ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 24–29

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 24–29

УДК 513.6

# ПРО ГРУПИ РОЗКЛАДУ НОРМУВАНЬ ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИХ ПОЛІВ

**Василь Андрійчук**

*Львівський національний університет імені Івана Франка*

Вивчимо властивості груп розкладу нормувань псевдоглобальних полів, тобто полів алгебричних функцій від однієї змінної з псевдоскінченним [1] полем констант.

Нехай $L/K$ – скінченне розширення Галуа поля алгебричних функцій $K$, $k$ – поле констант поля K. Група Галуа $\mathrm{Gal}(L/K)$ діє на множині всіх нормувань $V_L$ поля $L$: якщо $w \in V_L$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, то $\sigma w$ є нормуванням поля $L$ для якого

$$|a|_{\sigma w} = |\sigma^{-1}a|_w .$$

Якщо $O_w$ – кільце нормування $w$, $M_w$ – максимальний ідеал кільця $O_w$, то $O_{\sigma w} = \sigma O_w$, $M_{\sigma w} = \sigma M_w$. Тому $\sigma$ визначає ізоморфізм полів $O_w/M_v$ та $O_{\sigma w}/M_{\sigma w}$, який ми позначаємо теж $\sigma$. У цих позначеннях група $\mathrm{Gal}(L/\mathrm{K})$ діє на множині плейсів поля $L$ за таким правилом: якщо $\varphi$ – плейс поля $L$, то $\sigma\varphi$ – плейс, для якого

$$\sigma\,\varphi(a) = \sigma(\varphi(\sigma^{-1}a)).$$

Групою розкладу нормування $w$ поля $L$ називають підгрупу $G_w$ групи $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, яка складається з тих елементів $\sigma$ групи $G$, для яких $\sigma w = w$.

Запишемо означення групи розкладу в термінах кілець нормувань, нормувань та плейсів. $G_w = \{\sigma \in G \mid \sigma w = w\} = \{\sigma \in G \mid \sigma M_v = M_v\} = \{\sigma \in G \mid \varphi(a) = 0 \to \varphi(\sigma a) = 0\}$, де $w$ – нормування поля $L$; $M_w$ – максимальний ідеал кільця нормування поля $L$; $\varphi$ – відповідний йому плейс.

Оскільки дивізори (кільця нормувань) класи еквівалентних нормувань та класи еквівалентних плейсів перебувають у взаємно однозначній відповідності, то ми можемо використовувати будь-яке з цих трьох понять залежно від того, яке з них є зручнішим у тому чи іншому контексті.

Нехай тепер $K$ – псевдоглобальне поле. Поле констант $k$ поля $K$ є псевдоалгебрично замкненим (регулярно замкненим у термінології Ю.П.Єршова [2]). Тому (див. напр. [2] або [3], [4]) для псевдоглобальних полів справджується аналог теореми щільності Чоботарьова.

Цей аналог можна формулювати і доводити навіть у більш загальній ситуації. Для того, щоб нагадати його формулювання, введемо деякі необхідні для цього позначення.

Нехай $k$ – псевдоалгебрично замкнене поле; $K$ – скінченнопороджене регулярне розширення поля $k$; $L$ – скінченне розширення Галуа поля $K$, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, а також $l$ – алгебричне замикання поля $k$ в полі $L$, $H = \mathrm{Gal}(l/k)$, $\beta : G \to H$ – гомоморфізм обмеження. Нехай $G(k)$ – абсолютна група Галуа поля $k$, а $\alpha : G(k) \to G$ такий гомоморфізм, що діаграма

$$\begin{array}{ccc} & G(k) & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \\ G^{\beta} & \rightarrow & H \end{array} \tag{1}$$

комутативна. Позначимо групу $\alpha(G(k))$ через $H_1$, підполе сепарабельного замикання $k_s$ поля $k$, відповідне підгрупі $\operatorname{Ker}\varphi$, позначимо через $l_1$. Маємо $H_1 = \mathrm{Gal}\,(l_1/k) \cong G(k)/\operatorname{Ker}\alpha$.

У цих позначеннях правильна така теорема (див. [2], [3], [4]), яку називають аналогом теореми щільності Чоботарьова для псевдоалгебрично замкнених (регулярно замкнених) полів.

