g_0(t))}{\delta_1} \right) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 +$$

$$+ \Gamma_l(t) \left(\frac{c_0(t) + 2c^1(t)}{\delta_1} + \frac{4b^1(t) + b_0(t)}{\delta_3} \right) \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2 \Bigg) e^{-\nu t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{M_1}{\delta_2} \int\limits_{\Omega''_\tau} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 e^{-\nu\tau}\, dx \leqslant M_2 [\varphi(\tau)]^{\varkappa_1} \int\limits_{Q''_\tau} \frac{\omega^1(t) + 1}{[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\, dx\, dt;$$

$$\int\limits_{Q''_\tau} \left(\frac{\|\delta_h^k \Phi U_{tt}\|^2 \varphi'(t)}{\delta_1 (\varphi'(t))^2 \omega(t)} + \frac{M_1}{\delta_2} \Gamma_m(t) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha U_t|^2 \right) e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M_2[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1}\int\limits_{Q_\tau}\frac{\omega^2(t)\left(\omega_1(t)+\left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2\right)}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\,M_3[\varphi(\tau)]^{\varkappa_2}\int\limits_{Q_\tau}\frac{\omega^2(t)}{[\varphi(t)]^{\varkappa_2}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_{\alpha_t}(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt.$$

Тоді з нерівності (10) одержимо:

$$\int\limits_{\Omega''_\tau}\left[\varphi(\tau)|\delta_h^k U_t|^2+\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2\right]e^{-\nu\tau}\,dx\leqslant(\nu_1+\delta_0)\int\limits_{Q''_\tau}\varphi'(t)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt-$$

$$-\,\varepsilon_1\int\limits_{Q''_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|\delta_h^k D^\alpha U|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt-\varepsilon_2\int\limits_{Q''_\tau}\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\,\frac{1}{\delta_{12}}\int\limits_{Q''_\tau}\left(\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|\delta_h^k F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}+\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}\right)e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\,M_2[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1}\int\limits_{Q_\tau}\frac{\omega^2(t)\left(\omega_1(t)+\left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2\right)+\omega^1(t)}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\,M_3[\varphi(\tau)]^{\varkappa_2}\int\limits_{Q_\tau}\frac{\omega^2(t)}{[\varphi(t)]^{\varkappa_2}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_{\alpha_t}(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt. \qquad (11)$$

Позначимо через $y(\tau)=\int\limits_{Q''_\tau}\varphi'(t)|\delta_h^k U_t|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt$. З нерівності (11) матимемо:

$$y(\tau)\leqslant[\varphi(\tau)]^{\nu_1+\delta_0}\int\limits_0^\tau\frac{\varphi'(\theta)[\varphi(\theta)]^{-(\nu_1+\delta_0+1)}}{\delta_{11}}f_1(x,\theta)\,dx\,d\theta, \qquad (12)$$

де через $f_1(x,\theta)$ позначено останні 3 доданки правої частини (11). Спростивши інтеграл у нерівності (12) так само, як при доведенні існування узагальненого розв'язку, отримаємо оцінку:

$$\int\limits_{Q''_\tau}\left[\varphi(\tau)|\delta_h^k U_t|^2+\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2+\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha\delta_h^k U_t|^2\right]e^{-\nu t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant M_4[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1}\left[\int\limits_{Q''_\tau}\frac{1}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|\delta_h^k F_\alpha(x,t)|^2+\omega^2(t)|F_{\alpha_t}(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{Q''_\tau}\frac{\omega^1(t)+2+\omega^2(t)\left(\omega_1(t)+\left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2\right)}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt\right]. \qquad (13)$$

У випадку $\alpha_0=0$, діючи аналогічно як при доведенні існування узагальненого розв'язку, одержимо нерівність:

$$\int\limits_{Q''_\tau}\Big[\varphi(\tau)|\delta_h^k U_t|^2+\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\delta_h^k U|^2+\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha\delta_h^k U_t|^2\Big]e^{-\nu t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant M_8\Big[\int\limits_{Q''_\tau}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|\delta_h^k F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt+\int\limits_{Q_\tau}\omega^2(t)\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_{\alpha_t}(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left(\omega^1(t)+2+\omega^2(t)\left(\omega_1(t)+\left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2\right)\right)\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt\Big] \qquad (14)$$

Згідно з теоремою про зв'язок різницевих відношень з узагальненими похідними [13, c.119] , на основі отриманих оцінок (13) та (14), робимо висновок, що $U\in H^{l+1,1}_{0,\varphi,\psi}(Q'')$. Оскільки в області Q' функція $U=u$, то $u\in H^{l+1,1}_{0,\varphi,\psi}(Q')$. Q' – строго внутрішня підобласть області Q, тому $u\in H^{l+1,1}_{0,\varphi,\psi,\mathrm{loc}}(Q)$ і виконується оцінка (5). Теорему доведено.

Зауваження 2. Для задачі 2 так само, як у попередньому випадку можна довести, що $u\in H^{m+1,1}_{0,\varphi,\psi,\mathrm{loc}}(Q)$.

Зауваження 3. Так само можна довести існування похідних розв'язку u за змінною x порядку s, $s>1$.

---

1. *Івасишен С.Д., Андросова Л.Н.* Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т.27. – N 3. – С.479–487.
2. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині// Доп. НАН України. – 1994. – N 6. – С.7–11.
3. *Березан Л.П., Івасишен С.Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині// Доп. НАН України. – 1998. – N 12. – С.7–12.
4. *Березан Л.П., Івасишен С.Д.* Про сильно вироджені на початковій гіперплощині $2\vec{b}$-параболічні системи// Вісн. держ. ун-ту "Львівська Політехніка". Приклад. мат. – 1998. N 337. – С.73–76.
5. *Березан Л.П.* Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $2\vec{b}$-параболічної системи // Вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – 1999. – Вип. 46. – С.13–18.
6. *Барановский Ф.Т.* Задача Коши с видоизмененными начальными данными для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу// Мат. сб. – 1983. – Т.120. – N 2. – С.147–163.
7. *Лавренюк С.П.* Смешанная задача для сильно вырождающейся эволюционной системы// Дифференциальные уравнения. – 1994. - Т.30. – N 8. – С.1405–1411.
8. *Лавренюк С.П.* Змішана задача для однієї слабко виродженої системи// Доп. АН України. Матем., природозн., техн. науки. – 1993. – N 5. – С.18–20.

9. *Лавренюк С.П.* Про єдиність розв'язку деяких еволюційних систем з виродженням// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1998. – Вип. 51. – С.20–25.
10. *Lavrenyuk S.P.* On the uniqueness of a solution of mixed problem for one degenerated evolutional system// Математичні студії. – 1998. – Т.9. – N 1. – С.21–28.
11. *Процах Н.* Існування розв'язку однієї еволюційної системи з виродженням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1999. – Вип. 54. – С.159–170.
12. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
13. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М., 1976.

N. Protsakh

INTERNAL SMOOTHNESS OF THE SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE EVOLUTIONAL SYSTEM WITH DEGENERATION

This paper contains some results about the investigation of the internal smoothness of the solution for one mixed problem for the evolutional system with degeneration. This problem consists of the evolutional system with the second derivative on time, degenerative into an elliptical system on the initial plane, homogeneous Dirichlet boundary and some initial conditions. The system contains, in particular, some classes of parabolic and hyperbolic system. The problem is considered in the cylindrical domain.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.170–175

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.170–175

УДК 593.3

Борис Процюк, Ірина Верба

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК СТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ПРОСТОРУ

Розв'язуючи задачі теплопровідності для кусково-однорідних тіл, часто застосовують метод граничних інтегральних рівнянь [1, 2]. Використовують фундаментальні розв'язки або функції Гріна здебільшого для відповідних однорідних областей. Для кусково-однорідних областей перелік функцій Гріна є досить обмеженим. Зокрема, для двовимірних стаціонарних задач теплопровідності двошарових ізотропних пластин функції Гріна з виділеними особливостями наведені в [3], а для багатошарових тіл з плоскопаралельними границями розділу в тривимірній постановці в [4].

Ця праця присвячена побудові функції Гріна стаціонарних задач теплопровідності для кусково-однорідного простору, складові частини якого шар і два півпростори - трансверсально-ізотропні.

Віднесемо простір до циліндричної системи координат r, φ, z, початок якої розміщений на межі верхнього півпростору і шару, а вісь z перпендикулярна до площин ізотропії, які паралельні поверхням розділу.

Під функцією Гріна будемо розуміти функцію $G(M,P)$, яка в просторі узагальнених функцій задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}+\frac{\lambda_r(z)}{\lambda_z(z)}\Delta G+\frac{\lambda_{z2}-\lambda_{z1}}{\lambda_{z2}}\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0-0}\delta(z)+ \\ +\frac{\lambda_{z3}-\lambda_{z2}}{\lambda_{z3}}\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=h-0}\delta(z-h)=-\frac{1}{\lambda_z(\xi)}\delta(M,P) \quad (1)$$

і граничним умовам

$$G|_{z\to\pm\infty}=0,\quad G|_{r=0}\neq\infty,\quad G|_{r\to\infty}\to 0,\quad G|_{\varphi=0}=G|_{\varphi=2\pi}. \quad (2)$$

Тут коефіцієнти теплопровідності $\lambda_r(z)$ в площині ізотропії і $\lambda_z(z)$ в площині перпендикулярній до неї мають вигляд $p(z)=p_1+(p_2-p_1)S(z)+(p_3-p_2)S(z-h)$; $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$; $\delta(M,P)=\dfrac{1}{\rho}\delta(r-\rho)\,\delta(\varphi-\Theta)\delta(z-\xi)$; r, φ, z і ρ, Θ, ξ– координати точок відповідно M і P; $S(z)$ – функція Гевісайда; $\delta(z)$ – дельта-функція Дірака; h – товщина шару. Зауважимо таке: якщо функцію $G(M,P)$ подати у вигляді

$$G(M,P)=G_1+(G_2-G_1)S(z)+(G_3-G_2)S(z-h), \quad (3)$$

де

$$G_i = G_{i1} + (G_{i2} - G_{i1})S(\xi) + (G_{i3} - G_{i2})S(\xi - h), \qquad i = 1, 2, 3 \tag{4}$$

і підставити (3) в (1), то дістанемо, що рівняння (1) еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{\partial^2 G_{ij}}{\partial z^2} + \frac{\lambda_{ri}}{\lambda_{zi}}\,\Delta G_{ij} = -\frac{\delta_{ij}}{\lambda_{zi}}\,\delta(M,P),\ j = 1,2,3 \tag{5}$$

і умовам контакту

$$\begin{aligned} G_{1j} =& G_{2j}, \qquad \lambda_{z1}\frac{\partial G_{1j}}{\partial z} = \lambda_{z2}\frac{\partial G_{2j}}{\partial z}, \quad \text{при} \quad z = 0; \\ G_{2j} =& G_{3j}, \qquad \lambda_{z2}\frac{\partial G_{2j}}{\partial z} = \lambda_{z3}\frac{\partial G_{3j}}{\partial z}, \quad \text{при} \quad z = h, \end{aligned} \tag{6}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Застосуємо до задачі (1),(2) інтегральні перетворення [5] Фур'є

$$\overline{\overline{u}}(\nu,\varphi,r,z) = \int\limits_0^{2\pi} u(\varphi,r,z)\,\cos\nu(\varphi-\varphi')\,d\varphi' \tag{7}$$

