

УДК 539.3

**ТЕРМОМЕХАНІКА НАМАГНІЧУВАНИХ І ПОЛЯРИЗОВНИХ
ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ У ВИПАДКУ ДІЇ КВАЗІУСТАЛЕНИХ
ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ**

Олександр Гачкевич*, Зигмунт Касперський**

**Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

***Політехніка Опольська, Польща*

Пропонуємо математичну модель термомеханіки електропровідних кусково-однорідних тіл, складові частини яких мають різні електрофізичні, теплофізичні і механічні характеристики матеріалу. Тіла зазнають дії квазіусталеного електромагнітного поля, створеного системою квазіусталених електричних струмів, розміщених поза тілом і заданих виразом [1, 4]

$$\begin{aligned}\vec{j}^{(0)}(\vec{r}, t) &= \vec{f}(\vec{r}, t) \cos(\omega t + \psi_0) \equiv \operatorname{Re} \vec{j}_*^{(0)}(\vec{r}, t), \\ \vec{j}_*^{(0)}(\vec{r}, t) &= \vec{f}(\vec{r}, t) e^{i(\omega t + \psi_0)}, \quad \operatorname{div} \vec{f}(\vec{r}, t) = 0,\end{aligned}\tag{1}$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки; ω – колова частота; t – час; ψ_0 – початкова фаза; $\vec{f}(\vec{r}, t)$ – модульована амплітуда (функція мало змінна в часі на періоді $f_* = \frac{2\pi}{\omega}$ електромагнітних коливань так, що виконується умова

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{r}, t)}{\partial t} \ll \omega |\vec{f}(\vec{r}, t)|.\tag{2}$$

На поверхні S тіла можуть бути задані значення вектора напруженості електричного $\vec{E}^{(0)}(\vec{r}, t)$ або магнітного $\vec{H}^{(0)}(\vec{r}, t)$ поля у вигляді (1).

При розглядюваних величинах параметрів електромагнітної дії ($H_0 \leq 10^7 \text{ Ам}^{-1}$, де H_0 – характерна напруженість зовнішнього магнітного поля) можна прийняти, що переміщення та деформації і їхні швидкості в тілі настільки малі, що правильними є залежності лінійної теорії пружності, а вплив руху середовища на характеристики електромагнітного поля можна вважати несуттєвим [1, 6]. Розглянемо матеріали, для яких можна знехтувати електромеханічними і термоелектричними ефектами. В результаті приймаємо, що електромагнітне поле є зовнішньою дією щодо тіла, а його вплив на процеси теплопровідності і деформування обмежені виробництвом тепла і створенням силових факторів (пондеромоторних сил і моментів). У такому випадку вихідні залежності для кількісного опису параметрів, що характеризують електромагнітні, теплові і механічні процеси, формулюємо за два етапи [1, 2]. На першому етапі записуємо в квазіусталеному наближенні рівняння на параметри електромагнітного поля у випадку запропонованих аналітичних апроксимацій залежностей між індукціями і напружен-

ностями електричного і магнітного полів, які враховують електрофізичні властивості тіл. Далі записуємо вирази для тепловиділень і пондеромоторних факторів як функцій від електромагнітних параметрів. На другому етапі формулюємо термомеханічні співвідношення для визначення параметрів, що описують термопружний стан за заданих початкових умов на температуру та крайових умов на температуру і складові напружень.

Система рівнянь Максвелла [4, 5], які описують електромагнітне поле, доповнюється конститутивними зв'язками, що характеризують магнітні, поляризаційні властивості тіла та його електропровідність, тобто залежності між електричною $\vec{D}$, магнітною $\vec{B}$ індукціями (зміщеннями) та струмом провідності $\vec{j}$ і напруженостями $\vec{E}$ і $\vec{H}$.

Для широкого класу ізотропних матеріалів вектори $\vec{D}$ і $\vec{B}$ є паралельні відповідно до $\vec{E}$ і $\vec{H}$, а $\vec{j}$ – до $\vec{E}$. Для цього випадку конститутивні рівняння можна записати у вигляді [1, 4]

$$\vec{D} = \epsilon(E) \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu(H) \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (3)$$

