ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 34–37 *Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 34–37*

УДК 539.3

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНОЇ АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ

Віктор Божидарник, Олеся Максимович

Луцький державний технічний університет

У праці [2] побудовано граничні інтегральні рівняння першої основної задачі теорії пружності для анізотропних пластинок з отворами довільної форми. Нижче аналогічні рівняння наведено стосовно другої основної задачі теорії пружності для анізотропних багатозв'язних пластинок. Для розв'язування рівнянь застосовано метод механічних квадратур. Інші підходи до дослідження пружної рівноваги анізотропних пластинок розглянуті в працях [1, 3].

Нехай пружна пластинка займає область D, що обмежена контурами L_0, L_1, ..., L_N, які не перетинаються, причому область D є внутрішньою щодо контуру L_0. Приймають, що на отворах і зовнішній межі пластинки задано переміщення або в отвори впаяно жорсткі включення; пластинка міститься в умовах плоского напруженого стану і перебуває під дією: зусиль на нескінченності (для пластинок нескінченних розмірів); зосереджених сил (X_j, Y_j), що прикладені в точках (a_j, b_j) $j = 1, ..., M$; сил і моментів, які прикладені до жорстких включень.

Віднесемо область D до декартової системи координат (x, y). Розглянемо системи координат (x_1, y_1), (x_2, y_2), які отримують із системи (x, y) афінним перетворенням $x_j = x + \alpha_j y$, $y_j = \beta_j y$ $(j = 1,2)$. Тут $s_j = \alpha_j + i\beta_j$ – корені характеристичного рівняння [1], причому $\operatorname{Im}(s_j) > 0$ $(j = 1,2)$. Позначимо в цих системах через D_1 і D_2 області, в які внаслідок афінних перетворень перейде область D, а відповідні контурам L_j криві – через $L_j^{(1,2)}$ $(j = 0, ..., N)$. Поставлена задача зводиться до знаходження комплексних потенціалів $\varphi(z_1)$, $\psi(z_2)$, які на межі області задовольняють умови [1]

$$2\operatorname{Re}[p_1\varphi(z_1) + p_2\psi(z_2)] = g_1, \quad 2\operatorname{Re}[q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2)] = g_2, \tag{1}$$

де $z_1 = x + s_1 y$, $z_2 = x + s_2 y$; p_1, p_2, q_1, q_2 – комплексні сталі, які визначають через механічні характеристики матеріалу, з якого виготовлена пластинка; g_1, g_2 – задані компоненти вектора переміщення на межі пластини. Якщо в отвір, обмежений контуром L_j, впаяно жорстке включення, то на ньому задано $g_1 = C_j - \tau_j y$, $g_2 = D_j + \tau_j x$, де C_j, D_j, τ_j – сталі, які визначають з умови, що головний вектор та момент усіх сил, прикладених до цього включення, є відомими (дорівнюють заданим).

Похідні від комплексних потенціалів $\Phi(z_1) = \varphi'(z_1)$, $\Psi(z_2) = \psi'(z_2)$ зобразимо у вигляді

$$\Phi(z_1) = \Phi_R(z_1) + \Phi_S(z_1), \;\; \Psi(z_2) = \Psi_R(z_2) + \Psi_S(z_2), \tag{2}$$

де $\Phi_R(z_1), \Psi_R(z_2)$ – аналітичні функції в областях D_1, D_2 відповідно,

$$\Phi_S(z_1) = \Omega_1(z_1) + B_* + iC_*, \;\; \Psi_S(z_2) = \Omega_2(z_2) + B'_* + iC'_*,$$

$$\Omega_m(z_m) = -\sum_{j=1}^{M}\left(d_1^{(m)}Y_j + d_2^{(m)}X_j\right)\frac{1}{z_m - z_{mj}}, \quad d_k^{(j)} = D_k^{(j)}/D_*;$$

$D_k^{(j)}$, D_* – сталі, вирази для яких наведено в [1]; $m = 1{,}2$; B_*, C_*, B'_*, C'_* – дійсні сталі, які визначають через задані на нескінченності зусилля, причому одна із цих сталих є довільною (у випадку обмежених пластинок ці сталі дорівнюють нулю); $z_{kj} = a_j + s_k b_j$.

Позначимо граничні значення функцій $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$ на межі областей через відповідно, $Q(z_1)$, $P(z_2)$. Тоді на основі зображення (2) та теореми Коші отримаємо інтегральні зображення для комплексних потенціалів у вигляді

$$\Phi(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^{(1)}}\frac{Q(\tau)d\tau}{\tau - z_1} + \Phi_S(z_1), \quad \Psi(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^{(2)}}\frac{P(\tau)d\tau}{\tau - z_2} + \Psi_S(z_2), \tag{3}$$

де $L^{(k)} = L_0^{(k)} + L_1^{(k)} + ... + L_N^{(k)}$, $(k = 1,2)$. Тут за додатний напрям обходу контурів вибрано такий, при якому область D залишається ліворуч.