і Ганкеля

$$\overline{u}(\nu,\varphi,\eta,z) = \int\limits_0^{\infty} r\,\overline{\overline{u}}(\nu,\varphi,r,z)\,J_\nu(\eta\, r)\,d\,r, \tag{8}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d^2\overline{G}}{d\,z^2} - [\varepsilon_1^2 + (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)S(z) + (\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2^2)S(z-h)]\overline{G} + \frac{\lambda_{z2}-\lambda_{z1}}{\lambda_{z2}}\left.\frac{d\,\overline{G}}{d\,z}\right|_{z=0-0}\delta(z) + \\ + \frac{\lambda_{z3}-\lambda_{z2}}{\lambda_{z3}}\left.\frac{d\,\overline{G}}{d\,z}\right|_{z=h-0}\delta(z-h) = -\frac{A_\nu}{\lambda_z(\xi)}\,\delta(z-\xi), \end{aligned} \tag{9}$$

$$G|_{z\to\pm\infty} = 0, \tag{10}$$

де

$A_\nu = J_\nu(\eta\,\rho)\cos\nu(\varphi-\Theta)$, $\varepsilon_i^2 = \eta\gamma_i^2$, $\gamma_i = \sqrt{\dfrac{\lambda_{ri}}{\lambda_{zi}}}$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (9), знайдений методом варіації довільної сталої, має такий вигляд:

$$\overline{G} = C_1\,Z_1(z) + C_2\,Z_2(z) + \frac{A_\nu}{\varepsilon_1\lambda_{z1}}\,[Z_1(z)\,Z_2(\xi) - Z_2(z)\,Z_1(\xi)]S(z-\xi), \tag{11}$$

де фундаментальна система розв'язків $Z_1(z)$ і $Z_2(z)$ відповідного однорідного рівняння визначається співвідношеннями [6]

$$\begin{aligned} Z_m(z) =& Z_{m1}(z) + [Z_{m2}(z) - Z_{m1}(z)]\,S(z) + [Z_{m3}(z) - Z_{m2}(z)]\,S(z-h),\ (m = 1,2), \\ Z_{11}(z) =& \operatorname{ch}\varepsilon_1\,z, \quad Z_{12}(z) = \operatorname{ch}\varepsilon_2\,z, \quad Z_{13}(z) = \operatorname{ch}\varepsilon_2\,h\operatorname{ch}\varepsilon_3\,(z-h) + \\ &+ N_2\operatorname{sh}\varepsilon_2\,h\operatorname{sh}\varepsilon_3\,(z-h), \quad Z_{21} = \operatorname{sh}\varepsilon_1\,z, \quad Z_{22} = N_1\operatorname{sh}\varepsilon_2\,z, \\ Z_{23}(z) =& N_1\operatorname{sh}\varepsilon_2\,h\operatorname{ch}\varepsilon_3\,(z-h) + N_1\,N_2\operatorname{ch}\varepsilon_2\,h\operatorname{sh}\varepsilon_3\,(z-h), \\ N_k =& \frac{\Lambda_k}{\Lambda_{k+1}}, \qquad \Lambda_k = \sqrt{\lambda_{rk}\,\lambda_{zk}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Задовольнивши граничні умови (10), розв'язок задачі (9), (10) подамо у вигляді

$$\overline{G}(z,\xi) = g(\xi,z)\,S(z-\xi) + g(z,\xi)\,S(\xi-z), \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}
g(z,\xi) &= -\frac{A_\nu}{\varepsilon_1\lambda_{z1}}\,\frac{F(\xi)\,\Phi(z)}{\Phi_2(h)+\frac{N_2}{\varepsilon_2}\Phi_2'(h)},\\
F(\xi) &= [Z_{12}(h) + \frac{N_2}{\varepsilon_2}\,Z_{12}'(h)]\,Z_2(\xi) - [Z_{22}(h) + \frac{N_2}{\varepsilon_2}\,Z_{22}'(h)]\,Z_1(\xi),\\
\Phi(z) &= \Phi_1(z) + [\Phi_2(z)-\Phi_1(z)]\,S(z) + [\Phi_3(z)-\Phi_2(z)]\,S(z-h),\\
\Phi_1(z) &= \exp(\varepsilon_1 z), \quad \Phi_2(z) = \operatorname{ch}\varepsilon_2 z + N_2\operatorname{sh}\varepsilon_2 z,\\
\Phi_3(z) &= \Phi_2(h)\operatorname{ch}\varepsilon_3(z-h) + \frac{N_2}{\varepsilon_2}\,\Phi_2'(h)\operatorname{sh}\varepsilon_3(z-h);
\end{aligned}$$

штрихом позначено похідну за змінною z.

Розглянемо вираз для функції $\overline{G}(z,\xi)$ залежно від взаєморозміщення точок z, ξ. Тоді з (13) одержимо

$$\begin{aligned}
\overline{G}_{11}(z,\xi) =& \frac{A_\nu}{2\lambda_{z1}\varepsilon_1}\Big\{\exp[-\varepsilon_1(\xi-z)]\,S(\xi-z) + \exp[-\varepsilon_1(z-\xi)]\times\\
&\times S(z-\xi) - \frac{L}{M}\exp[\varepsilon_1(\xi+z)]\Big\},\\
\overline{G}_{12}(z,\xi) =& -\frac{A_\nu}{\lambda_{z2}\varepsilon_2 M}\{(1-N_2)\exp[\varepsilon_1 z - \varepsilon_2(2h-\xi)] - (1+N_2)\exp[\varepsilon_1 z - \varepsilon_2\xi]\},\\
\overline{G}_{13}(z,\xi) =& \frac{2A_\nu}{\lambda_{z3}\varepsilon_3 M}\exp[\varepsilon_1 z - \varepsilon_2 h - \varepsilon_3(\xi-h)],\\
\overline{G}_{22}(z,\xi) =& \frac{A_\nu}{2\lambda_{z2}\varepsilon_2}\Big\{\exp[-\varepsilon_2(\xi-z)]\,S(\xi-z) + \exp[-\varepsilon_2(z-\xi)]\,S(z-\xi)\Big\} -\\
&- \frac{A_\nu(1+N_1)}{2\lambda_{z2}\varepsilon_2 M}\Big\{-\frac{1-N_1}{1+N_1}(1+N_2)\exp[-\varepsilon_2(\xi+z)] + (1-N_2)\times\\
&\times\Big[\exp[\varepsilon_2(\xi+z)-2\varepsilon_2 h] + \frac{1-N_1}{1+N_1}\exp[-2\varepsilon_2 h](\exp[\varepsilon_2(\xi-z)]+\\
&+\exp[\varepsilon_2(z-\xi)])\Big]\Big\},\\
\overline{G}_{23}(z,\xi) =& \frac{A_\nu(1+N_1)}{\lambda_{z3}\varepsilon_3 M}\Big\{\frac{1-N_1}{1+N_1}\exp[-\varepsilon_2(z+h) - \varepsilon_3(\xi-h)]+\\
&+\exp[\varepsilon_2(z-h) - \varepsilon_3(\xi-h)]\Big\},\\
\overline{G}_{33}(z,\xi) =& \frac{A_\nu}{2\lambda_{z3}\varepsilon_3}\Big\{\exp[-\varepsilon_3(\xi-z)]\,S(\xi-z) + \exp[-\varepsilon_3(z-\xi)]\,S(z-\xi)+\\
&+\frac{1}{M}((1-N_2)(1+N_1) + (1+N_2)(1-N_1)\exp[-2\varepsilon_2 h])\times\\
&\times\exp[-\varepsilon_3(\xi+z) + 2\varepsilon_3 h]\Big\},\\
\overline{G}_{21}(z,\xi) =& \overline{G}_{12}(\xi,z), \quad \overline{G}_{31}(z,\xi) = \overline{G}_{13}(\xi,z), \quad \overline{G}_{32}(z,\xi) = \overline{G}_{23}(\xi,z),
\end{aligned} \tag{14}$$

де
$L = (1 - N_1)(1 + N_2) + (1 - N_2)(1 + N_1)\exp[-2\varepsilon_2 h]$,
$M = (1 + N_2)(1 + N_1) + (1 - N_2)(1 - N_1)\exp[-2\varepsilon_2 h]$.

Переходячи в (14) до оригіналів, підсумовуємо ряди за індексами функцій Беселя. Інтеграли обчислюємо з врахуванням розкладу

$$\frac{1}{1 - v_1 v_2 \exp(-2\varepsilon_2 h)} = \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \exp(-2\varepsilon_2 h\, n),$$

де

$$v_1 = \frac{N_1 - 1}{N_1 + 1}, \quad v_2 = \frac{1 - N_2}{1 + N_2}.$$

У результаті отримаємо

$$G_{11}(M,P) = \frac{1}{4\pi\Lambda_1}\left[q_{11}^{(2)} + v_1 q_{11}^{(3)} + v_1 \sum_{n=1}^{\infty} q_{11}^{(1n)} - v_2 \sum_{n=0}^{\infty} q_{11}^{(2n)}\right],$$

$$G_{12}(M,P) = \frac{1}{2\pi(\Lambda_1 + \Lambda_2)}\left[q_{12}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} q_{12}^{(1n)} - v_2 \sum_{n=0}^{\infty} q_{12}^{(2n)}\right],$$

$$G_{13}(M,P) = \frac{\Lambda_2}{\pi(\Lambda_1 + \Lambda_2)(\Lambda_2 + \Lambda_3)} \sum_{n=0}^{\infty} q_{13}^{(1n)},$$

$$G_{22}(M,P) = \frac{1}{4\pi\Lambda_2}\Bigg[-v_1 q_{22}^{(1)} + q_{22}^{(2)} - v_2 q_{22}^{(3)} - v_1 \sum_{n=1}^{\infty} q_{22}^{(1n)} -$$

$$- v_2 \sum_{n=1}^{\infty} q_{22}^{(2n)} + v_1 v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (q_{22}^{(3n)} + q_{22}^{(4n)})\Bigg],$$

$$G_{23}(M,P) = \frac{1}{2\pi(\Lambda_2 + \Lambda_3)}\left[q_{23}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} q_{23}^{(1n)} - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} q_{23}^{(2n)}\right],$$

$$G_{33}(M,P) = \frac{1}{4\pi\Lambda_3}\left[v_2 q_{33}^{(1)} + q_{33}^{(2)} + v_2 \sum_{n=1}^{\infty} q_{33}^{(1n)} - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} q_{33}^{(2n)}\right],$$

$$G_{21}(M,P) = G_{12}(P,M), \quad G_{31}(M,P) = G_{13}(P,M), \quad G_{32}(M,P) = G_{23}(P,M). \tag{15}$$

Тут
$q_{ij}^{(s)} = [d^2 + (b_{ij}^{(s)})^2]^{-1/2}, \quad q_{ij}^{(mn)} = (v_1 v_2)^n [d^2 + (b_{ij}^{(mn)})^2]^{-1/2}$,
$b_{ii}^{(2)} = \gamma_i(\xi - z)\ (i = 1,2,3)$,
$b_{11}^{(3)} = \gamma_1(\xi + z), \quad b_{12}^{(1)} = \gamma_2\xi - \gamma_1 z, \quad b_{22}^{(1)} = \gamma_2(\xi + z)$,
$b_{22}^{(3)} = \gamma_2(\xi + z - 2h), \quad b_{23}^{(1)} = \gamma_2(h - z) + \gamma_3(\xi - h), \quad b_{33}^{(1)} = \gamma_3(\xi + z - 2h)$,
$b_{11}^{(1n)} = 2n\gamma_2 h - \gamma_1(\xi + z), \quad b_{11}^{(2n)} = 2(n+1)\gamma_2 h - \gamma_1(\xi + z)$,
$b_{12}^{(1n)} = (2nh + \xi)\gamma_2 - \gamma_1 z, \quad b_{12}^{(2n)} = [2(n+1)h - \xi]\gamma_2 - \gamma_1 z$,
$b_{13}^{(1n)} = (2n+1)\gamma_2 h - \gamma_1 z + \gamma_3(\xi - h), \quad b_{22}^{(1n)} = \gamma_2(2nh + \xi + z)$,
$b_{22}^{(2n)} = \gamma_2[2h(n+1) - \xi - z], \quad b_{22}^{(3n)} = \gamma_2[2(n+1)h + z - \xi]$,
$b_{22}^{(4n)} = \gamma_2[2(n+1)h + \xi - z], \quad b_{23}^{(1n)} = \gamma_2[(2n+1)h - z] + \gamma_3(\xi - h)$,
$b_{23}^{(2n)} = \gamma_2[(2n+1)h + z] + \gamma_3(\xi - h), \quad b_{33}^{(1n)} = 2n\gamma_2 h + \gamma_3(\xi + z - 2h)$,

$$b_{33}^{(2n)} = 2(n+1)\gamma_2 h + \gamma_3(\xi + z) - 2\gamma_3 h, \quad d^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \Theta). \tag{16}$$

Особливість мають тільки доданки з $q_{ij}^{(s)}$.