де $R = |\vec{R}|$; ϵ, μ – діелектрична і магнітна проникності; σ – коефіцієнт електропровідності. Ці характеристики отримують експериментально або теоретично для конкретних моделей твердих тіл [4]. Залежності (3) визначають на основі особливостей електричних і магнітних властивостей матеріалів для окреслених амплітудно-частотних параметрів зовнішньої електромагнітної дії [1, 4, 5]. Матеріали за цими властивостями поділяють в електротехніці на кілька типів [4, 5]. Найважливіші з них (які ми розглядатимемо надалі) є: недіелектричні неферомагнітні (ϵ і μ не залежать від $\vec{E}$ і $\vec{H}$; $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_*$, $\mu = \mu_0 \mu_*$, де ϵ_* , μ_* – відповідно сталі відносні діелектрична і магнітна проникності); недіелектричні феромагнітні (ϵ не залежить від $\vec{E}$ ($\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_*$), $\mu = \mu(H)$); діелектричні неферомагнітні – тіла з малою електропровідністю ($\epsilon = \epsilon(E)$, μ не залежить від H ($\mu = \mu_0 \mu_*$)). Як звичайно, перші два типи тіл мають високу електропровідність ($\sigma \sim MSm$). Третій тип має малу провідність ($\sigma \leq 10^2 Sm$) і поляризаційні властивості, близькі до діелектриків.

Наведемо апроксимацію залежності між B і H вигляду петлі гістерезису в співвідношеннях (3) для недіелектричних феромагнітних тіл. Для майже гармонічної (в часі) напруженості магнітного поля частоти $m\omega$:

$$\vec{H}(t) = [A(t) \cos \omega t + C(t) \sin m\omega t] \vec{e}_H,$$

наближений аналітичний вираз петлі гістерезису можна записати у вигляді [1, 2]

$$\vec{B}(t) \equiv B(h) \vec{e}_H = (\mu_0 h + \beta \arctg \alpha h) \vec{e}_H, \quad (4)$$

де $h(t) = \sqrt{1 - \kappa_0^2} H - \frac{\kappa_0}{m\omega} \frac{\partial H}{\partial t}$, $m = \overline{1, \infty}$; $\kappa_0 = H_c/H_m$ для $H \leq H_m$ і $\kappa_0 = H_c/H_0$ для $H > H_m$; H_0, H_m – характерні значення напруженостей магнітного поля на поверхні тіла і при насиченому намагніченні, причому згідно з (2) H_0 є стала на періоді f_* ; $\alpha = (\mu_p - 1)\mu_0/\beta$, $\beta = 2B_s/\pi$; μ_p – по-

чаткова магнітна проникність; H_c – коерцитивна сила; B_s – індукція насичення; $\vec{e}_H = \vec{H}/H$ – орт у напрямі вектора $\vec{H}$. У випадку $\kappa_0 = 0$ залежність (4) описує основну криву намагнічення (криву намагнічення для тіл, які практично не мають гістерезисної залежності між B і H – магнітом'яких тіл).

Аналогічний вигляд може мати залежність $D = D(E)$ для діелектричних неферомагнітних тіл. Для таких тіл часто в літературі використовують залежність, отриману на основі відомого подання вектора поляризації у вигляді $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \vec{P}_m + \vec{P}_p$, де $\vec{P}_m$, $\vec{P}_p$ – відповідно вектори миттєвої (пружної) і релаксаційної поляризації, що пов'язані з напруженістю $\vec{E}$ співвідношеннями

$$\vec{P}_m = \epsilon_0 \kappa_{*m} \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{P}_p}{\partial t} = (\epsilon_0 \kappa_{*p} \vec{E} - \vec{P}_p) / \tau_{*p}. \quad (5)$$

Тут κ_{*p} , κ_{*m} – відносні діелектричні сприйнятливості, що характеризують миттєву та релаксаційну поляризації; τ_{*p} – час релаксації [2, 4, 5].

Якщо використаємо теорему Умова – Пойнтінга та принципи електродинаміки і фізики твердого тіла, то отримаємо вирази для тепловиділень (зумовлених теплопровідністю, переполяризацією і перемагнічуванням) і пондеромоторних сил (внаслідок паралельності векторів $\vec{D}$ і $\vec{E}$ та $\vec{B}$ і $\vec{H}$ відповідні пондеромоторні моменти дорівнюють нулю). Згідно зі структурою параметрів, що описують квазіусталене електромагнітне поле, тепловиділення і пондеромоторні сили мають вигляд суми повільно змінюваних у часі $Q^{(1)}$ і $\vec{F}^{(1)}$ (що збігаються з усередненими за період) і квазіусталених $Q^{(2)}$ та $\vec{F}^{(2)}$ складових [1, 2]. Відповідно до цього температуру і компоненти тензора напружень шукаємо у вигляді

$$W = W^{(1)} + W^{(2)}, \quad W = \{T, \hat{\sigma}\}. \quad (6)$$

Повільно змінювані в часі складові температури і напружень $T^{(1)}$, $\hat{\sigma}^{(1)}$ визначаємо в квазістатичному формулюванні, нехтуючи зв'язаністю полів деформації і температури [3], а $T^{(2)}$, $\hat{\sigma}^{(2)}$ – у квазіусталеному поданні

