

УДК 539.375

МОДЕЛЬ ТРІЩИНИ В ПЛАСТИНЦІ З ГНУЧКИМ ПОКРИТТЯМ

Іван Шацький

Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Продуктивним засобом моделювання тріщин у пластинках з одностороннім гнучким покриттям є формулювання та розв'язування задач в областях з розрізами, береги яких з'єднані шарнірно на лицьовій поверхні. Такий підхід пропонували раніше [4] для випадку симетричного розтягу безмежної пластини з прямолінійною тріщиною. Оцінюючи граничну рівновагу пластинки з тріщиною, міцність покриття приймали необмеженою. Узагальнимо згадану концепцію – розрахункову схему для криволінійної тріщини в пластинці з гнучким покриттям при взаємодії симетричної та антисиметричної мод деформування. Несучу здатність композиції аналізуватимемо з урахуванням обмеженої міцності покриття.

Формулювання задачі та модель тріщини. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [-h, h]$, послаблену наскрізною тріщиною, розташованою вздовж криволінійного контура L (рис. 1). На одну з лицьових поверхонь пластинки $z = sh$ ($s = +1$ або $s = -1$) нанесене гнучке покриття, яке деформується сумісно з основою і здатне витримати досить великі напруження.

Навантаження пластинки відбувається мембранними зусиллями розтягу та зсуву. Плоский напружений стан, який відповідає цим силам у бездефектній пластинці, вважаємо заданим. Формулюємо задачу про вплив покриття на пружну та граничну рівновагу пластинки з тріщиною.

Тріщину в пластинці з одностороннім гнучким покриттям моделюємо розрізом, береги якого з'єднані шарнірно у лицьовій поверхні пластинки. У такому разі порушується симетрія напружень по товщині пластинки і в околі розрізу виникає місцевий вигин. До описання цього явища, крім традиційного рівняння плоского напруженого стану, залучаємо і бігармонійне рівняння згину пластин за теорією Кірхгофа:

$$\Delta \Delta \varphi = 0, \quad \Delta \Delta w = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus L, \quad (1)$$

де φ – функція Ері, w – прогин пластинки, Δ – оператор Лапласа.

Перейдемо до розгляду крайових умов на розрізі. Кінематичну та силову схеми взаємодії у шарнірному з'єднанні ілюструє рис. 2.

З умови неперервності нормальних переміщень у шарнірі маємо:

$$[u_n] - sh[\vartheta_n] = 0, \quad t \in L, \quad (2)$$

де $[u_n]$ – розкриття тріщини в базовій поверхні пластинки, $[\vartheta_n] = [\partial w / \partial n]$ – стрибок кута повороту нормалі, t – дугова координата.