У декартовій системі координат x, y, z, коли джерело тепла зосереджене в точці $P(x_p, y_p, \xi)$, у формулах (15) треба прийняти $d^2 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2$ і замінити λ_{ri} на λ_{xi}, де λ_{xi} коефіцієнти теплопровідності в площині ізотропії $i-$ої області.

Співвідношення для елементів матриці Гріна в осесиметричному випадку, які отримують шляхом інтегрування (15) за кутом Θ у межах від 0 до 2π, мають також вигляд (15), але $q_{ij}^{(s)}$ і $q_{ij}^{(mn)}$ визначаються за такими формулами

$$\begin{aligned} q_{ij}^{(s)} &= 4\overline{k}_{ij}^{(s)} K(k_{ij}^{(s)}), \quad q_{ij}^{(mn)} = 4(v_1 v_2)^n \overline{k}_{ij}^{(mn)} K(k_{ij}^{(mn)}), \\ \overline{k}_{ij}^{(s)} &= [d_0^2 + (b_{ij}^{(s)})^2]^{-1/2}, \quad \overline{k}_{ij}^{(mn)} = [d_0^2 + (b_{ij}^{(mn)})^2]^{-1/2}, \\ k_{ij}^{(s)} &= 2\sqrt{r\rho}\,\overline{k}_{ij}^{(s)}, \quad k_{ij}^{(mn)} = 2\sqrt{r\rho}\,\overline{k}_{ij}^{(mn)}, \quad d_0 = r + \rho; \end{aligned} \tag{17}$$

$K(x)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду.

Спрямувавши в (15) коефіцієнти теплопровідності верхнього півпростору до безмежності або до нуля,отримаємоспіввідношення для елементів матриці Гріна відповідно першої або другої крайової задачі для кусково-однорідного півпростору

$$\begin{aligned} G_{11}(M,P) &= \frac{1}{4\pi\Lambda_1}\left[C_H p_{11}^{(1)} + p_{11}^{(2)} + v_1 p_{11}^{(3)} + v_1 \sum_{n=1}^{\infty} p_{11}^{(1n)} + \right. \\ &\left. + v_1 C_H \sum_{n=0}^{\infty}(p_{11}^{(2n)} + p_{11}^{(3n)}) + v_1 \sum_{n=0}^{\infty} p_{11}^{(4n)}\right], \\ G_{12}(M,P) &= \frac{1}{2\pi(\Lambda_1+\Lambda_2)}\left[p_{12}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{12}^{(1n)} + C_H \sum_{n=0}^{\infty} p_{12}^{(2n)}\right], \\ G_{22}(M,P) &= \frac{1}{4\pi\Lambda_2}\left[-v_1 p_{22}^{(1)} + p_{22}^{(2)} - v_1 \sum_{n=1}^{\infty} p_{22}^{(1n)} + C_H \sum_{n=0}^{\infty} p_{22}^{(2n)}\right], \\ G_{21}(M,P) &= G_{12}(P,M), \end{aligned} \tag{18}$$

де

$$\begin{aligned} & p_{ij}^{(s)} = [d^2 + (b_{ij}^{(s)})^2]^{-1/2}, \quad p_{ij}^{(mn)} = (C_H v_1)^n [d^2 + (b_{ij}^{(mn)})^2]^{-1/2}, \\ & b_{11}^{(1)} = \gamma_1(\xi + z) \quad b_{11}^{(2)} = \gamma_1(\xi - z), \quad b_{11}^{(3)} = \gamma_1(\xi + z - 2h), \\ & b_{12}^{(1)} = \gamma_1(h - z) + \gamma_2(\xi - h), \quad b_{22}^{(1)} = \gamma_2(\xi + z - 2h), \quad b_{22}^{(2)} = \gamma_2(\xi - z), \\ & b_{11}^{(1n)} = \gamma_1[2(n+1)h - z - \xi), \quad b_{11}^{(2n)} = \gamma_1[2(n+1)h - \xi + z), \\ & b_{11}^{(3n)} = \gamma_1[2(n+1)h - z + \xi), \quad b_{11}^{(4n)} = \gamma_1[2(n+1)h + z + \xi], \\ & b_{12}^{(1n)} = 2n\gamma_1 h + \gamma_1(h - z) + \gamma_2(\xi - h), \quad b_{12}^{(2n)} = 2n\gamma_1 h + \gamma_1(h + z) + \gamma_2(\xi - h), \\ & b_{22}^{(1n)} = 2n\gamma_1 h + \gamma_2(\xi + z - 2h), \quad b_{22}^{(2n)} = 2\gamma_1(n+1)h + \gamma_2(\xi + z - 2h), \end{aligned}$$

для першої крайової задачі $C_H = -1$, для другої - $C_H = 1$.

Для осесиметричного випадку у формулах (18) необхідно прийняти

$$\begin{aligned} & p_{ij}^{(s)} = 4\overline{k}_{ij}^{(s)} K(k_{ij}^{(s)}), \quad p_{ij}^{(mn)} = 4(C_H v_1)^n \overline{k}_{ij}^{(mn)} K(k_{ij}^{(mn)}), \\ & \overline{k}_{ij}^{(s)} = [d_0^2 + (b_{ij}^{(s)})^2]^{-1/2}, \quad \overline{k}_{ij}^{(mn)} = [d_0^2 + (b_{ij}^{(mn)})^2]^{-1/2}, \\ & k_{ij}^{(s)} = 2\sqrt{r\rho}\;\overline{k}_{ij}^{(s)}, \quad k_{ij}^{(mn)} = 2\sqrt{r\rho}\;\overline{k}_{ij}^{(mn)}. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти теплопровідності шару і нижнього півпростору, з (15) отримаємо елементи матриці Гріна для простору, який складається з двох півпросторів

$$G_{11}(M,P) = \frac{1}{4\pi\Lambda_1}\left\{[d^2+\gamma_1^2(\xi-z)^2]^{-1/2} + v_1[d^2+\gamma_1^2(\xi+z)^2]^{-1/2}\right\},$$
$$G_{12}(M,P) = \frac{1}{2\pi(\Lambda_1+\Lambda_2)}\left[d^2+(\gamma_2\xi-\gamma_1 z)^2\right]^{-1/2}, \quad G_{21}(M,P) = G_{12}(P,M),$$
$$G_{22}(M,P) = \frac{1}{4\pi\Lambda_2}\left\{\left[d^2+\gamma_2^2(\xi-z)^2\right]^{-1/2} - v_1\left[d^2+\gamma_2^2(\xi+z)^2\right]^{-1/2}\right\}.$$

Для осесиметричних задач матимемо

$$G_{11}(M,P) = \frac{1}{\pi\Lambda_1}\left[\overline{k}_1{}^{-1}K(k_1) + v_1\overline{k}_2{}^{-1}K(k_2)\right],$$
$$G_{12}(M,P) = \frac{2}{\pi(\Lambda_1+\Lambda_2)}\overline{k}_3{}^{-1}K(k_3), \quad G_{21}(M,P) = G_{12}(P,M),$$
$$G_{22}(M,P) = \frac{1}{\pi\Lambda_2}\left[\overline{k}_4{}^{-1}K(k_4) - v_1\overline{k}_5{}^{-1}K(k_5)\right],$$

де

$$\overline{k}_1{}^2 = d_0^2+\gamma_1^2(\xi-z)^2, \quad \overline{k}_2{}^2 = d_0^2+\gamma_1^2(\xi+z)^2,$$
$$\overline{k}_3{}^2 = d_0^2+(\gamma_2\xi-\gamma_1 z)^2, \quad \overline{k}_4{}^2 = d_0^2+\gamma_2^2(\xi-z)^2,$$
$$\overline{k}_5{}^2 = d_0^2+\gamma_2^2(\xi+z)^2, \quad k_i{}^2 = 4r\rho\overline{k}_i{}^{-2}, \quad (i=1,2,3,4,5).$$

Наведені вирази для елементів матриці Гріна дають змогу розв'язувати методом граничних інтегральних рівнянь великий клас задач теплопровідності для трьох- і двошарових трансверсально-ізотропних тіл, обминаючи процедуру відшукання значень відповідних величин на границі розділу областей.

---

1. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Метод граничных элементов в прикладных науках. – М., 1984.
2. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. – М., 1987.
3. *Мельников Ю.А., Красникова Р.Д.* Построение функций Грина некоторых граничных задач математической физики. – Днепропетровск, 1981.
4. *Коляно Ю.М., Процюк Б.В., Драпкин Б.А.* Функция Грина для пространственных стационарных задач теплопроводности многослойного тела// Диференциальные уравнения. – 1992. – Т.28. – N 3. – С. 524-527.
5. *Галицын А.С., Жуковский А.Н.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. - К., 1976.
6. *Процюк Б.В.* Фундаментальна система розв'язків диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами і її використання при розв'язуванні задач термопружності. – Крайові задачі термомеханіки. Зб. наук. пр.: Київ. Ін-т математики НАН України. 1996. – Ч.2. – С. 89-94.

B. Protsuk, I. Verba

THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF STEADY-STATE HEAT CONDITION PROBLEM FOR PEACE-WISE HOMOGENEOUS TRANSVERSELY-ISOTROPIC SPACE

Green's function of steady-state heat condition problem for peace-wise homogeneous space consisting of two transversely-isotropic half spaces and interlayer is constructed.

Стаття надійшла до редколегії 18.06.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.176–178 Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.176–178

УДК 517.576

Тетяна Сало, Олег Скасків

ПРО ВИНЯТКОВІ МНОЖИНИ У ТЕОРЕМАХ ТИПУ ВІМАНА-ВАЛІРОНА

1°. Через $H(\Lambda)$ позначимо клас абсолютно збіжних у всій комплексній площині рядів Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

$\Lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant n \to +\infty)$. Для $F \in H(\Lambda)$ і $\sigma \in \mathbb{R}$ позначимо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (1), $\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n|e^{\sigma\lambda_n} = \mu(\sigma, F)\}$ – центральний індекс ряду (1).

