ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 60–63 Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 60–63

УДК 539.3

# ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ТЕРМОПРУЖНОСТІ ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

**Аркадій Гольцев, Володимир Шевченко**

*Донецький державний університет*

Розв'язки різноманітних задач механіки тонкостінних конструкцій для будь-яких зовнішніх силових і температурних впливів можуть визначатися за допомогою фундаментальних розв'язків відповідних рівнянь [3]. Для ортотропних пластин такий розв'язок знайдено в [2]. У цій праці методика побудови фундаментальних розв'язків узагальнюється на випадок ортотропних циліндричних оболонок при наявності теплообміну.

Розглянемо тонку ортотропну циліндричну оболонку товщиною $2h$, яка перебуває в тепловому контакті з зовнішнім середовищем нульової температури. Оболонка нагрівається джерелами тепла об'ємної густини $W_0$. Будемо припускати конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона і рівномірний розподіл джерел тепла по товщині оболонки.

Будуючи фундаментальний розв'язок, використовуємо теорію пологих оболонок [3]. Введемо безрозмірну систему координат $x_i$ $(i = \overline{1,3})$, визначену з точністю до розміру $h$. Приймаючи лінійний закон розподілу температури по товщині оболонки і, наслідуючи [4, 5], запишемо систему рівнянь теплопровідності циліндричних оболонок так:

$$\Delta_\lambda T_1 - \mu_1 T_1 - \mu_3 T_2 = -W_1, \qquad \Delta_\lambda T_2 - 3(1+\mu_1)T_2 - 3\mu_2 T_1 = 0, \tag{1}$$

де

$$\Delta_\lambda = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{33}}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \qquad \mu_{1,2} = \frac{1}{2}\left(Bi^+ \pm Bi^-\right),$$

$$\mu_3 = \mu_2 - k, \qquad W_1(x_1,x_2) = \frac{1}{2\lambda_{33}}\int_{-1}^{1} W_0(x_1,x_2,x_3)\,dx_3,$$

$T_1$, $T_2$ – інтегральні характеристики температури, середня температура та температурний момент; $\lambda_{11}$, $\lambda_{22}$, $\lambda_{33}$ – головні коефіцієнти теплопровідності; $k = 1/R$, де $R$ – радіус циліндричної оболонки; $Bi^\pm$ – критерій Біо на поверхнях $x_3 = \pm 1$.

Використовуємо рівняння термопружності, отримані з урахуванням гіпотез Кірхгофа – Лява. Вісь координат $x_1$ спрямуємо уздовж твірної циліндричної оболонки. Тоді система рівнянь рівноваги пологих ортотропних циліндричних оболонок у переміщеннях має такий вигляд [1]:

$$B_1\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + B_3\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + B_4\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} + J_1\frac{\partial U_3}{\partial x_1} = \beta_1\frac{\partial T_1}{\partial x_1},$$

$$B_3 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + B_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} + B_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_2} + J_2 \frac{\partial U_3}{\partial x_2} = \beta_2 \frac{\partial T_1}{\partial x_2},$$

$$J_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + J_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + D_1 \frac{\partial^4 U_3}{\partial x_1^4} + D_3 \frac{\partial^4 U_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_2 \frac{\partial^4 U_3}{\partial x_2^4} + D_4 U_3 =$$

$$= k\beta_2 T_1 - \beta_1^0 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_1^2} - \beta_2^0 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2}, \qquad (2)$$

де

$$B_1 = \kappa B, \quad B_2 = \kappa^{-1} B, \quad B_3 = 2G, \quad B_4 = \nu_2 B_1 + B_3,$$

$$D_1 = \kappa D, \quad D_2 = \kappa^{-1} D, \quad D_3 = 2(\nu_2 D_1 + 4G/3), \quad D = B/3,$$

$$D_4 = 3D_2 k^2, \quad J_1 = B_1 \nu_2 k, \quad J_2 = B_2 k, \quad B = 2/(1 - \nu_1 \nu_2),$$

$$\beta_i = 3\beta_i^0 = \chi B_i \quad (i = 1,2), \quad \chi_1 = \alpha_1 + \nu_2 \alpha_2, \quad \chi_2 = \nu_1 \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$G = G_{12}/E, \quad E = \sqrt{E_1 E_2}, \quad \kappa = \sqrt{E_1/E_2},$$

$U_i$ $(i = \overline{1,3})$ – переміщення уздовж координатних осей $x_i$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$; $E_1$, $E_2$ і $G_{12}$ – модулі Юнга і модуль зсуву; $\nu_1$, $\nu_2$ – коефіцієнти Пуассона; $\alpha_1$, $\alpha_2$ – температурні коефіцієнти лінійного розширення для головних напрямів.

Фундаментальний розв'язок термопружності є частинним розв'язком систем (1), (2) із правою частиною у вигляді

$$W_1(x_1, x_2) = W_1^* \delta(x_1, x_2). \qquad (3)$$

Тут $\delta(x_1, x_2)$ – дельта-функція Дірака; $W_1^*$ – потужність інтегрального джерела тепла, джерела середньої температури.