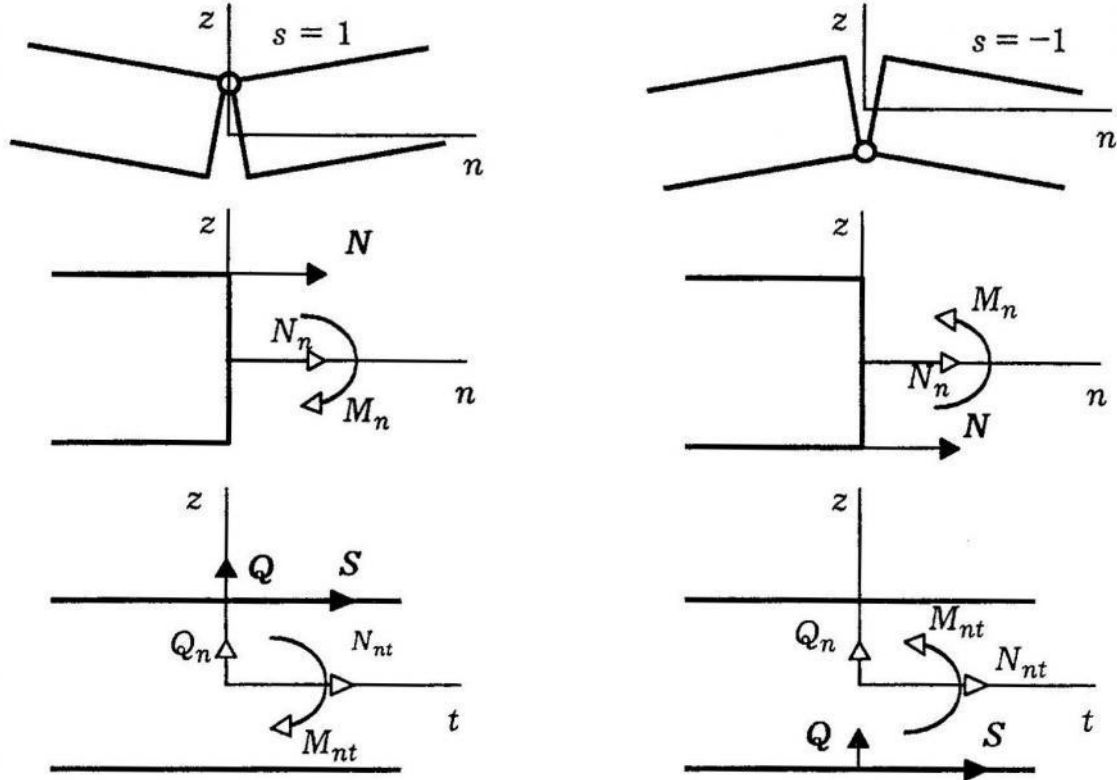


Рис. 2.

Забезпечимо іще неперервність дотичних переміщень при переході через шарнір на контурі L . Тоді $[w] = 0$, $[u_t] - sh[\vartheta_t] = 0$. Враховуючи, що $\vartheta_t = \partial w / \partial t$, остаточно одержуємо

$$[w] = 0, [u_t] = 0, t \in L. \quad (3)$$

Отож, враховуючи гіпотезу жорсткої нормалі, ми отримали цікавий наслідок: покриття блокує взаємне проковзування берегів розрізу вздовж осей z і t , і пластинка поводить себе як суцільне тіло.

Нормальне та дотичні зусилля N, S, Q , які діють у покритті на лінії тріщини, замінимо їх статичними еквівалентами: мембранними зусиллями N_n, N_{nt} , перерізуючою силою Q_n та компенсуючими згинним M_n і крутним M_{nt} моментами. Тоді за правилами трансляції сил

$$N_n = N, M_n = sh N, N_{nt} = S, M_{nt} = sh S, Q_n = Q.$$

Звідси одержуємо силову крайову умову на розрізі

$$M_n - sh N_n = 0, t \in L; \quad (4)$$

та вирази зусиль у покритті через механічні змінні на берегах тріщини

$$N = N_n, S = N_{nt}, Q = Q_n^* - sh \partial N_{nt} / \partial t, t \in L \quad (5)$$

($Q_n^* = Q_n + \partial M_{nt} / \partial t$ – узагальнена перерізуюча сила).

При заданому навантаженні на безмежності (1)–(4) – крайова задача для пари бігармонійних операторів із взаємопов’язаними крайовими умовами на розрізі.

Інтегральне рівняння задачі. Сформульовану задачу доцільно розв’язувати методом сингулярних інтегральних рівнянь. Зважаючи на результат (3), запишемо інтегральні зображення зусиль та моментів на розрізі через невідомі стрибки переміщення і кута повороту нормалі

$$\begin{aligned} N_n(t) &= N_n^0(t) + \frac{B}{4\pi} \int_L K_{11}(\xi, t) [u_n]'(\xi) d\xi, \\ N_{nt}(t) &= N_{nt}^0(t) + \frac{B}{4\pi} \int_L K_{21}(\xi, t) [u_n]'(\xi) d\xi, \\ M_n(t) &= -\frac{Da}{4\pi} \int_L K_{33}(\xi, t) [\vartheta_n]'(\xi) d\xi, \quad Q_n^*(t) = -\frac{Da}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_L K_{43}(\xi, t) [\vartheta_n]'(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут $N_n^0(t)$, $N_{nt}^0(t)$ – відомі компоненти основного напруженого стану, $B = 2Eh$, $D = 2Eh^3 / (3(1 - \nu^2))$, $a = (3 + \nu)(1 - \nu)$, E і ν модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки. Ядра інтегралів (6) виражаються через фундаментальні розв’язки бігармонійних рівнянь (1) та залежать від геометрії контура L [2, 3].

Підставляючи вирази (6) у крайову умову (4) та вилучаючи за допомогою (2) функцію $[\vartheta_n]$, приходимо до інтегрального рівняння для розкриття тріщини

$$\frac{B}{4\pi} \int_L \{K_{11}(\xi, t) + \kappa^{-1} K_{33}(\xi, t)\} [u_n]'(\xi) d\xi = -N_n^0(t), \quad t \in L; [u_n](\partial L) = 0,$$

де $\kappa = 3(1 + \nu)/(3 + \nu)$.