Нехай L – клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцій. Для $\Phi \in L$ позначимо

$$H(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : (\exists K_F > 0)(\ln \mu(\sigma, F) \geqslant K_F \sigma \Phi(\sigma), \sigma \geqslant \sigma_0)\}.$$

Для вимірної множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної міри $\mathrm{meas} E < +\infty$ її h – щільністю назвемо

$$D_h(E) = \overline{\lim_{R\to+\infty}} h(R)\mathrm{meas}(E \cap [R, +\infty)),$$

де $h \in L$. Для $\varphi \in L$ через L_φ позначимо клас функцій $h \in L$ таких, що

$$\frac{h(\varphi(t))}{t} \ln t \to 0 \quad (t \to +\infty).$$

Нехай всюди нижче $\varphi(t)$ функція обернена до функції $\Phi(t) \in L$.

В [1] показано, що для того щоб для кожної цілої функції $F \in H(\Lambda)$ співвідношення

$$F(\sigma + iy) = (1 + o(1))a_{\nu(\sigma)} e^{(\sigma+iy)\lambda_{\nu(\sigma)}} \tag{2}$$

виконувалось при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри і рівномірно по $y \in \mathbb{R}$, необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty. \tag{3}$$

Подібний результат для цілих функцій заданих лакунарним степеневим рядом раніше доведено у [2].У статті [3] ці результати доповнюються в класі $H(\Lambda, \Phi)$ твердженням про величину виняткової множини у співвідношенні (2). Власне правильна така теорема.

Теорема А. *Нехай $\Phi \in L$ і $h \in L_\varphi$. Якщо $F \in H(\Lambda, \Phi)$ і*

$$(\forall b > 0) : \lim_{\sigma \to +\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi(\sigma)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0, \tag{4}$$

то співвідношення (2) виконується при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E, D_h(E) = 0)$ рівномірно по $y \in \mathbb{R}$.

У випадку $\Phi(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, в [3] показано, що умова (4) є і необхідною для того, щоб співвідношення (2) справджувалось для кожної функції $F \in H(\Lambda, \Phi)$, при $\sigma \to +\infty(\sigma \notin E,\ D_h(E) = 0)$.

Мета цього повідомлення – виявити необхідність умови (4) у випадку $\Phi \in L$. Вважатимемо всюди нижче, що ряд (3) є збіжним. Для $\Phi \in L$ введемо клас дещо ширший за $H(\Lambda, \Phi)$,а саме

$$H_1(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : (\exists K_1 > 0)(\exists K_2 > 0)(\ln \mu(\sigma, F) \geqslant K_1 \sigma \Phi(K_2 \sigma), \sigma \geqslant \sigma_0)\}.$$

Правильне таке твердження.

Теорема 1. *Нехай $\Phi \in L, h \in L_\varphi$ і умова (4) не виконується. Тоді існують функція $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$, стала $\beta > 0$ і множина E з $D_h(E) > 0$ такі, що для всіх $\sigma \in E$*

$$F(\sigma) > (1 + \beta)\mu(\sigma, F). \tag{5}$$

Доведення. Маємо змогу повторювати міркування з [3] (з доведення теореми 2). Справді, з заперечення умови (4) випливає, що існує послідовність $n_j \uparrow +\infty(j \to +\infty)$ така, що для деяких $b > 0, d > 0$

$$h\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{b}\right)\right) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \geqslant d > 0 \quad (n = n_j, j \geqslant 1). \tag{6}$$

Вибираючи $\varkappa_n = \sum\limits_{k=1}^{n-2} r_k$ $(n \geqslant 2)$, де $r_1 = \max\{\varphi(\frac{\lambda_2}{b}), \frac{b_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\}$, $r_k = \max\{\varphi(\frac{\lambda_{k+1}}{b}) - \varphi(\frac{\lambda_k}{b}), \frac{b_1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}\}$, а також $a_0 = 1, a_n = \exp\{-\sum\limits_{k=1}^{n} \varkappa_k(\lambda_k - \lambda_{k-1})\}$, одержуємо, що $\varkappa_n = \frac{\ln a_{n-1} - \ln a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$. Враховуючи, що $\varkappa_n \uparrow +\infty(n \to +\infty)$, звідси негайно отримуємо, що для всіх $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$ і $n \geqslant 0$ виконується $\mu(\sigma) \stackrel{def}{=} \max\{a_k e^{\sigma\lambda_k} : k \geqslant 0\} = a_n e^{\sigma\lambda_n}$. Зауважимо, що $\varkappa_{n+1} - \varkappa_n = r_{n-1} \geqslant \frac{b_1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$. Тому для всіх $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_n + \frac{b_1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}]$ та $n \geqslant n_0$ маємо

$$\frac{a_{n-1} e^{\sigma\lambda_{n-1}}}{\mu(\sigma)} = \exp\{(\lambda_n - \lambda_{n-1})(\varkappa_n - \sigma)\} \geqslant e^{-b_1} = \beta. \tag{7}$$

Нехай тепер F-функція, яка визначена рядом (1) з щойно визначеними коефіцієнтами (a_n). Оскільки з умови (3) за нерівністю Коші-Буняковського $\sum\limits_{k=m}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \geqslant \frac{(n-m)^2}{\lambda_n - \lambda_m}$ маємо $n^2 = o(\lambda_n)(n \to +\infty)$, а за побудовою $-\frac{1}{\lambda_n} \ln a_n \to +\infty(n \to +\infty)$, то, очевидно, що $F \in H(\Lambda)$. Крім того, $\mu(\sigma, F) \equiv \mu(\sigma)$. Тому для всіх $\sigma \in E \stackrel{def}{=} \bigcup\limits_{n=n_0}^{+\infty} [\varkappa_n; \varkappa_n + \frac{b_1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}]$ з нерівності (7) одержуємо

$F(\sigma) \geqslant (1+\beta)\mu(\sigma, F)$. Враховуючи, що при $\sigma \geqslant \sigma_0$ для $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1})$

$$\ln \mu(2\sigma, F) \geqslant \int_\sigma^{2\sigma} \lambda_{\nu(x)} dx \geqslant \sigma\lambda_{\nu(\sigma)} = \sigma\lambda_n \geqslant b\sigma\Phi\left(\frac{\varkappa_{n+1}}{2}\right) \geqslant b\sigma\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right),$$

то $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$. Оскільки $\operatorname{meas}(E \cap [\varkappa_{n+1}; +\infty)) = b_1 \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}$, то за допомогою нерівності (6) при $n = n_j$ одержуємо

$$h(\varkappa_{n+1})\operatorname{meas}(E \cap [\varkappa_{n+1}, +\infty)) = h\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{b}\right)\right) b_1 \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} \geqslant b_1 d$$

і, отже, $D_h(E) \geqslant b_1 d > 0$. Теорему (1) доведено.

Позначимо тепер $L'_\varphi = L_\varphi \cap \{h \in L : (h(2x) = O(h(x)) \ , x \to +\infty)\}$.
Правильний такий критерій.

Теорема 2. *Нехай $\Phi \in L, h \in L'_\varphi$. Для того щоб для кожної функції $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$ співвідношення (2) виконувалось при $\sigma \to +\infty (\sigma \in [0, +\infty) \setminus E, D_h(E) = 0)$ і рівномірно по $y \in \mathbb{R}$, необхідно і достньо, щоб справджувалась умова (4).*

Доведення. Необхідність дає теорема 1.

Для доведення достатності зауважимо, що з умови $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$ випливає, що $\exists K_2 > 0$ таке, що $F \in H(\Lambda, \Phi_1)$, де $\Phi_1(x) = \Phi(K_2 x)$. Виконання умови (4) разом з умовою $h \in L'_\varphi$ дає правильність такого твердження:

$$(\forall b > 0) : \lim_{\sigma \to +\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi_1(\sigma)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0, \tag{8}$$

і стає можливим застосування теореми A, де роль функції $\Phi(x)$ відіграє вищевизначена функція $\Phi_1(x)$. Це завершує доведення теореми.

---

1. *Скасків О.Б.* Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле // Доп.АН УРСР. Сер. А. – 1984. – N 11. – С.22-24.
2. *Fenton P.C.* The minimum modulus of gap power series//Proc.Edinburgh Math.Soc. – 1978. – Vol. 21. – P.49-54.

T. Salo, O. Skaskiv

ON THE EXCEPTIONAL SETS IN THE THEOREMS OF WIMAN-VALIRON TYPE

For entire Dirichlet series $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ necessary and sufficient conditions are established in order that

$$\sup\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}\} = (1 + o(1)) \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$$

would be valid as $\sigma \to +\infty$ outside some set E with $DE = \overline{\lim\limits_{\sigma\to+\infty}}\, h(\sigma)\operatorname{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) = 0$, where $h(\sigma)$ is nonnegative continuous increasing to $+\infty$ function on $[0, +\infty)$.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.179–184 Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.179–184

УДК 519.21

Ярослав Чабанюк

ДИСКРЕТНА СТОХАСТИЧНА ПРОЦЕДУРА У МАРКІВСЬКОМУ ВИПАДКОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

1. *Марківське випадкове середовище* задається однорідним ергодичним стрибковим марківським процесом $x(t)$, $t \geqslant 0$ у стандартному фазовому просторі $(X, \mathcal{X})$ породжуючим оператором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)]. \tag{1}$$

Інтенсивність стрибків $q(x) > 0$, $x \in X$ вважається рівномірно обмеженою функцією

$$\|q(x)\| := \sup_{x \in X} q(x) < \infty.$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathcal{X}$ задає ймовірності переходу *вкладеного ланцюга Маркова* (ВЛМ)

$$x_n := x(\tau_n), \quad n \geqslant 0,$$
$$P(x, B) = \mathcal{P}\{x_{n+1} \in B / x_n = x\}.$$

Моменти марківського відновлення τ_n, $n \geqslant 0$ визначають моменти стрибків процесу $x(t)$, $t \geqslant 0$. Отже, час перебування у станах визначається співвідношенням

$$\theta_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n, \quad n \geqslant 0, \quad \tau_0 = 0$$

і задається функціями розподілу

$$\mathcal{P}\{\theta_{n+1} \leqslant t / x_n = x\} = 1 - e^{-tq(x)}, \quad t \geqslant 0.$$

Марківський процес відновлення (МПВ) x_n, θ_n, $n \geqslant 0$, задається напівмарківським ядром

$$\mathcal{P}\{x_{n+1} \in B, \theta_{n+1} \leqslant t / x_n = x\} = P(x, B)(1 - e^{-tq(x)}).$$

Стаціонарний розподіл ВЛМ визначається рівнянням

$$\rho(B) = \int_X \rho(dx) P(x, B), \quad B \in \mathcal{X}, \quad \rho(X) = 1.$$

Стаціонарний розподіл процесу $x(t)$, $t \geqslant 0$ задається співвідношенням

$$\pi(dx) q(x) = q\rho(dx), \quad q = \int_X \pi(dx) q(x).$$

Введемо лічильний процес

$$\nu(t) := \max\{n : \ \tau_n \leqslant t\}, \ \ t \geqslant 0,$$

який визначає кількість стрибків процесу $x(t)$, $t \geqslant 0$ на відрізку часу $[0, t]$. Зауважимо, що за означенням лічильний процес $\nu(t)$, $t \geqslant 0$, неперервний праворуч і $\nu(\tau_n) = n$, $n \geqslant 0$.