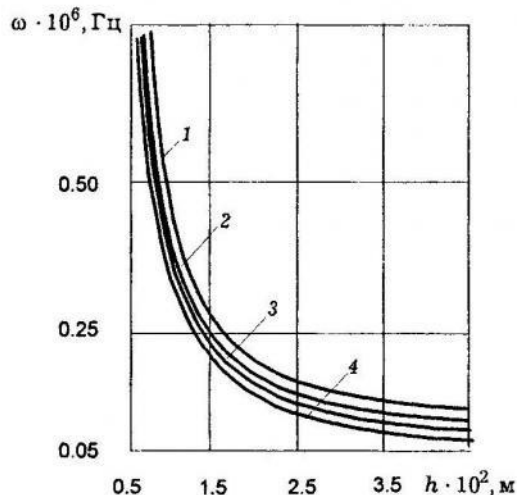
$$W^{(2)} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \text{Re} [W^{(2m)}(\vec{r}, t) e^{2im\omega t}] \quad (7)$$

(тут $W^{(2m)}(\vec{r}, t) = \{T^{(2m)}(\vec{r}, t), \hat{\sigma}^{(2m)}(\vec{r}, t)\}$ – повільно змінювані на періоді f_* функції) з відповідної динамічної задачі термопружності [3].

Для кожного з типів тіл побудовано розрахункові схеми визначення параметрів і запропоновано на підставі методу ітерації, спектральних розкладів, інтегральних перетворень і щодо розв'язування відповідних задач математичної фізики [1, 2]. Проведено комплекс досліджень впливу властивостей матеріалу складових частин тіл і амплітудно-частотних параметрів поля на особливості механічної поведінки кусково-однорідних тіл з плоско-

паралельними і циліндричними межами розділу, зокрема на резонансні явища в них.

На рисунку показані залежності першої резонансної товщинної частоти ω_1 електромагнітного поля від товщини біметалічного шару (сталь Х18Н9Т – мідь). Крива 1 відповідає випадку $K_h = h_2/h_1 = 0$ (шар зі сталі), крива 2 – $K_h = 1$, крива 3 – $K_h = 5$, крива 4 – $K_h = \infty$ (шар з міді). На верхній основі $z = -h_1$ шар вільний від силового навантаження, на спаянній умови ідеального механічного контакту, а на нижній основі $z = h_2$ переміщення дорівнюють нулю ($u_z = 0$).



Резонансні явища в кусково-однорідних тілах мають складний характер, що є результатом взаємозв'язку наявних процесів та наслідком дії електромагнітного поля на кожен зі складових частин (які відрізняються фізичними властивостями).

1. Гачкевич А. Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазистационарных электромагнитных полей. – К.: Наук. думка, 1992. – 192 с.
2. Гачкевич О. Р., Касперський З., Солодяк М. Т., Терлецький Р. Ф. Математичне моделювання та оптимізація зумовлених квазіусталеним електромагнітним полем фізико-механічних процесів в електропровідних тілах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, № 1. – С. 66–72.
3. Коваленко А. Д. Избранные труды. – К.: Наук. думка, 1976. – 764 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
5. Тамм Н. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
6. Moon F. C.: Problems in magneto-solid-mechanics // Mechanics Today. – 1978. – Vol. 4. – P. 307–390.

TERMOMECHANICS OF POLARIZABLE AND MAGNETIZABLE ELECTROCONDUCTIVE BODIES SUBJECTED TO QUASISTEADY ELECTROMAGNETIC FIELDS

Aleksandr Gachkevich*, Zygmunt Kasperski**

*Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine

**Polytechnic Opolska, Poland

Mathematical theory variant of description of electromagnetic, temperature and mechanical fields in nonferromagnetic, ferromagnetic and low-electroconductive bodies under the action of external quasisteady electromagnetic fields is suggested.

Стаття надійшла до редколегії 29.11.1999