**Теорема** (Фрід-Гаран-Жарден). *Нехай $S$ – скінченна підмножина поля $K$. Існує $k$ – плейс $\varphi$: $K \to k$, скінченний на $S$, і його продовження $\varphi_1{:}L \to l$ на поле $L$, нерозгалужене над $\varphi$, групою розкладу якого є $H_1$.*

Ця теорема, застосована до випадку псевдоглобального поля $K$, має важливі наслідки, які ми сформулюємо у вигляді декількох тверджень.

**Твердження 1**. *Нехай $L/K$ – геометричне розширення Галуа псевдоглобального поля $K$ (тобто поля $L$ і $K$ мають одне й те ж псевдоскінченне поле констант). Тоді будь-яка циклічна підгрупа $H_1$ групи $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ є групою розкладу деякого нормування поля $L$. Існує нескінченна кількість нерозгалужених у полі $L$ нормувань $v$ поля $K$ та їхніх продовжень $w$ на поле $L$ таких, що група $H_1$ є групою розкладу нормування $w$.*

Доведення. В умовах твердження 1 у діаграмі (1) підгрупа $H$ є тривіальною. Крім того, кожна циклічна підгрупа групи $G$ ізоморфна факторгрупі групи $G(k)$, оскільки абсолютна група Галуа $G(k)$ псевдоскінченного поля $k$ ізоморфна групі Z – поповненню групи цілих чисел $Z$ щодо топології, визначеної всіма її підгрупами. Розглянувши в діаграмі (1) тривіальний гомоморфізм $\beta$, одержуємо, згідно зі сформульованою вище теоремою, існування плейса $\varphi_1 : L \to l$ з групою розкладу $\mathrm{Im}\,\alpha \cong G(k)/\operatorname{Ker}\alpha$, де $\alpha$ – гомоморфізм групи $G(k)$ у групу $G$, який топологічній твірній групи $G(k)$ ставить у відповідність твірну підгрупи $H_1$. Плейсу $\varphi_1$ відповідає нормування $w$ поля $L$, що має групою розкладу підгрупу $H_1$.

Потрібно ще довести твердження про нескінченність кількості нормувань $w$ з групою розкладу $H_1$. Перш за все, згідно з [5], лише скінченна кількість нормувань поля $K$ є розгалуженими в полі $L$.

Далі, якщо ми маємо нормування $w_1,\ldots,w_n$ з групою розкладу $H_1$, то розглянемо елементи $u_1,\ldots,u_n$ поля $L$ такі, що для відповідних нормуванням $w_1,\ldots,w_n$ плейсів $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ виконується умова $\varphi_i(u_i) = \infty$, $1 \le i \le n$. Згідно з теоремою 2 праці [2, с. 304], плейс $\psi : L \to l$, скінченний на $u_1,\ldots,u_n$. Тому існує нескінченна кількість нееквівалентних плейсів з групою розкладу $H_1$, а отже, і нескінченна кількість нееквівалентних нормувань з цією групою розкладу.

**Наслідок 1.** *В умовах твердження 1 існує нескінченна кількість нормувань поля $K$, що цілком розпадаються в полі $L$.*

Доведення. Нагадаємо, що нерозгалужене нормування $v$ поля $K$ цілком розпадається в полі $L$, якщо група розкладу кожного продовження $w$ нормування $v$ на поле $L$ тривіальна. З твердження 1 випливає, що існує нескінченна кількість нормувань поля $L$ з тривіальною групою розкладу досить розглянути тривіальний гомоморфізм у діаграмі (1).

Розглянемо тепер інший крайній випадок скінченних розширень Галуа псевдоглобального поля $K$ – випадок, коли розширення $L/K$ є розширенням поля констант, тобто $L = lK$, де $l/k$ – скінченне розширення поля констант $k$.

**Твердження 2.** *Нехай* $L = lK$, *де* $l/k$ *– скінченне розширення поля констант псевдоглобального поля* $K$. *Існує нескінченна кількість нормувань* $v$ *поля* $K$ *таких, що їх продовження* $w$ *на поле* $L$ *мають своєю групою розкладу всю групу* $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Доведення. Для степенів розширень $l/k$ та $L/K$ маємо $[l{:}k] = [L{:}K]$. Справді, нехай $z$ – примітивний елемент для розширення $l/k$, $f$ – мінімальний багаточлен над $k$ для елемента $z$. Тоді $f$ залишається незвідним і над полем $K$, інакше коефіцієнти його множників були б багаточленами від коренів багаточлена $f$, тобто були б алгебричними до $K$, бо поле констант $k$ є алгебрично замкненим у $K$. З рівності $[l{:}k] = [L{:}K]$ випливає, що $\mathrm{Gal}(L/K) \cong$ $\cong \mathrm{Gal}(l/k)$, а тому можна взяти діаграму (1)

$$\begin{tikzcd} & G(k) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr] & \\ \mathrm{Gal}(L/K) \arrow[rr, "\beta"] & & \mathrm{Gal}(L/K), \end{tikzcd}$$