2. *Дискретна стохастична процедура* (ДСП) у марківському випадковому середовищі задається рекурентним співвідношенням

$$(I) \qquad u_{n+1}^\varepsilon = u_n^\varepsilon + \varepsilon a_n^\varepsilon R(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), \ \ n \geqslant 0. \tag{2}$$

Функція регресії $R(u, x)$, $u \in R^d$, $x \in X$ задовольняє певним умовам, що будуть наведені далі. Послідовність чисел a_n^ε, $n \geqslant 0$ визначається значеннями неперервної функції $a(t)$, $t \in R_+ = [0, \infty)$

$$a_n^\varepsilon = a(\varepsilon n), \ \ n \geqslant 0,$$

що задовольняє звичайним умовам збіжності стохастичної процедури [2]:

$$a(t) > 0, \ \ \int_0^\infty a(t)dt = \infty, \ \ \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty. \tag{3}$$

Процес x_n^ε, $n \geqslant 0$ визначається через $x(t)$, $t \geqslant 0$ [5] співвідношенням

$$x_n^\varepsilon = x(n/\varepsilon), \ \ \varepsilon > 0.$$

Введемо *дискретну детерміновану рекурентну процедуру* (ДРП)

$$(II) \qquad \widehat{u}_{n+1}^\varepsilon = \widehat{u}_n^\varepsilon + \varepsilon a_n^\varepsilon R(\widehat{u}_n^\varepsilon), \ \ n \geqslant 0, \tag{4}$$

де усереднена функція регресії $R(u)$ визначається формулою

$$R(u) = q \int_X \rho(dx) R(u, x). \tag{5}$$

Поряд з ДСП I розглядатимемо *стрибкову стохастичну процедуру* (ССП)

$$(III) \qquad u^\varepsilon(t) = u_0 + \varepsilon \sum_{n=0}^{\nu(t/\varepsilon)} a_n^\varepsilon R(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), \ \ t \geqslant 0. \tag{6}$$

З'язок ДСП I з ССП III визначається рівністю

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\varepsilon \tau_n), \ \ n \geqslant 0, \tag{7}$$

тобто ДСП I є *вкладеною* в ССП III.

Зворотний зв'язок ССП III з ДСП I визначається співвідношенням

$$u^\varepsilon(t) = u_{\nu(t/\varepsilon)}^\varepsilon(t). \tag{8}$$

Крім того, використовуватимемо *неперервну рекурентну процедуру* (НРП), яка визначається еволюційним рівнянням

$$(IV) \qquad du(t) = a(t)R(u(t))dt, \ \ t \geqslant 0, \ \ u(0) = u_0. \tag{9}$$

3. Як відомо [2], процедура стохастичної апроксимації Робінсона-Монро була запропонована для обчислення кореня u_0 рівняння регресії

$$R(u) = 0, \ \ u \in R^d. \tag{10}$$

Розглядаючи стохастичний експеримент для обчислення кореня рівняння (10), робимо висновок, що вигляд функції регресії змінюється під впливом випадкових факторів. Надалі будемо вважати, що випадкові фактори описуються однорідним стрибковим марківським процесом $x(t)$, $t \geqslant 0$, у стандартному фазовому просторі $(X, \mathcal{X})$ з породжуючим оператором Q, (1) та стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \mathcal{X}$, $\pi(B) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathcal{P}\{x(t) \in B/x(0) = x\}$ рівномірно за $B \in \mathcal{X}$ та $x \in X$.

Функція регресії $R(u, x)$ тепер залежить від стану $x \in X$ марківського середовища. Ергодичність марківського процесу $x(t)$, $t \geqslant 0$ забезпечує дію принципу усереднення (5). Використовуючи принцип усереднення, виявляється, що збіжність неперервної рекурентної процедури IV забезпечує збіжність ССП III. Збіжність ДРП II забезпечує збіжність НРП IV. Враховуючи, що ДСП I є вкладеною в ССП III, робимо висновок, що збіжність ДРП II забезпечує збіжність ДСП I. Така програма подальшого аналізу.

4. Доведемо збіжність ССП III. Для цього розглянемо еволюційну систему

$$du(t)/dt = R(u(t)). \tag{11}$$

Нехай $V(u)$ — функція Ляпунова для (11), а $u_0 = 0$.

Теорема. *Нехай еволюційна система (11) рівномірно експоненціально стійка і функція $R(u)$ має обмежені перші дві похідні та виконуються оцінки:*

$$R(u)V'(u) \leqslant -c_0 V(u), \tag{12}$$

$$|R(u, x)\widetilde{R}'_u(u, x)V'(u)| \leqslant c_1 V(u), \tag{13}$$

$$|\widetilde{R}(u, x)V''(u)R(u, x)| \leqslant c_2 V(u), \tag{14}$$

де

$$\widetilde{R}(u, x) := R(u) - R_1(u, x), \tag{15}$$

$$R_1(u, x) := \int\limits_X Q(x, dy)R(u, y), \tag{16}$$

$$c_i > 0, \quad (i = \overline{0, 2}).$$

Крім того,

$$|R(u) \leqslant c(1 + |u|^2), \quad (u \to \infty). \tag{17}$$

Тоді разом із збіжністю НРП IV:

$$u(t) \to 0, \quad t \to \infty, \tag{18}$$

є збіжність за ймовірністю і в середньому квадратичному ССП III:

$$u^\varepsilon(t) \to 0, \quad t \to \infty \tag{19}$$

при всіх $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ — достатньо мале.

Доведення. Передусім зауважимо, що ССП III разом із марківським процесом $x(t)$, $t \geqslant 0$, утворює марківський процес.

Лема 1. *Двокомпонентний марківський процес* $u^\varepsilon(t)$, $x^\varepsilon(t) := x(t/\varepsilon)$, $t \geqslant 0$, *визначається породжуючим оператором*

$$L_t^\varepsilon \varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}[Q + R_t^\varepsilon]\varphi(u,x), \tag{20}$$

де оператори R_t^ε *задаються так:*

$$R_t^\varepsilon \varphi(u,x) := \int\limits_X Q(x,dy)[\varphi(u + \varepsilon a_t^\varepsilon R(u,y), y) - \varphi(u,y)], \tag{21}$$

а ядро $Q(x, dy)$ *визначають за формулою*

$$Q(x,dy) := q(x)P(x,dy).$$

Доведення леми 1. Аналогічне доведенню подібної леми 1 в [1, с. 83-84].

Оператор L_t^ε на двічі неперервно диференційованих за u функціях $\varphi(u,x)$ має асимптотичне представлення:

$$L_t^\varepsilon \varphi(u,x) = [\varepsilon^{-1}Q + a_t^\varepsilon R(x)]\varphi(u,x) + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2\theta_\varepsilon(u,x), \tag{22}$$

де

$$R(x)\varphi(u,y) = \int\limits_X Q(x,dy)R(u,y)\varphi'_u(u,y), \tag{23}$$

а залишкова функція $\theta_\varepsilon(u,x)$ допускає оцінку

$$|\theta_\varepsilon(u,x)| \leqslant c_\varepsilon(1 + |u|^2), \quad c_\varepsilon \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{24}$$

Тепер доведення теореми 1 завершується за схемою доведення теореми усереднення з використанням умов збіжності марківських процесів [1, с. 105-108].

Розглянемо *збурену функцію Ляпунова*

$$V^\varepsilon(u,x,t) = V(u) + \varepsilon a_t^\varepsilon V_1(u,x), \tag{25}$$

де $V(u)$ є функція Ляпунова для еволюційної системи (11), що задовольняє умовам

$$R(u)V'(u) \leqslant -cV(u), \quad c > 0, \tag{26}$$

$$V(u) \leqslant c_3|u|^2, \quad |V'(u)| \leqslant c_4|u|, \quad |V''(u)| \leqslant c_5, \tag{27}$$

а функція збурення $V_1(u,x)$ визначається розв'язком рівняння

$$QV_1(u,x) = \int\limits_X Q(x,dy)\widetilde{R}(u,y)V'(u). \tag{28}$$

Розглянемо дію породжуючого оператора L_t^ε на збурену функцію Ляпунова $V^\varepsilon(u,x,t)$.

$$\begin{aligned} L_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x,t) &= [\varepsilon^{-1}Q + a_t^\varepsilon R(x)][V(u) + \varepsilon a_t^\varepsilon V_1(u,x)] + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2\theta_\varepsilon(u,x) = \\ &= a_t^\varepsilon QV_1(u,x) + a_t^\varepsilon R(x)V(u) + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2R(x)V_1(u,x) + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2\theta_\varepsilon(u,x) = \\ &= a_t^\varepsilon[QV_1(u,x) + R(x)V(u)] + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2RxV_1(u,x) + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2\theta_\varepsilon(u,x). \end{aligned}$$

Вираз у квадратних дужках згідно з (28) визначається рівністю

$$QV_1(u,x) + R(x)V(u) = R(u)V'(u). \tag{29}$$

Далі нехай R_0 – потенціал зведено-оборотного оператора Q, тоді розв'язок рівняння (28) можна подати у вигляді

$$V_1(u,x) = R_0(\widetilde{R}(u,x)V'(u)). \tag{30}$$

Оскільки згідно з (23)

$$R(x)V_1(u,x) = \int_X Q(x,dy)R(u,y)V'_{1u}(u,y), \tag{31}$$

то, враховуючи (30), маємо

$$R(x)V_1(u,x) = \int_X Q(x,dy)R(u,y)(R_0(\widetilde{R}(u,y)V'(u)))'_u =$$

$$= \int_X Q(x,dy)R(u,y)(R_0(\widetilde{R}'_u(u,y)V'(u) + \widetilde{R}(u,y)V''(u))). \tag{32}$$

Згідно з оцінками (13), (14) для $R(x)V_1(u,x)$ маємо

$$|R(x)V_1(u,x)| \leqslant c_6 V(u). \tag{33}$$

Використовуючи оцінки (26) та (33), маємо остаточну нерівність

$$|L_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x,t)| \leqslant a_t^\varepsilon(-cV(u) + c_6\varepsilon V(u)) + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2\theta_\varepsilon(u) \leqslant$$

$$\leqslant -a_t^\varepsilon(c - c_6\varepsilon)V(u) + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2\theta_\varepsilon(u) \leqslant -c_8 a_t^\varepsilon V(u) + \varepsilon(a_t^\varepsilon)^2\theta_\varepsilon(u), \tag{34}$$

де $\theta_\varepsilon(u) := \max_{x\in X}|\theta_\varepsilon(u,x)|$, а $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = c/c_6$.

Згідно з теоремою Невельсона-Хасмінського [2, с. 100-101] маємо збіжність (19).

Нагадаємо, що функція $R(u)$ є усередненням функції $R(u,y)$ згідно з (5). Отже, для правої частини (28) виконується умова розв'язності:

$$\prod \int_X Q(x,dy)\widetilde{R}(u,y)V'(u) = \int_X \pi(dx)q(x)\int_X P(x,dy)\widetilde{R}(u,y)V'(u) =$$

$$= q\int_X \rho(dx)\int_X P(x,dy)\widetilde{R}(u,y)V'(u) = q\int_X \rho(dy)[R(u) - R(u,y)]V'(u) = 0.$$

Якщо функція Ляпунова для (11) задовольняє додатковим умовам в околі точки рівноваги функції регресії та на нескінченності, тоді можна сформулювати збіжність ССП III із ймовірністю 1.