Із умови (1) знаходимо

$$P(z_2) = (W + \alpha\, Q\, z_1' + \beta\, \overline{Q}\, \overline{z_1'})/z_2', \tag{4}$$

де $w = \dfrac{\overline{q}_2 g_1 - \overline{p}_2 g_2}{d}$, $\alpha = \dfrac{\overline{p}_2 q_1 - \overline{q}_2 p_1}{d}$, $\beta = \dfrac{\overline{p}_2 \overline{q}_1 - \overline{q}_2 \overline{p}_1}{d}$, $d = p_2\overline{q}_2 - q_2\overline{p}_2$,

$W = dw/ds$, $z_j' = dz_j/ds$, $j = 1,2$, ds – диференціал дуги на межі пластинки.

Комплексні потенціали задовольняють додаткові умови, які забезпечують однозначність переміщень. Такі умови мають вигляд [1]

$$\int\limits_{L_j} Q(z_1)\,dz_1 = -\left[C_1^{(1)}Y^{(j)} + C_2^{(1)}X^{(j)}\right]/C, \quad j = 0,\ldots,N, \tag{5}$$

де $C_i^{(j)}$, C – сталі, вирази для яких наведено в [1]; $X^{(j)}$, $Y^{(j)}$ – проекції на осі Ox і Oy головного вектора всіх сил, що прикладені до контуру L_j.

Для знаходження функції Q, через яку записаний загальний розв'язок задачі, використаємо формулу для відшукання похідних від вектора переміщень за дуговою координатою на довільній кривій $\Gamma \in D$ [1]:

$$(u' + iv') = (p_1 + iq_1)\,z_1'\,\Phi(z_1) + (\overline{p}_1 + i\overline{q}_1)\overline{z_1'}\,\overline{\Phi(z_1)} +$$
$$+ (p_2 + iq_2)\,z_2'\,\Psi(z_2) + (\overline{p}_2 + i\overline{q}_2)\,\overline{z_2'}\,\overline{\Psi(z_2)}, \tag{6}$$

де $z_j' = dz_j/ds$, ds – диференціал дуги на кривій Г. Підставивши в (6) потенціали (3) і перейшовши до границі $(x, y) \to L$, після врахування умов Племеля – Сохоцького отримаємо граничні інтегральні рівняння для знаходження функції Q у вигляді

$$(u' + iv') = 2\big[(p_1 + iq_1)\,z_1'\,\Phi(z_1) + (\overline{p}_1 + i\overline{q}_1)\,\overline{z_1'}\,\overline{\Phi(z_1)} +$$
$$+ (p_2 + iq_2)\,z_2'\,\Psi(z_2) + (\overline{p}_2 + i\overline{q}_2)\,\overline{z_2'}\,\overline{\Psi(z_2)}\big], \tag{7}$$

де $(x, y) \in L$, $L = L_0 + \ldots + L_N$, причому тут у комплексних потенціалах, визначених формулами (2), (3), інтеграли Коші розглядають у сенсі головного значення. Співвідношення (7) у разі врахування зображень (2), (3) є системою сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій Q. Розв'яжемо рівняння за допомогою методу механічних квадратур. Розглядатимемо випадок, коли параметричне рівняння контурів L_j записано у вигляді відрізків ряду Фур'є

$$x = \sum_{n=-K}^{K} a_n^{(j)} e^{in\theta}, \quad y = \sum_{n=-K}^{K} b_n^{(j)} e^{in\theta}, \quad j = \overline{0, M},$$

де $a_n^{(j)}$, $b_n^{(j)}$, K – сталі; $0 \le \theta < 2\pi$. Тоді рівняння контурів L_j, $L_j^{(1,2)}$ запишемо так: $t_k = \omega_k^{(j)}(\theta)$, де $t_0 = t$, $\omega_k^{(j)}(\theta) = \sum\limits_{n=-K}^{K} \left(a_n^{(j)} + s_n b_n^{(j)}\right)\sigma^n$, $s_0 = 1$, $\sigma = e^{i\theta}$.

Квадратурні формули для інтегралів, що входять у зображення (3) і (7), мають вигляд [1]

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_j^{(1)}} \frac{Q(t_1)\, dt_1}{t_1 - z_1} \cong \frac{-i}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \frac{Q_k^{(j)} t_{1k}'^{(j)}}{t_{1k}^{(j)} - z_1}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_j^{(1)}} \frac{P(t_1)dt_1}{t_2 - z_2} \cong \frac{-i}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \frac{P_k^{(j)} t_{1k}'^{(j)}}{t_{2k}^{(j)} - z_2},$$

де $t_{mk}^{(j)} = \omega_m^{(j)}(\theta_k^{(j)})$, $t_{mk}'^{(j)} = \omega_m'^{(j)}(\theta_k^{(j)})$, $Q_k^{(j)} = Q(t_{1k}^{(j)})$, $P_k^{(j)} = P(t_{2k}^{(j)})$, $\theta_k^{(j)} = h_j k$, $h_j = 2\pi / N_j$, N_j – кількість вузлових точок на контурі L_j, $m = 1, 2$. Формули справджуються для довільних точок, що не належать контуру $L_j^{(m)}$, та для точок $z_m = \omega_m^{(j)}(\gamma_\nu^{(j)})$, де $\gamma_\nu^{(j)} = h_j(\nu + 0.5)$, $\nu = 1, \ldots, N_j$. Зазначимо, що в останньому випадку інтеграли розглядають у сенсі головного значення.

