ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 30–33

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 30–33

УДК 534.1

КОЛИВАННЯ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ З НЕЛІНІЙНИМ ЗАКОНОМ ПРУЖНОСТІ

Анатолій Барвінський, Владислав Гонтар

Національний університет «Львівська політехніка»

У працях авторів [1, 2] викладено алгоритм побудови наближеного розв'язку квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(k_1(x,\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(k_2(x,\tau)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+k_3(x,\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\varepsilon f\left(x,\tau,\theta,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\ldots\right), \quad (1)$$

де k_1, k_2, k_3 – додатні обмежені коефіцієнти залежні від координати x, $x\in[0,1]$ та повільного часу $\tau=\varepsilon t$; $f(x,\tau,\theta,u,\ldots)$ – 2π-періодична за θ функція, що допускає розвинення у ряд за малим параметром ε.

Алгоритм полягає у побудові розв'язку рівняння (1) асимптотичним методом нелінійної механіки [3]

$$u(x,t)=au_0(x)\cos(\theta+\psi)+\varepsilon u_1(a,x,\theta,\ldots)+\ldots, \quad (2)$$

де амплітуда a та фаза коливань ψ визначені системою диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1+\varepsilon^2 A_2+\ldots; \qquad \frac{d\psi}{dt}=\lambda-\nu(\tau)+\varepsilon B_1+\varepsilon^2 B_2+\ldots, \quad (3)$$

та побудові розв'язку відповідної задачі на власні значення

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(k_1(x,\tau)\frac{d^2u_0}{dx^2}\right)+\frac{d}{dx}\left(k_2(x,\tau)\frac{du_0}{dx}\right)-\lambda^2 k_3 u_0=0, \quad (4)$$

згідно з методом збурень у вигляді

$$\lambda=\lambda_0+\sum_{k=1}^{N}\mu^k\lambda_k, \quad (5)$$

$$u_0=\varphi_0+\sum_{k=1}^{N}\mu^k\varphi_k, \quad (6)$$

де μ – малий параметр.

Кількість N наближень та збіжність наведених рядів (5)–(6) згідно з цим алгоритмом контролює співвідношення Релея:

$$\overline{\lambda}^2\le\frac{\int_0^1\left(\frac{d^2}{dx^2}\left(k_1(x,\tau)\frac{d^2\overline{u}_0}{dx^2}\right)+\frac{d}{dx}\left(k_2(x,\tau)\frac{d\overline{u}_0}{dx}\right)\right)\overline{u}_0\,dx}{\int_0^1 k_3(x,\tau)\,\overline{u}_0^2\,dx}, \quad (7)$$

де як допустиму функцію $\overline{u}_0$ обрано ряд (6), а $\overline{\lambda}$ обчислене достатньо точним числовим методом.

Використаємо цей алгоритм у дослідженні вимушених коливань стрижня змінного перерізу з нелінійним законом пружності.

Рівняння коливань чистого згину такого стрижня одержане в [1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \rho F(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E^3 I_2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + H_1 \sin\theta\right), \qquad (8)$$

де $u = u(x,t)$ – переміщення у вертикальній площині; ρ – густина матеріалу; E – модуль Юнга; $F(x)$ – площа поперечного перерізу; H, θ – амплітуда та частота збурювальної сили; I та I_2 – моменти інерції, визначені за формулами:

$$I = \iint\limits_{F(x)} y^2 dydz, \qquad I_2 = \iint\limits_{F(x)} y^4 dydz. \qquad (9)$$

Перейдемо у рівнянні (8) до безрозмірної координати $\xi = \frac{x}{l}$, де l – довжина стрижня, та запишемо його у вигляді

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(I\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) + l^4 \rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varepsilon\left(\frac{E^2}{l^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(I_2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) + H\sin\theta\right). \qquad (10)$$

Застосовуючи методику [3], після деяких перетворень знаходимо

$$A_1 = -\frac{\varepsilon H}{\lambda K}\int_0^1 \varphi(\xi)d\xi\cos\psi, \qquad K = 2\pi\int_0^1 \rho F(\xi)\varphi^2(\xi)d\xi,$$

$$B_1 = \lambda - \nu(\tau) - \frac{1}{(\lambda + \nu(\tau))K}\left(b_1\int_0^1 I_2(\xi)(\varphi''(\xi))^4 d\xi + \varepsilon H\int_0^1 \varphi(\xi)d\xi\sin\psi\right),$$

$$b_1 = 3\alpha^2 E^3/\left(8\ell^6\right), \qquad (11)$$

де $\varphi \equiv u_0$ — розв'язок незбуреного рівняння; $\nu = d\theta/dt$ — миттєва частота збурювальної сили.

Для аналізу впливу наближень розв'язку незбуреного рівняння розглянемо клас стрижнів змінного перерізу, для яких можна отримати точний розв'язок звичайного диференціального рівняння (4). Для цього оберемо стрижень з лінійною зміною площі поперечного перерізу, закріплений шарнірно, і введемо параметр зміни його товщини β. Тоді

$$F(\xi) = F_0(1-\beta\xi) = bh_0(1-\beta\xi),$$

$$I(\xi) = I_0(1-\beta\xi)^3 = \frac{1}{12}bh_0^3(1-\beta\xi)^3,$$

$$I_2(\xi) = I_{20}(1-\beta\xi)^5 = \frac{1}{80}bh_0^5(1-\beta\xi)^5. \qquad (12)$$

Згідно з викладеним підходом, ми повинні побудувати допустимі функції $\overline{\varphi}$ у відношенні Релея, яке після спрощення матиме вигляд

$$\overline{\lambda}^2 \le \int_0^1 (1-\beta\xi)^3 \left(\overline{\varphi}''\right)^2 d\xi \Big/ c\int_0^1 (1-\beta\xi)\,\overline{\varphi}^2\, d\xi . \tag{13}$$

Як допустиму функцію у формулі (13) використаємо ряд (6), знаходячи послідовно розв'язки відповідної системи рівнянь методу збурень.