За знайденим $[u_n]$ відповідно до (2) обчислюємо $[\vartheta_n]$ та значення коефіцієнтів інтенсивності нормального зусилля K_N та згинного моменту K_M (тут і далі використані позначення [1]). Крім того, скориставшись (5), знаходимо зусилля в шарнірі

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{1 + \kappa^{-1}} \left\langle \kappa^{-1} N_n^0(t) + \frac{B}{4\pi} \int_L \{K_{11}(\xi, t) - K_{33}(\xi, t)\} [u_n]'(\xi) d\xi \right\rangle, \\ S &= N_{nt}^0(t) + \frac{B}{4\pi} \int_L K_{21}(\xi, t) [u_n]'(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

$$Q = -sh \frac{\partial N_{nt}^0}{\partial t} - \frac{sB}{4\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial t} \{K_{21}(\xi, t) + \kappa^{-1} K_{43}(\xi, t)\} [u_n]'(\xi) d\xi.$$

Оцінка граничної рівноваги. Уявні два механізми руйнування розглянутої композиції: 1) розповсюдження тріщини розтягу-згину без порушення цілісності покриття та 2) розрив покриття з, можливо, поширенням уже наскрізної тріщини.

Нехай зовнішнє навантаження контролюється деяким параметром p . Граничний стан пластини за першим із зазначених механізмів руйнування ($p = p_{1*}$) оцінимо, застосовуючи енергетичний критерій лінійної механіки руйнування при комбінованому розтязі та згині $F_1(K_N, K_M) = C_{1*}$, структура якого подана в працях [1, 4].

Доречним є таке зауваження. Із умов (3) випливає, що поблизу вершини тріщини при незруйнованому шарнірі завжди відсутні коефіцієнти інтенсивності зсувного мембранного зусилля та крутного моменту: $K_S = 0$, $K_H = 0$. Це означає, що тріщина такого типу розповсюджуватиметься вздовж прямої, дотичної до контура L у його вершині. Іншими словами, гнучке покриття, яке допомагає лише стрибку нормальних переміщень, виступає стабілізатором траєкторії руху тріщини. Зрозуміло, що цей висновок є, передусім, продуктом гіпотез Кірхгофа, прийнятих у нашій моделі, хоча навряд чи далеким від реальності.

Граничне зусилля $p = p_{2*}$, яке відповідає небезпечному стану покриття, знайдемо, використавши класичну теорію міцності:

$$\sup_{t \in L} F_2(N, S, Q) = C_{2*},$$

наприклад, $\sup_{t \in L} N = N_*$ – за розтягу чи $\sup_{t \in L} \sqrt{S^2 + Q^2} = S_*$ – за зсуву.

За руйнівне навантаження варто прийняти, очевидно, менше з p_{1*} та p_{2*} .

З метою порівняльного аналізу впливу покриття на міцність пластинки з тріщиною будемо використовувати і значення $p = p_{3*}$, яке відповідає критичному стану тріщини в пластинці без покриття (а точніше старту наскрізної тріщини в покритій пластинці) і може бути обчислене за будь-яким з критеріїв вигляду

$$F_3(K_N, K_S) = C_{3*},$$

де K_N, K_S коефіцієнти інтенсивності мембранних зусиль, знайдені з розв'язку класичної задачі плоского напруженого стану пластинки з наскрізним розрізом.

Приклад. Розглянемо випадок прямолінійної тріщини завдовжки $2l$, розташованої на осі абсцис: $L = (-l, l)$, $t = x$, $n = y$. Тоді $K_{11}(\xi, x) = K_{33}(\xi, x) =$

$= (\xi - x)^{-1}$, $K_{21}(\xi, x) = K_{43}(\xi, x) = 0$ і розв'язок задачі будується в замкнутому вигляді.

За умов розтягу пластини перпендикулярно до дефекту ($N_y^0 = p$, $N_{xy}^0 = 0$) одержуємо результати для тріщини з шарнірно з'єднаними берегами [4]

$$K_N = \frac{\kappa p \sqrt{l}}{1 + \kappa}, \quad K_M = -\frac{sp h \sqrt{l}}{1 + \kappa}, \quad N = \frac{p}{1 + \kappa}, \quad S = 0, \quad Q = 0;$$

$$p_{1*} = 2h \sqrt{2(1 + \kappa^{-1})E\gamma_* / (\pi l)}, \quad p_{2*} = N_*;$$

та для наскрізної тріщини

$$K_N = p \sqrt{l}, \quad K_M = 0, \quad p_{3*} = 2h \sqrt{2E\gamma_* / (\pi l)}$$

(γ_* — ефективна поверхнева енергія матеріалу пластинки).