Теорема 2. *(IV → III) Нехай функція Ляпунова $V(u)$ для (11) задовольняє умовам теореми 1 і додатково для будь-якого $\delta > 0$*

$$\inf_{0<\delta<|u|\leqslant 1/\delta} V(u) > 0, \quad \text{та} \quad V(u) \to \infty, \quad \text{при} \quad u \to \infty. \tag{35}$$

Тоді для кожного $u = u^\varepsilon(0) \in R^d$ ССП III збігається з ймовірністю 1:

$$\mathcal{P}\left\{\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = 0\right\} = 1. \tag{36}$$

Доведення теореми 2 ґрунтується на асимптотичному співвідношенні (22). Тепер додаткові умови (35) на функцію Ляпунова $V(u)$ забезпечують можливість застосування теореми збіжності марківського процесу до множини рівноваги [2, с. 58-60].

5. *Збіжність дискретної стохастичної процедури* I. Основна мета нашого дослідження – довести збіжність ДСП I у марківському середовищі за умови збіжності ДРП II з функцією регресії $R(u)$, що є результатом усереднення (5) функції регресії $R(u,x)$. Для цього досить довести, що збіжність ДРП II забезпечує збіжність НРП IV.

Лема 2. *[3,5]. Якщо функція регресії $R(u)$ задовольняє умовам Ліпшиця*

$$|R(u) - R(u')| \leqslant C|u - u'|,$$

тоді з ймовірністю 1, для будь-якого $T > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{n \leqslant T/\varepsilon} |u_n^\varepsilon - u(\varepsilon n)| = 0.$$

Лема 3. *Збіжність ДРП II забезпечує збіжність НРП IV при всіх $q \leqslant \varepsilon_0$ — достатньо мале.*

З теореми 1 і лем 2,3 випливає теорема 3.

Теорема 3. *(II $\to$ I) Із збіжності ДРП II випливає збіжність ДСП I.*

Автор висловлює вдячність академіку НАН України Королюку В.С. за постановку задачі і постійну увагу до статті під час її написання.

---

1. *Королюк В.С.* Стохастичні моделі систем. – К., 1993.
2. *Невельсон М.Б., Хасминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекурентное оценивание. – М., 1972.
3. *Скороход А.В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – К., 1987.
4. *Королюк В.С., Свищук А.В.* Полумарковские случайные эволюции. – К., 1992.
5. *Hoppensteadt, F.,Salehi, H., Skorokhod A.* Discrete Time Simigroup Transformations with Random Perturbations// Jour. of Dyn. And Diff.Eqs. – 1997. – 3. – P. 463-505.

J. Chabanyuk

DISCRETE STOCHASTIK PROCEDURE IN MARKOV ACCIDENTAL ENVIRONMENT

The procedure of stochastic Robinson-Monro approximation is considered for calculation of the root of regression equation when regression function depends on influence of accidental faktors. The ergodicity of Markov process that decribes the outdoor environment allows to use the everaging principle. This gives a possibility to form for discrete stochastic procedure a row of procedures: determined reccurence procedure, stochastic procedure, jump and continuous stochastic procedure. The convergence of diskrete stochastic procedure is proved by means of the solution of singular perturbasion problem where Lyapunov function and nesting of corresponding procedures are used.

Стаття надійшла до редколегії 05.02.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат.2000.Вип.56.С.185–192 *Ser.Mech-Math.2000.Vol.56.P.185–192*

УДК 517.956

Уляна Ярка

СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Крайові задачі з однаковим спектром для лінійних диференціальних рівнянь вивчались у працях [1 – 4]. У [2] досліджено властивості розв'язків граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь на скінченому інтервалі. В цій праці результати цієї публікації узагальнено для випадку диференціально-операторних рівнянь.

Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, $A : H \to H, A = A^* > 0, \sigma_p(A) = \{z_k : z_k = O(k^\alpha), k \to \infty, \alpha > 0\}$, $V(A) = \{v_k \in H : Av_k = z_k v_k, \| v_k \|_H = 1, (v_k, v_m)_H = 0, k \neq m, k, m = 1, 2, \ldots\}$, $H_1 = \{f(t) : f : (0,1) \to H, \|f(t)\|_H \in L_2(0,1)\}$, $W_2^{2n}((0,1), H) = \{v \in H_1, D_t^{2n} v(t) \in H_1, A^{2n} v(t) \in H_1\}$, $\|v\|^2_{W_2^{2n}} \equiv \|D_t^{2n} v\|^2_{H_1} + \|A^{2n} v\|^2_{H_1}$, $\|u(t)\|_{H_1} = \|\|u(t)\|_H\|_{L_2(0,1)}$, D_t – сильна похідна в H_1 [1], $H_n = \{v : v(1-t) = v(t)\}$, $H_н = \{v : v(1-t) = -v\}$.

Розглянемо задачу:

$$\mathcal{L}u(t) \equiv \mathcal{L}_0 u(t) + \triangle\mathcal{L}u(t) = f(t);$$
$$\mathcal{L}_0 u(t) \equiv (-1)^n D_t^{2n} u(t) + A^{2n} u(t) \ \ (t \in (0,1)) \tag{1}$$
$$l_{2j+1} u \equiv D_t^{2j} u(0) - D_t^{2j} u(1) = 0,$$
$$l_{2j+2} u \equiv D_t^{2j} u(0) + D_t^{2j} u(1) = 0 \ (j = \overline{0, n-1}), \tag{2}$$

де

$$\triangle\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{2n-1} b_j A^j (D_t^{2n-j-1} u(t) - $$
$$- (-1)^j D_t^{2n-j-1} u(1-t)) \ (b_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, 2n-1}).$$

Введемо в розгляд оператори $L_0 : H \to H; L : H \to H$,

$$L_0 u \equiv \mathcal{L}_0 u; u \in D(L_0), \ D(L_0) \equiv \{u(t) \in W_2^{2n}((0,1), H) :$$
$$l_p u = 0, \ p = \overline{1, 2n}\}; \ Lu \equiv \mathcal{L}u, u \in D(L), \ D(L) \equiv D(L_0).$$

Методом відокремлення змінних можна показати, що оператор L_0 має власні значення $\lambda_{k,s} = (\pi k)^{2n} + z_s^{2n}$ $(k, s \in \mathbb{N})$ та систему $V(L_0) = \{v^0_{k,s} \in H_1 : v^0_{k,s} = \sqrt{2} \sin \pi k t v_s, \ k, s \in \mathbb{N}\}$ власних функцій, яка утворює ортонормовану базу в H_1.

Теорема 1. 1. *Точковий спектр $\sigma_p(L)$ оператора L збігається з точковим спектром $\sigma_p(L_0)$ оператора L_0;* **2.** *Система власних функцій оператора L утворює базу Ріса в просторі H_1.*

Доведення. Побудуємо систему власних функцій оператора L . При $k = 2s$, власна функція $v^0_{k,m}(t) = \sqrt{2}\sin 2s\pi t v_m$ оператора L_0 задовольняє умову $\Delta\mathcal{L}v^0_{k,m}(t) = 0$ $(k = 2s,\ s,m \in \mathbb{N})$. Отже, $v_{2s,m}(t) = v^0_{2s,m}(t) = \sqrt{2}\sin 2s\pi t v_m$ $(s,m \in \mathbb{N})$ утворює частину системи власних функцій оператора L, тому і $\lambda_{2s,m}(L_0) = \lambda_{2s,m}(L)$ $(s,m \in \mathbb{N})$. При $k = 2s-1$ власну функцію $v_{k,m}(t)$ оператора L шукаємо у вигляді суми

$$v_{k,m}(t) = v^0_{k,m}(t) + \Delta v_{k,m}(t)v_m \quad (k = 2s-1,\ m \in \mathbb{N}). \tag{3}$$

Визначимо функцію $\Delta v_{k,m}(t) \in L_2(0,1)$. Нехай рівняння $\omega^{2n} = 1$ має корені $\omega_q = \exp\left(i(q-1)\frac{\pi}{n}\right)$ $(q = \overline{1,2n})$. Для диференціального рівняння

$$(-1)^n D_t^{2n} v(t) = \mu_{2s-1}v(t), \quad \mu_{2s-1} = \pi^{2n}(2s-1)^{2n}\ (s \in \mathbb{N}) \tag{4}$$

виберемо фундаментальну систему розв'язків:

$$\begin{aligned}
&Y_1 = \cos(2s-1)\pi t \quad , Y_{n+1}(s,t) = \sin(2s-1)\pi t;\\
&Y_q(s,t) \equiv \exp i\pi(2s-1)\omega_q t - \exp i\pi(2s-1)\omega_q(1-t);\\
&Y_{n+q}(s,t) \equiv \exp i\pi(2s-1)\omega_q t + \exp i\pi(2s-1)\omega_q(1-t)\ (q = \overline{2,n}).
\end{aligned}$$

Невідому функцію $\Delta v_{2s-1,m}(t)$ шукаємо у вигляді суми

$$\begin{aligned}
\Delta v_{2s-1,m}(t) = C^0_{s,m}\left(t - \frac{1}{2}\right)\sin(2s-1)\pi t +\\
+ \sum_{p=2}^{n} C^p_{s,m} Y_p(s,t) + C^1_{s,m}\cos(2s-1)\pi t.
\end{aligned} \tag{5}$$

Підставляючи (3), (5) у співвідношення $\mathcal{L}v_{k,m}(t) = \lambda_{k,m}v_{k,m}(t)$, $(k,m \in \mathbb{N})$, одержимо

$$\begin{aligned}
&((-1)^n D_t^{2n} + z_m^{2n} - \lambda_{2s-1,m})\Delta v^0_{2s-1,m}(t)v_m = -\Delta L v^0_{2s-1,m}(t)v_m,\\
&((-1)^n D_t^{2n} - (2s-1)^{2n})\left(\sum_{p=2}^{n} C^p_{s,m}Y_p(s,t) + C^1_{s,m}\cos(2s-1)\pi t +\right.\\
&\qquad\qquad \left. + C^0_{s,m}\left(t-\frac{1}{2}\right)\sin(2s-1)\pi t\right) =\\
&= -2\sqrt{2}\sum_{j=1}^{n} b_j z_m^{2j-1}(2s-1)^{2j-1}\pi^{2j-1}\cos(2s-1)\pi t\ (s,m \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Враховуючи (4), одержимо

$$\begin{aligned}
&C^0_{s,m}2\pi(-1)^{n-1}(-1)^{n-1}(2s-1)^{2n-1}\cos(2s-1)\pi t = -2\sqrt{2}\times\\
&\times\sum_{j=1}^{n} b_j z_m^{2j-1}(2s-1)^{2j-1}\pi^{2j-1}\cos(2s-1)\pi t\ (s,n,m \in \mathbb{N}, b_j \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Отже,

$$C^0_{s,m} = -\sqrt{2}\sum_{j=1}^{n} b_j z_m^{2j-1}(2s-1)^{2j-2n}\pi^{2j-2}\ (s,m\in\mathbb{N}).$$