в якій $\alpha$ визначене природним гомоморфізмом $G(k) \to \mathrm{Gal}(l/k)$ та ізоморфізмом $\beta$. Тому існування нескінченної кількості нормувань з групою розкладу $\mathrm{Gal}(L/K)$ одержують так само, як і в твердженні 1.

**Наслідок 2.** *В умовах твердження 2 існує нескінченна кількість нееквівалентних нормувань поля* $K$, *що не розпадаються в полі* $L$.

Доведення. Нерозгалужене нормування $v$ поля $K$ не розпадається в полі $L$, якщо воно має єдине продовження $w$ на поле $L$, а це рівносильно тому, що група розкладу нормування $w$ збігається з групою $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Для псевдоглобальних полів правильний сильніший факт, ніж той, який сформульовано в твердженні 2.

**Твердження 3.** *В умовах твердження 2 кожна підгрупа групи* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *є групою розкладу нескінченної кількості нееквівалентних нормувань поля* $L$.

Для доведення твердження нам буде потрібна одна лема.

**Лема.** *Нехай* $C$ *– абсолютно незвідна, неособлива крива, визначена над псевдоскінченним полем* $k$. $k'$ *– скінченне розширення поля* $k$, $[k' : k] = n$. Існує $k'$ – раціональна точка кривої $C$, яка не є її $k''$-раціональною точкою для кожного підполя $k''$, $k \subset k'' \subset k'$.

Доведення. Нехай степінь незвідного багаточлена, що визначає криву $C$, дорівнює $d$. Покажемо спочатку, що твердження леми правильне для випадку скінченного поля $k$ з $q$ елементів, якщо $q$ досить велике. Позначимо через $|C(q^n)|$ кількість точок кривої $C$ з координатами поля з $q^n$ елементів. Згідно з [4, розділ 2, теорема 4, 9] маємо оцінку

$$q^n + 1 - Aq^{n/2} \le \left|C(q^n)\right| \le q^n + 1 + Aq^{n/2}, \tag{2}$$

де $A = (d-1)(d-2)$.

Якщо поле $k''$ є підрозширенням поля $k'$, то $k''$ має $q^{n1}$ елементів, де $n_1 \mid n$. Запишемо оцінку, аналогічну (2), для $C(q^{n1})$:

$$q^{n1} + 1 - Aq^{n1/2} \le \left|C(q^{n1})\right| \le q^{n1} + 1 + Aq^{n1/2}. \tag{3}$$

Нехай $m$ – кількість усіх дільників числа $n$. Загальна кількість точок кривої $C$ з координатами у всіх власних підрозширеннях $k''$ поля $k'$ не перевищує, як це випливає з (3), величини $m(q^{n/2} + 1 + A\ q^{n/4})$.

Звідси та з (2) одержуємо, що кількість $k'$-раціональних точок, координати яких не лежать у жодному власному підрозширенні поля $k'$, не менша ніж

$$q^{n} + 1 - Aq^{n/2} - m(q^{n/2} + 1 + Aq^{n/4}). \tag{4}$$

Величина (4) прямує до нескінченності при $q \to \infty$, тому стає додатною при досить великих $q$.