Підставляючи у рівняння (7) зображення (3), заміняючи в отриманих співвідношеннях інтеграли на наведені квадратурні формули та враховуючи формулу (4), поставлену задачу зводимо до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь щодо невідомих значень функцій Q у вузлових точках на межі отворів.

Можна показати, що в отриманих групах алгебричних рівнянь, записаних для кожного з граничних контурів, одне є лінійно залежне. Вилучимо із кожної із таких груп одне рівняння. Для контурів, на яких задано переміщення, доповнимо систему (після вилучення) рівняннями, що фіксують у довільній точці контуру переміщення.

Для отворів, у які впаяно включення, доповнимо систему рівняннями

$$\frac{2\pi}{N_j} \sum_{n=1}^{N_j} t_{1n}^{(j)'} Q_n^{(j)} = -\frac{C_1^{(1)} Y^j + C_2^{(1)} X^{(j)}}{C},$$

які випливають із умови (5). Додаткове рівняння для визначення сталої τ_j (що визначає поворот включення як жорсткого цілого) запишемо

$$\frac{2\pi}{N_j} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{N_j} t_{1n}^{(j)}\, t_{1n}'^{(j)}\, Q_n^{(j)} + \sum_{n=1}^{N_j} t_{2n}^{(j)}\, t_{2n}'^{(j)}\, P_n^{(j)} \right\} = -M_j,$$

його отримано із умови, що момент всіх сил, прикладених до включення, дорівнює M_j:

На основі викладених співвідношень розроблені програми для ЕОМ, за якими розраховано напруження в нескінченній пластинці з жорсткими включеннями, що виготовлена із СВАМ. Для розрахунків прийнято [3]: $s_1 = 1.89i$, $s_2 = 0.531i$, $p_1 = -1.07004 \times 10^{-5}$, $p_2 = -0.119187 \times 10^{-5}$, $q_1 = -0.225486 \times \times 10^{-5}i$, $q_2 = -0.568983 \times 10^{-5}i$; головний вектор та момент, що прикладені до кожного з включень, дорівнюють нулю; пластинка розтягується на нескінченності зусиллями p вздовж осі Ox; пластинка має еліптичні включення з півосями a і b, які паралельні до осей Ox і Oy, відповідно.

Порівняння результатів розрахунків для випадку одного включення із аналітичним розв'язком свідчать про високу точність використаного методу, який ґрунтується на квадратурних формулах типу Ґаусса. Зокрема, при $b = 0.5a$ для обчислення напружень з точністю до 1% виявилось достатньо обмежитись тільки 12 вузловими точками (без урахування симетрії задачі).

Розглянуто пластинку з двома однаковими еліптичними включеннями при $b = 0.5a$, що розміщені на осі Ox на відстані між включеннями, що дорівнює a. В табл. 1 у третьому стовпці наведено результати розрахунку напружень на межі включення, які діють на площинках, що нормальні до межі. Для порівняння в другому стовпці наведені результати розрахунків у другому наближенні із [3].

Таблиця 1.

θ	σ_n/p	σ_n/p
0	2.09	2.063
60	0.34	0.298
120	0.21	0.257
180	2.41	2.482

Таблиця 2.

θ \ l/a	3	3	2.5	2.25
0	3.30	3.316	5.165	9.037
30	1.32	1.311	1.655	2.077
60	0.29	0.294	0.303	0,313
90	0.11	0.141	0.108	0.107

У табл. 2 наведено результати розрахунку напружень у пластинці, в якій еліптичні включення при $b = 0.5a$ розміщені вздовж осі Ox з періодом l. У другому стовпці наведено дані із [3].

1. *Божидарник В. В.* Двовимірні задачі теорії пружності і термопружності структурно-неоднорідних тіл. – Львів: Світ, 1998. – 352 с.
2. *Божидарник В. В., Максимович О. В.* Пружна рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. – Львів: Каменяр, 1999. – Т. 2, № 2. – С. 255–259.
3. *Космодемианский А. С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – Киев; Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.

INTEGRAL EQUATIONS OF NON-ASITROPES ELASTIC PLATES WITH HOLES

Victor Bozidarnik, Olesia Maxymovytch

Луцький державний технічний університет

The paper presents singular integral equations for non-asitrope plates weakened by holes. The paper worced out the numerical algorithm of solving of the received equations that is based on the method of mechanical quadrature.

Стаття надійшла до редколегії 21.02.2000