ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 38–41 *Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 38–41*

УДК 539.3

РОЗВ'ЯЗКИ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

Василь Вігак, Юрій Токовий, Андрій Ричагівський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Успішне використання методу прямого інтегрування диференціальних рівнянь пружності та термопружності в напруженнях для розв'язання задач у необмежених областях [1–3, 7] свідчить про необхідність розвитку його щодо побудови розв'язку, наприклад, плоскої задачі пружності чи термопружності для прямокутної області, яку формулюють так: знайти квазістатичний напружений і деформований стан та переміщення, зокрема, у випадку плоского деформованого стану, який за відсутності масових сил описують [5, 6] рівняння рівноваги

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0,\qquad (x,y)\in D=[-a,a]\times[-b,b], \tag{1}$$

рівняння суцільності в напруженнях

$$\Delta(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{\alpha E}{1-\nu}\Delta T,\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2}$$

та фізичні співвідношення

$$\begin{aligned} Ee_x&=(1+\nu)[(1-\nu)\sigma_x-\nu\sigma_y+\alpha ET],\quad e_z=0,\\ Ee_y&=(1+\nu)[(1-\nu)\sigma_y-\nu\sigma_x+\alpha ET],\quad Ge_{xy}=\sigma_{xy}. \end{aligned} \tag{3}$$

Напруження на границі області повинні задовольняти граничні умови

$$\sigma_x\big|_{x=\pm a}=\begin{cases}-p_1(y),\\-p_2(y),\end{cases}\ \sigma_{xy}\big|_{x=\pm a}=\begin{cases}q_1(y),\\q_2(y),\end{cases}\ \sigma_y\big|_{y=\pm b}=\begin{cases}-p_3(x),\\-p_4(x),\end{cases}\ \sigma_{xy}\big|_{y=\pm b}=\begin{cases}q_3(x),\\q_4(x),\end{cases} \tag{4}$$

а переміщення визначають із співвідношень Коші [6].

На основі методу відокремлення змінних у рівняннях пружності чи термопружності для плоскої задачі показано [4, 8], що повною ортогональною системою функцій у випадку області D для напружень σ_x є система $\{1, y, \cos\gamma_n\frac{y}{b}, \sin\lambda_n\frac{y}{b},\ n=1,2,\ldots\}$, а для $\sigma_y - \{1, x, \cos\gamma_n\frac{x}{a}, \sin\lambda_n\frac{x}{a},\ n=1,2,\ldots\}$, де $\gamma_n=n\pi$, а λ_n – корені рівняння $tg\lambda=\lambda$. Тому розв'язки ключових рівнянь суцільності в напруженнях [8] з умовами (4) записують у вигляді

$$\sigma_x=X_0^1(x)+yX_0^2(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(X_n^1(x)\cos\gamma_n\frac{y}{b}+X_n^2(x)\sin\lambda_n\frac{y}{b}), \tag{5}$$

$$\sigma_y=Y_0^1(y)+xY_0^2(y)+\sum_{n=1}^{\infty}(Y_n^1(y)\cos\gamma_n\frac{x}{a}+Y_n^2(y)\sin\lambda_n\frac{x}{a}), \tag{6}$$

де функції $\cos\gamma_n \frac{x}{a}$, $\sin\lambda_n \frac{x}{a}$ та $\cos\gamma_n \frac{y}{b}$, $\sin\lambda_n \frac{y}{b}$ є власними, що задовольняють відповідно однорідні інтегральні умови рівноваги

$$\int_{-a}^{a} \sigma_y dx = \int_{-a}^{a} x\sigma_y dx = \int_{-b}^{b} \sigma_x dy = \int_{-b}^{b} y\sigma_x dy = 0\,,$$

виділяючи у розв'язках (5), (6) частини під знаками сум, які залежать лише від самозрівноважених зусиль на окремих сторонах області D. Елементарні частини розв'язків (5), (6), які виділяють приєднаними функціями $1, x$ та $1, y$, повинні забезпечувати виконання неоднорідних умов рівноваги

$$\begin{aligned}
&2\int_{-a}^{a} \sigma_y dx = -\int_{-a}^{a} (p_3 + p_4) dx + \int_{-b}^{b} (q_2 - q_1)\operatorname{sign}(y - \xi) d\xi,\\
&2\int_{-a}^{a} x\sigma_y dx = -\int_{-a}^{a} (p_3 + p_4) x dx + \int_{-b}^{b} (p_1 - p_2)|y - \xi| d\xi +\\
&\qquad + \int_{-a}^{a} ((y - b)q_3 + (y + b)q_4) dx - \int_{-b}^{b} a(q_1 + q_2)\operatorname{sign}(y - \xi) d\xi,\\
&2\int_{-b}^{b} \sigma_x dy = -\int_{-b}^{b} (p_1 + p_2) dy + \int_{-a}^{a} (q_4 - q_3)\operatorname{sign}(x - \eta) d\eta,\\
&2\int_{-b}^{b} y\sigma_x dy = -\int_{-b}^{b} (p_1 + p_2) y dy + \int_{-a}^{a} (p_3 - p_4)|y - \eta| d\eta +\\
&\qquad + \int_{-b}^{b} ((x - a)q_1 + (x + a)q_2) dy - \int_{-a}^{a} (b(q_3 + q_4)\operatorname{sign}(x - \eta) d\eta
\end{aligned} \tag{7}$$