Отже, використовуючи той факт, що псевдоскінченні поля елементарно еквівалентні ультрадобуткам скінченних полів, достатньо показати, згідно з [1], що твердження леми можна сформулювати мовою логіки першого порядку. У книзі [2, с. 319] розглянуто, як записати мовою першого порядку формулу, яка стверджує, що поле $k$ має принаймні одне розширення степеня $n$, і наведено відповідну формулу. Якщо в згаданій формулі замінити квантори $\exists$ на квантори $\forall$, то одержимо формулу, яка стверджує, що для кожного набору $n^3$ структурних констант $y^{k}{}_{ij}$ $n$-вимірна алгебра над полем $k$ з базою $e_1, \ldots, e_n$, стандартним додаванням та множенням згідно з правилом $e_ie_j = \Sigma y^{k}{}_{ij}e_k$ є полем. З цього погляду елементи розширення $k'/k$ степеня $n$ можна інтерпретувати як елементи з $k^n$, з множенням, визначеним за допомогою структурних констант. Башту розширень полів $k \subset k'' \subset k'$ можна аналогічно описати за допомогою подвійного набору структурних констант, а елементи з поля $k'$ інтерпретувати як елементи з $k^{n1n2}$, причому перші $n_1$ компонент такого вектора ми ототожнюємо з елементами поля $k''$.

У [4] розглянуто також як записати у вигляді формули мови логіки першого порядку твердження про те, що багаточлен, який задає криву $C$, є абсолютно незвідним і не має особливих точок.

Враховуючи ці зауваження, легко переконатися, що твердження леми можна сформулювати (явна формула була б досить громіздкою) мовою логіки першого порядку, а тому лема випливає з твердження 4 [1].

Доведення *твердження 3.* Нехай $\mathrm{Gal}(l/k) = \mathrm{Gal}(L/K) = G$, $H$ – підгрупа групи $G$. За основною теоремою теорії Галуа підгрупі $H$ відповідає підполе $k'$, $k \subset k' \subset l$.

Розглянемо абсолютно незвідну, неособливу криву $C$, що є моделлю поля $K$. Згідно з лемою 6 існує точка $(a, b)$ кривої $C$, координати якої належать полю $k'$ і не належать жодному підрозширенню поля $k'$.

Якщо $(x, y)$ – загальна точка кривої $C$, то зіставлення $(x, y) \to (a, b)$ визначає гомоморфізм $O_{(a,b)} \to k'$ локального кільця точки $(a,b)$ на поле $k'$. Цей гомоморфізм продовжується до $k'$-значного плейса $K \to k'$. Це означає, що існує простий дивізор степеня $[k' : k]$ поля $K$. Для відповідного нормування

$v$ поля $K$ маємо $O_v/M_v \cong k'$, де $O_v$ і $M_v$, відповідно, кільце цілих та ідеал нормування $v$. Якщо $w$ – нормування поля $L$, що продовжує $v$, то, згідно з [4, теорема 2.14, с. 23] $O_w/M_w = l(O_v/M_v) = lk' = l$. Звідси випливає, що групою розкладу нормування $w$ є група $\mathrm{Gal}(l/k') = H$.

**Наслідок 3.** *Нехай $K$ – псевдоглобальне поле. Тоді для кожного додатного натурального числа $m$ існує простий дивізор поля $K$ степеня $m$.*

Твердження 4 дає відповідь на запитання, якими можуть бути групи розкладу нормувань псевдоглобального поля $K$ для розширень, які не обов'язково є геометричними або розширеннями поля констант.

**Твердження 4**. *Для псевдоглобального поля $K$ правильні такі еквівалентні властивості*:

1) *нехай $L/K$ – скінченне розширення Галуа, $l$ – алгебричне замикання поля констант $k$ поля $K$ у полі $L$, $H$ – циклічна підгрупа групи $\mathrm{Gal}(L/K)$, для якої $\mathrm{res}_L H = \mathrm{Gal}(l/k)$. Тоді існує нормування поля $K$ і його продовження на поле $L$, група розкладу якого збігається з групою $H$;*

2) *якщо $L/K$ – циклічне розширення, то існує нормування поля $K$ і його продовження на поле $L$, група розкладу якого збігається з групою $\mathrm{Gal}(L/K)$;*

3) *якщо $L/K$ – циклічне розширення і $a_1,\dots,a_m$ – елементи поля $L$, то існує нормування поля $K$ і його продовження $w$ на поле $L$ таке, що елементи $a_1,\dots,a_m$ цілі щодо $w$, поле лишків нормування $v$ збігається з $k$, а група розкладу нормування $w$ збігається з $\mathrm{Gal}(L/K)$.*

Доведення. Абсолютна група Галуа поля констант $k$ поля $K$ ізоморфна поповненню групи цілих чисел $Z$ щодо топології, визначеної всіма її підгрупами; це вільна топологічна група з однією топологічною твірною. Звідси та з псевдоалгебричної замкнености поля $k$ випливає (див. [4]), що поле $k$ є Фробеніусовим. У [3] показано, що Фробеніусові поля задовольняють властивості 1–3 твердження 4 і що ці три властивості еквівалентні.