У нульовому наближенні для основної форми коливань $\varphi_0 = \sin\pi\xi$. Урахувавши цю функцію у відношенні (13), матимемо

$$\overline{\lambda}^2 \le \frac{\pi^2}{4\beta}\frac{1-(1-\beta)^4 - 3\beta^2(2-\beta)}{\pi^2\left(1+(1-\beta)^2\right)-3\beta^2}. \tag{14}$$

У правій частині першого наближення системи методу збурень

$$F_1 = -\beta\xi\,; \qquad I_1 = -\beta\xi\left(3-3\beta\xi+\beta^2\xi^2\right). \tag{15}$$

Для відшукання першої поправки власної функції спочатку треба знайти першу поправку власного значення

$$\lambda_1 = \left(\int_0^1 \varphi_0^2(\xi)\,d\xi\right)^{-1}\left(\int_0^1\left(\lambda_0^2 F_1(\xi) - I_1(\xi)\left(\varphi_0''\right)^2\right)d\xi\right), \tag{16}$$

яка з урахуванням (15) та $\lambda_0 = \pi$

$$\lambda_1 = \pi^2\beta\left(\pi^2\left(-1.5+\beta-0.25\beta^2\right)+0.75\beta(2-\beta)\right). \tag{17}$$

Після деяких спрощень рівняння першого наближення запишемо

$$\varphi_1^{IV} - \pi^4\varphi_1 = 6\pi^3\beta\left(1-2\beta+\beta^2\varepsilon^2\right)\cos\pi\xi +$$
$$+\left(\lambda_1 - \pi^4\phi\xi - 6\pi^2\beta^2(1-\beta\xi) - 3\pi^4\beta\xi\left(3-3\beta\xi+\beta^2\xi^2\right)\right)\sin\pi\xi \tag{18}$$

Його частинний розв'язок побудуємо у вигляді

$$\varphi_1 = \xi\left(a_c\xi^3 + b_c\xi^2 + c_c\xi + d_c\right)\cos\pi\xi + \xi\left(a_s\xi^3 + b_s\xi^2 + c_s\xi + d_s\right)\sin\pi\xi\,, \tag{19}$$

де значення коефіцієнтів

$$a_c = -3\beta^3/16;\; b_c = \beta^2(9\pi - 13.5\beta)/12;$$
$$c_c = \pi\beta^3 + 0.75\beta/\pi + 4.5b_c/\pi + 12a_c/\pi^2\,;$$
$$d_c = 0.25\lambda_1/\pi^3 - 1.5\beta^2/\pi + 6b_c/\pi^2 + 3c_c/\pi^2\,;$$
$$a_s = 0;\; b_s = -0.5\beta^3 - 12a_c/\pi;$$
$$c_s = 1.5\beta^2 - 4.5b_c/\pi;\; d_s = 6b_s/\pi^2 - 3c_c/\pi - 1.5\beta. \tag{20}$$

Аналогічно визначають і наступні наближення.

Тоді система диференціальних рівнянь (3) матиме вигляд

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon H_1 \int_0^1 \overline{\varphi}(\xi)\, d\xi \cos\psi}{a_2(\lambda_1 + \nu(\tau)) \int_0^1 (1-\beta\xi)\overline{\varphi}^2 dx};$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \lambda_1 - \nu(\tau) - \frac{b_1 \int_0^1 (1-\beta\xi)^5 \left(\overline{\varphi}''(\xi)\right)^4 d\xi + \varepsilon H_1 \int_0^1 \overline{\varphi}(\xi)\, d\xi \sin\psi_0}{b_2(\lambda_1 + \nu(\tau)) \int_0^1 (1-\beta\xi)\overline{\varphi}^2 dx}. \qquad (21)$$

Систему диференціальних рівнянь (21) розв'язують за спеціально розробленим алгоритмом з залученням числових методів [5].

Для конкретних параметрів стрижня, взятих з [3], побудована амплітудно-частотна характеристика коливань для різних значень β. Розв'язок системи (21) з власною функцією $\overline{\varphi}$ порівнювали з точним розв'язком для φ, одержаним у [2]. Збіжність для $\beta \in (0;\ 0.85)$ виявлено вже для третього наближення, що свідчить про ефективність запропонованого алгоритму.

1. *Барвінський А., Гонтар В.* Застосування комбінованого підходу до розв'язання деяких нелінійних крайових задач асимптотичними методами // Сучасні проблеми механіки і математики. – Львів, 1998. – С. 237–238.
2. *Гонтар В. Д.* Нелінійні коливання вертикального стержня змінного перерізу, зумовлені дією осьової пульсуючої сили // Вісник ДУ «Львівська політехніка». 1998. – № 341. – С. 93–97.
3. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Наук. думка, 1976.
4. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М., 1961.
5. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Вычислительные методы. – М.: Наука, 1976.

OSCILLATIONS OF ROD SYSTEMS WITH WARIABLE AREA OF CROSS-SECTION WITH THE NON-LINEAR PRINCIPLE OF ELASTIC

Anatoly Barvinsky, Vladislav Gontar

National University «Lvivska Politechnika»

In accordance with this technique non-linear oscillations of rod systems with wariable area of cross-section and characteristics have been studied. Composite method of making a solution of undisturbed operator equation has been given as well as the algorithm of its realization.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.1999