та граничні умови

$$\begin{aligned}
&\left(X_0^1 + yX_0^2\right)\Big|_{x=\pm a} = -\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}\binom{p_1}{p_2} dy - \frac{3y}{2b^3}\int_{-b}^{b}\binom{p_1}{p_2} y dy,\\
&\left(\frac{dX_0^1}{dx} + y\frac{dX_0^2}{dx}\right)\Big|_{x=\pm a} = -\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}\frac{d}{dy}\binom{q_1}{q_2} dy - \frac{3y}{2b^3}\int_{-b}^{b}\frac{d}{dy}\binom{q_1}{q_2} y dy,\\
&\left(Y_0^1 + xY_0^2\right)\Big|_{y=\pm b} = -\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\binom{p_3}{p_4} dx - \frac{3x}{2a^3}\int_{-a}^{a}\binom{p_{13}}{p_4} x dx,\\
&\left(\frac{dY_0^1}{dy} + x\frac{dY_0^2}{dy}\right)\Big|_{y=\pm b} = -\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{d}{dx}\binom{q_3}{q_4} dx - \frac{3x}{2a^3}\int_{-a}^{a}\frac{d}{dx}\binom{q_3}{q_4} x dx,
\end{aligned} \tag{8}$$

що випливають з (1), (4) та розвинень заданих зусиль на границі p_i, q_i $(i = 1,2,3,4)$ за наведеними системами функцій. Елементарні розв'язки

$$\sigma_x = X_0^1(x) + yX_0^2(x), \quad \sigma_y = Y_0^1(y) + xY_0^2(y) \tag{9}$$

повинні задовольняти ще рівняння суцільності (2) та умови погодження

$$X_0^1 = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}\sigma_x dy,\quad X_0^2 = \frac{3}{2b^3}\int_{-b}^{b} y\sigma_x dy,\quad Y_0^1 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\sigma_y dx,\quad Y_0^2 = \frac{3}{2a^3}\int_{-a}^{a} x\sigma_y dx. \quad (10)$$

Функції $X_n^i(x), Y_n^i(y)$ $(i = 1,2; n = 1,2,\ldots)$ в поданнях (5), (6) визначають за допомогою методу, запропонованого в праці [8], використовуючи суперпозицію розв'язків. Складніше знайти елементарні розв'язки (9) для задачі пружності, бо вони обтяжені умовами (7), (8), (10). Розв'язки (9) повинні задовольняти рівняння (2), а зусилля на границі – умови рівноваги

$$\begin{gathered}\int_{-b}^{b}(p_2 - p_1)dy + \int_{-a}^{a}(q_3 - q_4)dx = \int_{-a}^{a}(p_4 - p_3)dx + \int_{-b}^{b}(q_1 - q_2)dy = 0,\\ \int_{-b}^{b}(p_2 - p_1)ydy + b\int_{-a}^{a}(q_3 + q_4)dx = \int_{-a}^{a}(p_4 - p_3)xdx + a\int_{-b}^{b}(q_1 + q_2)dy.\end{gathered} \quad (11)$$

Під час виконання умов (7), (8), (10), (11) вирази (9) будуть розв'язками рівняння (2) при $T \equiv 0$, якщо зусилля задовольнятимуть необхідні рівності

$$2(q_2 - q_1) = q_{21}^-,\quad 2a(q_1 + q_2) = aq_{12}^+ + \int_{-b}^{b}(p_1 - p_2)sign(y - \xi)d\xi,$$

$$2(q_4 - q_3) = q_{43}^-,\quad 2b(q_3 + q_4) = aq_{34}^+ + \int_{-a}^{a}(p_3 - p_4)sign(x - \eta)d\eta$$

та інтегральні умови

$$\int_{-b}^{b}(p_2 - p_1)dy = \int_{-a}^{a}(q_4 - q_3)dx = a\,q_{43}^-,\qquad \int_{-a}^{a}(p_4 - p_3)dx = \int_{-b}^{b}(q_2 - q_1)dy = b\,q_{21}^-,$$

$$\int_{-b}^{b}(p_1 - p_2)ydy = abq_{43}^- - a\int_{-b}^{b}(q_1 + q_2)dy,\qquad \int_{-a}^{a}(p_3 - p_4)xdx = abq_{12}^- - b\int_{-a}^{a}(q_3 + q_4)dx,$$