**Твердження 5.** *Нехай $K$ – псевдоглобальне поле; $L/K$ скінченне розширення Галуа; $H$ – циклічна підгрупа його групи Галуа $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Існує нескінченна кількість нееквівалентних нормувань поля $L$, групи розкладу яких мають групу $H$ своєю підгрупою.*

Доведення. Нехай спочатку $L/K$ – циклічне розширення. Із зауваження до наслідку 1.4. у праці [3] випливає, що для топологічної твірної $\sigma$ абсолютної групи Галуа $G(k)$ псевдоскінченного поля констант $k$ поля $K$ і довільного елемента $g \in G$ такого, що $\mathrm{res}_L\sigma = \mathrm{res}_L g$ (тут, як і раніше, $l$ – алгебричне замикання поля $k$ у полі $L$), існує $k$ – плейс $\varphi$ поля $K$, для якого $\varphi K = k$, $\varphi L = k_1$ ($k_1$ – скінченне розширення поля $k$). Плейс $\varphi$ визначає ізоморфізм $\varphi^*$, $\varphi^*(\mathrm{res}_{k1}\sigma) = g$ циклічної підгрупи, породженої елементом $\mathrm{res}_{k1}\sigma$, та групи розкладу плейса $\varphi$, яка, отже, є циклічною підгрупою, породженою елементом $g$. Для циклічних розширень твердження 9 доведене.

Нехай тепер $L/K$ – довільне розширення Галуа; $H$ – циклічна підгрупа групи $\mathrm{Gal}(L/K)$; $K_1$ – відповідне підгрупі $H$ підполе поля $L$. За доведеним існує плейс поля $L$, групою розкладу якого в розширенні $L/K_1$ є підгрупа $H$. Зрозуміло, що група розкладу цього плейса в розширенні $L/K$ містить підгрупу $H$.

Що стосується твердження про існування нескінченної кількості нееквівалентних нормувань (тобто нескінченної кількості нееквівалентних плейсів; нагадаємо про еквівалентність мови нормувань, мови кілець нормувань та мови плейсів), то в [3] показано, що з існування плейса із заданою групою розкладу випливає існування плейса з цією ж групою розкладу і скінченного на довільній скінченній підмножині $\{a_1, \ldots, a_n\}$ поля $L$. Тому, маючи хоч один потрібний плейс $\varphi_1$, вибираємо елемент $a_1 \in L$, для якого $\varphi_1(a_1) = \infty$; існує плейс $\varphi_2$, з такою ж групою розкладу як у $\varphi_1$ і $\varphi(a_1) \neq \infty$. Звідси є зрозумілою нескінченність множини нееквівалентних плейсів з заданою групою розкладу.

**Зауваження.**

1. З міркувань, описаних у доведенні твердження 5, випливає твердження 3. Все ж ми навели незалежне доведення твердження 3, оскільки воно відображає, яку важливу роль відіграє властивість псевдоалгебричної замкненості поля $k$.

2. Якщо поле алгебричних функцій від однієї змінної з полем констант $k$ має властивість, сформульовану в твердженні 5, то воно має властивості, сформульовані в твердженні 4, а тому, згідно з [4, с. 354], є Фробеніусовим.

---


1. *Ax J.* The elementary theory of finite field // Ann. Math. – 1968 – Vol. 88, No. 2. – P. 239–271.
2. *Ершов Ю. Л.* Алгоритмические проблемы в теории полей // Справочная книга по математической логике. Часть 3. Теория рекурсии. – М.: Наука, 1982. – С. 269–353.
3. *Fried M., Haran D., Jarden M.* Galois Stratification over Frobenius Fields // Advances in Mathematics. – 1984. – Vol. 51. – P. 1–35.
4. *Fried M., Jarden M.* Field arithmetic. – Springer, 1986.
5. *Шевалле К.* Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной. М.: Физматгиз, 1959.


## ON DECOMPOSITION GROUPS OF VALUATIONS OF PSEUDOGLOBAL FIELDS


**Vasyl Andriychuk**

*Ivan Franko National University of L'viv*



The properties of decomposition groups of valuations of an algebraic function field over a pseudofinite constant field are investigated.



Стаття надійшла до редколегії 13.12.1999