За умов чистого зсуву ($N_y^0 = 0$, $N_{xy}^0 = \tau$) маємо відповідно

$$K_N = 0, \quad K_M = 0, \quad N = 0, \quad S = \tau, \quad Q = 0; \quad \tau_{1*} = \infty, \quad \tau_{2*} = S_*;$$

та

$$K_N = 0, \quad K_S = \tau \sqrt{l}, \quad \tau_{3*} = 2h K_{2c} / \sqrt{l}.$$

На рис. 3 показані залежності граничних навантажень p_{i*} , τ_{i*} від напівдовжини тріщини. Нумерація кривих узгоджена з індексом i .

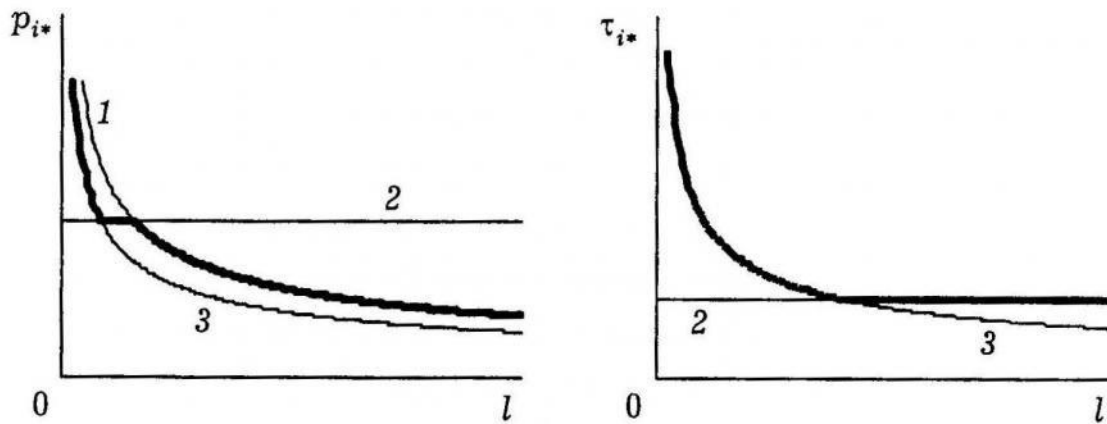


Рис. 3.

Картина руйнування за розтягу виглядає так. Для довгих дефектів ($p_{3*} < p_{1*} < p_{2*}$) пластинка руйнується шляхом поширення тріщини, граничний стан у покритті не досягається. Для тріщин середньої довжини ($p_{3*} < p_{2*} < p_{1*}$) відбувається розтріскування покриття з наступним нестабільним розвитком наскрізної тріщини. Для коротких тріщин ($p_{2*} < p_{3*} < p_{1*}$) розрив покриття не призводить до розвитку тріщини. У

цьому випадку допускається підростання навантаження до лінії 3. За зсуву маємо аналогічну ситуацію з тою лише різницею, що тріщина не може статувати без руйнування покриття.

Отже, покриття підвищує несучу здатність пластинки з тріщиною лише у випадку значної довжини дефекту або високої міцності підкріплення.

1. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – К.: Наук. думка, 1985. – 224 с.
2. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
3. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек. – Донецк: Изд-во ДонГУ, 1980. – 127 с.
4. Шацкий И. П. Растяжение пластины, содержащей прямолинейный разрез с шарнирно соединенными кромками // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1989. – № 5. – С. 163–165.

MODEL OF CRACK IN PLATE WITH FLEXIBLE COVERING

Ivan Shatsky

*Ivano-Frankivsk department of Pidstryhach Institute of applied problems
of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine*

The flexible covering influence on a strength of semi-infinite plates with curved cracks has been investigated in two-dimensional statement. A crack in a plate with one-side covering is considered like a slit which sides are joined along the edges with hinges. Taking into account limited strength of covering the diagrams of limit equilibrium for infinite plate with rectangular crack in tension and sheer are constructed.

Стаття надійшла до редколегії 22.12.1999