Для визначення $C^p_{s,m}$ $(p=\overline{1,n})$ підставимо (5) в крайові умови (2). Оскільки усі функції з (5) належать множині H_n, то частина умов (2), а саме $l_{2j+1}u=0$ $(j=\overline{0,n-1})$ виконується автоматично. Далі, підставляючи (5) у $l_{2j+2}u=0(j=\overline{0,n-1})$, одержимо систему рівнянь стосовно невідомих $\{C^j_{s,m}\}^n_{j=1}$ $(s,m\in\mathbb{N})$:

$$\begin{cases} -2C^1_{s,m}+\cdots+2C^n_{s,m}(1-\exp i\pi(2s-1)\omega_n)=0,\\ -2(-\pi^2(2s-1)^2)C^1_{s,m}+\cdots+2(-\pi^2(2s-1)^2)\omega_n^2C^n_{s,m}=\\ \qquad\qquad =-2C^0_{s,m}2(2s-1)\pi,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ -2(-1)^{n-2}\pi^{2n-2}(2s-1)^{2n-2}C^1_{s,m}+\cdots+2(-1)^{n-2}\pi^{2n-2}\times\\ \times(2s-1)^{2n-2}C^n_{s,m}\omega_n^{2n-2}=2(-1)^{n-3}C^0_{s,m}\times\\ \times(2n-2)(2s-1)^{2n-3}\pi^{2n-3}\ (s,m\in\mathbb{N}). \end{cases}$$

Ці співвідношення після очевидних спрощень і заміни: $\tilde{C}^0_{s,m}\equiv 2C^0_{s,m}(2s-1)^{-1}\pi^{-1}$, $\tilde{C}^1_{s,m}\equiv C^1_{s,m},\cdots,\tilde{C}^j_{s,m}\equiv C^j_{s,m}(1-\exp i\pi(2s-1)\omega_j)$ можна подати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \tilde{C}^1_{s,m}+\cdots+\tilde{C}^n_{s,m}=0,(s,m\in\mathbb{N})\\ \tilde{C}^1_{s,m}+\cdots+\omega_n^2\tilde{C}^n_{s,m}=-2C^0_{s,m}(2s-1)^{-1}\pi^{-1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \tilde{C}^1_{s,m}+\cdots+\omega_n^{2n-2}\tilde{C}^n_{s,m}=-2C^0_{s,m}(2s-1)^{-1}\pi^{-1}. \end{cases}$$

Останню систему розв'язуємо методом Крамера. Нехай

$$\Delta^0_{s,m}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \omega_2^2 & \dots & \omega_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega_2^{2n-1} & \dots & \omega_n^{2n-2} \end{vmatrix}=\prod_{\binom{r=1}{q>r}}^{n}(\omega_g^2-\omega_r^2),\quad \omega_1=1,$$

$$\Delta^1_{s,m}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \omega_2^2 & \dots & \omega_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega_2^{2n-1} & \dots & \omega_n^{2n-2} \end{vmatrix}=\Delta^0_{s,m}-\prod_{j=2}^{n}\omega_j^2\prod_{\binom{q,r=1}{q>r}}^{n}(\omega_q^2-\omega_r^2),$$

$$\Delta^l_{s,m}=(-1)^l\prod_{\binom{j=1}{j\neq l}}^{n}\omega_j^2\prod_{\left(\binom{q,r=1}{q>r}\atop{q,r\neq l}\right)}(\omega_q^2-\omega_r^2)\ (s,m\in\mathbb{N}).$$

Враховуючи, що $\prod\limits_{j=2}^{n}\omega_j^2=\omega_2^2\omega_2^4\ldots\omega_2^{2n-2}=\omega^{2\frac{1}{2}(n-1)n}=(-1)^{n-1}$, одержимо

$$\prod_{\binom{j=2}{q\neq j}}^{n}\omega_q^2=\omega_q^{-2}\prod_{j=2}^{n}\omega_j^2=(-1)^{n-1}\omega_{n-q}^2=(-1)^{n-1}\omega_q^{-2};$$

$$\frac{\Delta^1_{s,m}}{\Delta^0_{s,m}} = 1 + \frac{(-1)^n}{(\omega_n^2-1)(\omega_{n-1}^2-1)\dots(\omega_2^2-1)} \qquad (s,m\in\mathbb{N}),$$
$$\frac{\Delta^q_{s,m}}{\Delta^0_{s,m}} = \frac{(-1)^{q+n-1}}{(\omega_n^2-\omega_q^2)\dots(\omega_{q+1}^2-\omega_q^2)(\omega_q^2-\omega_{q-1}^2)\dots(\omega_q^2-\omega_1^2)} =$$
$$= \frac{(-1)^{n-q}}{(\omega_n^2-\omega_q^2)\dots(\omega_1^2-\omega_q^2)} \qquad (s,m\in\mathbb{N}),$$
$$\widetilde{C}^q_{s,m} = (-1)^n \prod_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{n} (\omega_j^2-\omega_q^2)^{-1} 2(2s-1)^{-1}\pi^{-1} C^0_{j,m}\,,$$
$$C^q_{s,m} = (-1)^n 2\prod_{j=1}^{n}(\omega_j^2-\omega_q^2)^{-1}(2s-1)^{-1}(\pi)^{-1}C^0_{s,m} =$$
$$= \frac{\theta_q}{(2s-1)\pi}C^0_{s,m}, \text{де} \quad \theta_q = (-1)^n 2\prod_{j=1}^{n}(\omega_j^2-\omega_q^2)^{-1};$$
$$C^1_{s,m} = -(1+(-1)^n)\prod_{r=2}^{n}(\omega_2^2-1)^{-1}\frac{1}{(2s-1)^{-1}\pi^{-1}}C^0_{s,m} =$$
$$= \frac{\theta_1}{(2s-1)\pi}C^0_{s,m}(\ s,m\in\mathbb{N}),$$
$$\Delta v_{s,m} = C^0_{s,m}\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)\sin(2s-1)\pi t + \frac{\theta_1}{(2s-1)\pi}\cos(2s-1)\pi t + \right.$$
$$\left. + \frac{\theta_2}{(2s-1)\pi}Y_2(s,t) + \dots + \frac{\theta_n}{(2s-1)\pi}Y_n(s,t)\right)\ (s,n\in\mathbb{N}).$$

Доведемо, що система $V(L)$ є тотальною [2] в просторі H_1. Візьмемо довільний елемент $h\in H_1$, який можна подати у вигляді $h = h_1 + h_0$, де $h_1 \in H_н$, $h_0 \in H_n$. Для $k=2s$ маємо: $(h, v_{2s,m}(t)) = (h_0+h_1, v^0_{2s,m}(t)) = (h_1, v^0_{2s-1,m}(t))$ $(s,m\in\mathbb{N})$. Оскільки $\{v^0_{2s,m}(t)\}_{s=1}^{\infty}$ є тотальною в просторі $H_н$, то $h_1=\theta$. Тому $h=h_0$. Для $k=2s-1$ одержуємо: $(h_0, v_{2s-1,m}(t)) = (h_0, v^0_{2s-1,m}(t) + \Delta v_{2s-1,m}(t)v_m) = (h_0, v^0_{2s-1,m}(t)) = 0$ $(s,m\in\mathbb{N})$, з тотальності $\{v^0_{2s-1,m}(t)\}$ в просторі H_n випливає, що $h_0=\theta$, а отже $h\equiv\theta$. Отож, система $V(L)$ – тотальна в H. Оскільки в гільбертовому просторі поняття тотальності та повноти еквівалентні, то $V(L)$ повна в H_1. Доведемо, що ця система є мінімальною, тобто існує система біортогональна до неї. Елементи системи $V(L)$ будуємо у вигляді:

$$v_{2s-1,m}(t) = v^0_{2s-1,m}(t) + \Delta v_{2s-1,m}(t)v_m,\ \Delta v_{2s-1,m}(t) = \sum_{p=1}^{\infty} K^{2s-1}_{2p}\sin 2p\pi t v_m.$$

Знайдемо K^{2s-1}_{2p}. Оскільки

$$(L_0+\Delta L)(v^0_{2s-1,m}(t) + \Delta v_{2s-1,m}(t)v_m) = \lambda_{s,m}(v^0_{2s-1,m}(t) + \Delta v_{2s-1,m(t)}v_m),$$
$$(L_0-\lambda_{s,m})\sum_{p=1}^{\infty}K^{2s-1}_{2p}\sin 2p\pi t = -\Delta L v^0_{2s-1}(t),$$
$$\sum_{p=1}^{\infty}(\lambda_{2p} + z_m^{2n} - \lambda_{2s-1})K^{2s-1}_{2p}\sin 2p\pi t = -2\sqrt{2}\sum_{j=1}^{n} b_{2j-1}z_m^{2j-1}\times$$

$$\times \{(2s-1)\pi\}^{2j-1}\cos(2s-1)\pi t \quad (s,m\in\mathbb{N}),$$

то враховуючи, що

$$\cos(2s-1)\pi t = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{4s}{(2(p-s)+1)(2(s+p)-1)}\sin 2p\pi t,$$

одержимо

$$((2p\pi)^{2n}-[(2s-1)\pi]^{2n}+z_m^{2n})K_{2p}^{2s-1} = -2\sqrt{2}\sum_{j=1}^{n} b_{2j-1}z_m^{2j-1}[(2s-1)\pi]^{2j-1}\times$$

$$\times\frac{4s}{(2(p-s)+1)(2(s+p)-1)},$$

$$K_{2p}^{2s-1} = -2\sqrt{2}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} b_{2j-1}z_m^{2j-1}[(2s-1)\pi]^{2j-1}}{(2p\pi)^{2n}-[(2s-1)\pi]^{2n}+z_m^{2n}}\frac{4s}{(2(p-s)+1)(2(s+p)-1)}$$

$(s,m\in\mathbb{N})$.

Вважаємо, що системи $V(L),\widetilde{V}(L)$ біортогональні в сенсі: $(v_{p,m},\widetilde{v}_{q,r}) = \delta_{p,q}\delta_{m,r}$ $(p,q,m,r\in\mathbb{N})$. Біортогональну систему $\widetilde{v}_{s,m}$ будуємо у вигляді:

$$\begin{cases} \widetilde{v}_{2s,m}(t) = v_{2s,m}^0(t) + \Delta\widetilde{v}_{2s,m}(t)v_m \ (s,m\in\mathbb{N}),\\ \text{де } \Delta\widetilde{v}_{2s,m}(t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} M_{2j-1}^{2s}\sin(2j-1)\pi t,\\ \widetilde{v}_{2s-1,m}(t) = v_{2s-1,m}^0(t) \ (s,m\in\mathbb{N}). \end{cases}$$

Параметри M_{2j-1}^{2s} визначаємо з умов біортогональності $(v_{2s-1,m}(t),\widetilde{v}_{2p,m}(t)) = 0$, тому

$$(v_{2s-1,m}^0(t)+\Delta v_{2s-1,m}(t)v_m, v_{2s,m}^0(t)+\Delta\widetilde{v}_{2s,m}(t)v_m)_{H_1} = 0;$$

$$(v_{2s-1,m}^0(t),\Delta\widetilde{v}_{2s,m(t)})_{H_1} + (\Delta v_{2s-1,m}(t), v_{2s,m}^0(t))_{H_1} = 0;$$

$$(\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t,\sum_{j=1}^{\infty}M_{2j-1}^{2s}\sin(2j-1)\pi t)_{H_1} =$$

$$= -\left(\sum_{p=1}^{\infty}K_{2p}^{2s-1}\sin 2p\pi t, \sqrt{2}sin2s\pi t\right)_{H_1}.$$

Отже, $M_{2j-1}^{2j} = -K_{2j}^{2j-1}$при $j=s=p$; в інших випадках $M_{2j-1}^{2s}=0$. Отож, $V(L)$ – повна і мінімальна в H_1.Покажемо, що вона є базою Ріса. Розглянемо допоміжну систему $W(m) = \{w_{k,m}(t)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$w_{2s,m} = \sqrt{2}\sin 2\pi st \ (s\in\mathbb{N}), \tag{6}$$

$$w_{2s-1,m} = \sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t + C_{2s-1,m}^0(t-\frac{1}{2})\sin(2s-1)\pi t. \tag{7}$$