де $q_{21}^- = (q_2 - q_1)|_{y=b} + (q_2 - q_1)|_{y=-b}$, $q_{43}^- = (q_4 - q_3)|_{x=a} + (q_4 - q_3)|_{x=-a}$, $q_{12}^+ = (q_1 + q_2)|_{y=b} + (q_1 + q_2)|_{y=-b}$, $q_{43}^+ = (q_3 + q_4)|_{x=a} + (q_3 + q_4)|_{x=-a}$, а дотичні зусилля в кутових точках повинні бути однаковими між собою і задовольняти умовам $q_1(b) - q_1(-b) = q_2(b) - q_2(-b)$, $q_3(a) - q_3(-a) = q_4(a) - q_4(-a)$, тому $q_{12}^+ = q_{34}^+$. Тоді

$$\sigma_x = \frac{1}{4b}\left[\frac{x}{a}\int_{-b}^{b}(p_2 - p_1)dy - \int_{-b}^{b}(p_1 + p_2)dy\right] + \frac{3y}{4b^3}\left[\frac{x}{a}\int_{-b}^{b}(p_2 - p_1)ydy - \int_{-b}^{b}(p_1 + p_2)ydy\right],$$

$$\sigma_y = \frac{1}{4a}\left[\frac{y}{b}\int_{-a}^{a}(p_4 - p_3)dx - \int_{-a}^{a}(p_3 + p_4)dx\right] + \frac{3x}{4a^3}\left[\frac{y}{b}\int_{-a}^{a}(p_4 - p_3)xdx - \int_{-a}^{a}(p_3 + p_4)xdx\right], \quad (12)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{4}\left(q_{12}^+ - q_{21}^-\frac{x}{a} - q_{43}^-\frac{y}{b}\right) + \frac{3(x^2 - a^2)}{8a^3}\left(aq_{34}^+ - \int_{-a}^{a}(q_3 + q_4)dx\right) + \frac{3(y^2 - b^2)}{8b^3}\left(bq_{12}^+ - \int_{-b}^{b}(q_1 + q_2)dy\right).$$

Отже, елементарні розв'язки (12) плоскої задачі пружності в прямокутній області можуть бути: нормальні напруження лише лінійними функціями координат, а дотичні не вище другого степеня від них.

Після визначення напружень і деформацій з фізичних співвідношень (3) переміщення визначають зі співвідношень Коші [6], звідки

$$2u = u(a,y) + u(-a,y) + \int_{-a}^{a} e_x \, sign(x-\eta)\, d\eta, \quad 2v = v(x,b) + v(x,-b) + \int_{-b}^{b} e_y \, sign(y-\xi)\, d\xi.$$

Підставивши знайдені вирази для переміщень у третє співвідношення для e_{xy}, одержимо вихідне інтегро-диференціальне рівняння суцільності

$$2e_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left[u(a,y) + u(-a,y) + \int_{-a}^{a} e_x \, sign(x-\eta)\, d\eta\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[v(x,b) + v(x,-b) + \int_{-b}^{b} e_y \, sign(y-\xi)\, d\xi\right],$$

яке за необхідних умов погодження переміщень з деформаціями на границі області за допомогою диференціювання еквівалентно зводиться до відомого диференціального рівняння суцільності в деформаціях [6]. З умов погодження визначають невідомі величини сумарних переміщень через деформації на границі $u(a,y) + u(-a,y)$ та $v(x,b) + v(x,-b)$.

---

1. *Вигак В. М.* Метод прямого интегрирования уравнений осесиметричной задачи термоупругости в напряжениях для неограниченных областей // Прикл. механика. – 1999. – № 3. – С. 49–56.
2. *Вігак В. М.* Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності і термопружності // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 62–67.
3. *Вігак В. М.* Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності й термопружності для ортотропних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, № 1. – С. 24–29.
4. *Вігак В. М.* Розв'язок плоскої задачі термопружності для прямокутної області // Доп. НАН України. – 1994. – № 12. – С. 58–62.
5. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
6. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 575 с.
7. *Vihak V. M.* Solution of the Thermoelastic Problem for a Cylinder in the Case of a Two-Dimensional Nonaxisymmetric Temperature Field // ZAMM. – 1996. – No. 1. – C. 35–43.
8. *Vihak V. M., Yuzvyak M. Y., Yasinsky A. V.* The Solution of the Plane Thermoelasticity Problem for a Rectangular Domain // J. of Thermal Stresses. – 1998. – Vol. 21, No. 5. – C. 545–561.

SOLUTIONS TO THE PLANE ELASTICITY AND THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR A RECTANGULAR REGION

Vasyl Vihak, Yuriy Tokovyi, Andriy Rychagivsky

Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine

With the help of the direct integration method of equilibrium and compatibility equations in terms of stresses and the Cauchy relations the exact solutions to quasi-static plane elasticity and thermoelasticity problems for a rectangular region are found.

Стаття надійшла до редколегії 23.11.99