Лема 1. *Система $W(m)$ утворює базу Ріса в $L_2(0,1)$.*

Доведення. Покажемо, що система $W(m)$ повна (тотальна) в $L_2(0,1)$. Нехай $h(t)$ довільний елемент з $L_2(0,1), h(t) = h_n(t)+h_н(t)$, де $h_n(t)\in H_n$,

$$h_н(t)\in H_н, h_n(t) = \sum_{p=1}^{\infty}h_{2p-1}\sqrt{2}\sin(2p-1)\pi t, h_н(t) = \sum_{p=1}^{\infty}h_{2p}\sqrt{2}\sin 2p\pi t.$$

Треба показати: якщо $\int\limits_0^1 h(t)w_{k,t}dt = 0$, то $h \equiv 0$. З (6) маємо

$$\int\limits_0^1 h(t)w_{2s,m}dt = \int\limits_0^1 h\sqrt{2}\sin 2\pi st\,dt = h_{2s} = 0 \ (s \in \mathbb{N}), \ \ h_н(t) \equiv \theta.$$

Отже, з (7) одержуємо

$$\int\limits_0^1 h(t)w_{2s-1,m}dt = \int\limits_0^1 h(t)\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t\,dt + \int\limits_0^1 h(t)C^0_{2s-1,m}\left(t-\frac{1}{2}\right)\sin(2s-1)\pi t\,dt,$$

$$\int\limits_0^1 h(t)C^0_{2s-1,m}\left(t-\frac{1}{2}\right)\sin(2s-1)\pi t\,dt = 0,$$

оскільки $H_n \perp H_н$. Тоді

$$\int\limits_0^1 h(t)\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t\,dt = h_{2s-1} = 0.$$

Система $\{\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t\}_{s\in\mathbb{N}}$ як частина ортонормованої бази цього простору є тотальною в H_n, тому $h_n(t) \equiv \theta$ і отже, $h(t) \equiv \theta$.

Використовуючи метод побудови системи $W(m)$, визначимо систему $\widetilde{W}(m)$ біортогональну до $W(m)$ $(m \in \mathbb{N})$:

$$\begin{cases} \widetilde{w}_{2s,m}(t) = \sqrt{2}\sin 2\pi st + \Delta\widetilde{w}_{2s,m}, \\ \widetilde{w}_{2s-1,m}(t) = \sqrt{2}\sin\pi(2s-1)t \ (s, m \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Розглянемо оператор

$$Q(m) : L_2(0,1) \to L_2(0,1), \ Q(m)\sqrt{2}\sin k\pi t = w_{k,m}(t) = \sqrt{2}\sin k\pi t + \Delta\widetilde{w}_{k,m},$$

де

$$\Delta\widetilde{w}_{k,m} = \begin{cases} 0, & k = 2s \\ \sqrt{2}C^0_{2s-1,m}(t-\frac{1}{2})\sin(2s-1)\pi t, & k = 2s-1. \end{cases}$$

Отже, $Q(m) = E + \Delta Q(m)$, де $\Delta Q(m) : H_н \to 0, \Delta Q(m) : H_n \to H_н$, $(m \in \mathbb{N})$, $[\Delta Q(m)]^2 \equiv \Theta$, Θ – нульовий оператор, E – одиничний в $L_2(0,1)$. Тому

$$\widetilde{w}_{k,m} = (Q^{-1}(m))^*\sqrt{2}\sin k\pi t = (E - (\Delta Q(m))^*)\sqrt{2}\sin k\pi t \ (k, m \in \mathbb{N}).$$

Отже, система $\{W(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ повна і мінімальна в $L_2(0,1)$.

Покажемо, що $\Delta Q(m)$ обмежений оператор для кожного $m \in \mathbb{N}$. Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 h(t)w_{k,m}(t)\right|^2 dt = \sum_{s=1}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 h(t)\sqrt{2}\sin 2s\pi t\,dt\right|^2 + \left|\int\limits_0^1 h(t)(\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t +\right.$$

$$\left. + C^0_{2s-1,m}\left(t-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t)dt\right|^2 \leqslant 2\sum_{s=1}^{\infty}\left|\int\limits_0^1 h(t)\sqrt{2}\sin 2s\pi t\,dt\right|^2 +$$

$$+\left|\int_0^1 h(t)\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t dt\right|^2 + \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 |C^0_{2s-1,m}|^2 \times$$

$$\times\left|\int_0^1 h(t)\sqrt{2}\sin(2s-1)\pi t dt\right|^2 \leqslant 2\left(1+\frac{1}{4}\max_s |C^0_{2s-1,m}|^2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^1 h(t)\sqrt{2}\sin k\pi t dt\right|^2$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{4}\max_s |C^0_{2s-1,m}|^2\right)||h||^2_{L^2(0,1)}.$$

Розглянемо ліву частину:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^1 h(t)w_{k,m}(t)\right|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^1 h(t)(E+\Delta Q(m))\sqrt{2}\sin\pi k t dt\right|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^1 (E+\Delta Q^*(m))h(t)\sqrt{2}\sin\pi k t dt\right|^2 = \int_0^1 \left|(E+\Delta Q^*(m))h(t)\right|^2 dt =$$

$$= ||E-\Delta Q(m)h||^2_{L^2(0,1)}.$$

Отже, $E+\Delta Q^*(m)$ – неперервний оператор в $L_2(0,1)$, а тому оператори $Q(m)$ і $(Q^{-1}(m))^*$ також неперервні. За теоремою Н.К.Барі [4, с. 374] система $W(m)$ – база Ріса в $L_2(0,1)$. Лему доведено.

Тепер доведемо, що система $V(L)$

$$\begin{cases} \sin 2s\pi t, \\ C^0_{2s-1,m}[(t-\frac{1}{2})\sin(2s-1)\pi t + \frac{\theta_1}{(2s-1)\pi}\cos(2s-1)\pi t + \sum\limits_{\gamma=2}^{n}\frac{\theta_\gamma}{(2s-1)\pi}Y_\gamma(s,t)] \end{cases}$$

$(s, m \in \mathbb{N})$ є квадратично близькою до системи (6),(7), тобто

$$\sum_{\gamma=2}^{n}||C^0_{2s-1,m}\frac{\theta_\gamma}{(2s-1)\pi}Y_\gamma(s,t) + C^0_{2s-1,m}\frac{\theta_1}{(2s-1)\pi}\cos(2s-1)\pi t||^2 < \infty.$$

Враховуючи, що

$$||Y_\gamma(s,t)||^2_{H_1} = \int_0^1 Y_\gamma(s,t)\bar{Y}_\gamma(s,t)dt = \int_0^1 |e^{i\pi(2s-1)\omega_\gamma t} - e^{i\pi(2s-1)\omega_\gamma(1-t)}|\times$$

$$\times|e^{-i\pi(2s-1)\omega_\gamma t} - e^{-i\pi(2s-1)\omega_\gamma(1-t)}|dt = \int_0^1 (2-2\cos\pi(2s-1)Re\omega_\gamma(2t-1))dt =$$

$$= 2\left(1-\frac{\sin\pi(2s-1)Re\omega_\gamma}{2Re\omega_\gamma\pi(2s-1)}\right) \leqslant 2,$$

$||C^0_{2s-1,m}|| \leqslant \sqrt{2}|b_n|z_m^{2n-1}\pi^{2n-1}$, для кожного z_m.

Матимемо

$$\sum_{\gamma=2}^{n}||C^0_{2s-1,m}\frac{\theta_\gamma}{(2s-1)\pi}Y_\gamma(s,t) + C^0_{2s-1,m}\frac{\theta_1}{(2s-1)\pi}\cos(2s-1)\pi t||^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\|C^0_{2s-1,m}\|^2 \frac{M^2}{[(2s-1)\pi]^2}(\sum_{\gamma=2}^{n}\|Y_{\gamma(s,t)}\|^2+1) \leqslant \frac{20\ M^2(n-1)}{\{(2s-1)\}^2} b_n^2 z_m^{4n-2}\pi^{4n-4} < \infty,$$

при $M = \max\limits_{1\leqslant\gamma\leqslant n} |\theta_\gamma|$ $(m \in \mathbb{N})$. Отже, система $V(L)$ є базою Ріса в $L_2(0,1)$. Теорему доведено.

---

1. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщённый метод разделения переменных. – К., 1993.
2. *Гохберг Н. С., Крейн М. Т.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М., 1965.
3. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К., 1984.
4. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І., Ярка У. Б.* Збурення крайових задач для звичайних крайових задач другого порядку // Вісн. держ. ун-ту "Львівська політехніка" ПМ. – 1998. – Т. 1. – 337. – С. 70–73.

U. Yarka

BOUNDARY VALYE PROBLEMS FOR ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS WHITH SIMILAR SPECTRUM

We consider the properties of a nonlocal boundary value problem for a class of abstract differential equation. For a corresponding spectral problem we study the problem of invariance under isospectral perturbation of some properties of the operator, namely, completeness, minimality, basis of the Riss of the system of root functions.

Стаття надійшла до редколегії 15.02.2000

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним їх доведенням. Не рекомендується робити великі огляди вже опублікованих результатів. Посилання на неопубліковані роботи не допустиме.

2. Текст статті повинен бути виконаний на комп'ютері, українською мовою. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

резюме англійською мовою, зазначивши прізвище автора та назву статті;

електронний варіант статті та резюме на дискеті 3,5" редколегія повертає авторові (тексти можна надіслати за адресою *holovaty@yahoo.com*);

довідка про автора (співавторів), в якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – \vsize 20.5 true cm, ширина сторінки – \hsize 13 true cm. На першій сторінці потрібно зазначити номер УДК.

Статті, запропоновані іноземними мовами, до публікації не приймаються (треба подати переклад українською мовою).

3. Вимоги до набору:

текст статті створювати в одній з версій TEX'у (формати Plain-TEX, AMS-TEX чи LATEX). Рекомендуємо використовувати стильовий файл amsppt.sty; тексти, набрані в редакторах ChiWriter та Word не приймають;

номери формул ставити з правого боку; нумерувати лише формули, на які є посилання;

у посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

4. Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх потрібно створювати засобами TEX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

5. Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.) у працях:

1. *Грабович А.І.* Назва. – К., 1985.
2. *Кравчук О.М.* Назва// Мат. сб.–1985.–Т. 2. – №2 2.– С.4–20.
3. *Михайленко Г.Д.* Назва.– М., 1993.– 9 с. (Препринт/НАН України. ІППММ; N80.1).
4. Коваленко О. В. Назва: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук. – К,, 1977.
5. *Сенів С.М.* Назва.– К., 1992.– 17 с. – Деп. в ДНТБ України, №2020-1995.
6. *Муравський В.К.* Назва // Нелінійні диференціальні рівняння: Тези доп. Київ, 27 серпня – 2 вересня 1994 р. – К., 1994.– С. 540–551.

Збірник наукових праць

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 56

Видається з 1965 р.

Комп'ютерний набір (видав. пакет $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX).
Підписано до друку 30.06.2000. Формат 70×100/16. Папір друк.
Умовн. друк. арк. 13.5 . Тираж 200. Зам. № 325.

Видавничий центр Львівського національного університету
імені Івана Франка. 79000 Львів, вул. Дорошенка, 41.