Для розв'язку вихідної системи диференціальних рівнянь (1), (2) з правою частиною (3) використане двовимірне інтегральне перетворення Фур'є. Отриманий розв'язок у полярній системі координат $r$, $\varphi$ має таку структуру:

$$U_i(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{ni} p_{ni}(\varphi) \int_0^{\pi/2} p_{ni}(\theta) \sum_{m=1}^{4} H_{mi}(\theta) P_{mni}(r, \theta)\, d\theta \quad \left(i = \overline{1,3}\right), \qquad (4)$$

де $\varepsilon_{ni}$ – числові константи; $H_{mi}(\theta)$ – раціональні вирази від тригонометричних многочленів, що містять кривину і термопружні параметри оболонки; значення функцій, що містять полярні координати, будуть такими:

$$p_{n1}(\varphi) = \cos(2n+1)\varphi, \quad p_{n2}(\varphi) = \sin(2n+1)\varphi, \quad p_{n3}(\varphi) = \cos 2n\varphi,$$

$$P_{1n1}(r, \varphi) = P_{1n2}(r, \varphi) = -r \operatorname{Re} G_{n+1,n}\left(\sqrt{i}\, t(\theta) r\right),$$

$$P_{2n1}(r, \varphi) = P_{2n2}(r, \varphi) = \frac{r}{t^2(\theta)} \operatorname{Im} G_{n+1,n}\left(\sqrt{i}\, t(\theta) r\right),$$

$$P_{1n3}(r,\varphi) = \operatorname{Re} G_{n,n}\left(\sqrt{i}\,t(\theta)\,r\right), \qquad P_{2n3}(r,\varphi) = \frac{-1}{t^2(\theta)} \operatorname{Im} G_{n,n}\left(\sqrt{i}\,t(\theta)\,r\right),$$

$$P_{3n1}(r,\varphi) = P_{3n2}(r,\varphi) = -rG_{n+1,n}(a_1(\theta)\,r), \qquad P_{3n3}(r,\theta) = G_{n,n}(a_1(\theta)\,r),$$

$$P_{4n1}(r,\varphi) = P_{4n2}(r,\varphi) = -rG_{n+1,n}(a_2(\theta)\,r), \qquad P_{4n3}(r,\theta) = G_{n,n}(a_2(\theta)\,r),$$

$$t^4(\theta) = b(\theta)/d(\theta), \qquad b(\theta) = b_1\cos^4\theta + b_2\cos^2\theta\sin^2\theta + b_3\sin^4\theta,$$

$$d(\theta) = d_1\cos^8\theta + d_2\cos^6\theta\sin^2\theta + d_3\cos^4\theta\sin^4\theta + d_4\cos^2\theta\sin^6\theta + d_5\sin^8\theta,$$

$$a_j(\theta) = \sqrt{c_j \Big/ \left(\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{33}}\cos^2\theta + \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}}\sin^2\theta\right)} \qquad (j = 1,2),$$

$$c_{1,2} = \left(3 + 4\mu_1 \mp \sqrt{(3+4\mu_1)^2 - 12\left(\mu_1 + \mu_1^2 - \mu_2\mu_3\right)}\right)/2,$$

де $G_{m,n}(z)$ – спеціальна функція, що введена при побудові фундаментальних розв'язків статики пологих оболонок [3]; $b_k$, $d_k$ – константи, які містять кривину та механічні параметри оболонки. Ряд (4) швидко сходиться. Для проведення практичних розрахунків можна обмежитися десятьма членами. Асимптотичні властивості розв'язка (4) випливають з поведінки G-функції при аргументі, який наближається до нуля. В околі зосередженого джерела середньої температури переміщення мають вигляд

$$U_i \approx r\ln r \qquad (i = 1,2), \qquad U_3 \approx r^0.$$

Чисельні обчислення виконані для склопластика косокутної намотки, що має сильну анізотропію.

Термомеханічні параметри обчислення були такими: $\kappa = 1.935$; $G = 0.2067$; $\nu_1 = 0.2798$; $\alpha_1 = 0.7\cdot10^{-5}K^{-1}$; $\alpha_2 = 3.8\cdot10^{-5}K^{-1}$; $\lambda_{11}/\lambda_{33} = 2.306$; $\lambda_{22}/\lambda_{33} = 1$; $Bi^+ = Bi^- = 0.1$. Досліджено залежність переміщень у серединній площині $U_1$, $U_2$ і прогину $U_3$ від радіальної координати $r$ при дії джерела середньої температури одиничної потужності ($W_1^* = 1K$).

Результати обчислень зображені на рис. 1, 2, де переміщення і радіальна координата задані з точністю до $h$. Суцільними лініями показані залежності для циліндричної оболонки ($k = 0{,}025$), штриховою та пунктирною – для пластини ($k = 0$). Цифрами 1 і 2 позначені криві для випадку орієнтації головної осі ортотропії з більшим значенням модуля Юнга уздовж твірної циліндричної оболонки (вісь $x_1$), цифрами 3 і 4 позначені криві для випадку повороту головних осей ортотропії на $\pi/2$. Цифрами 1 і 3 позначені графіки для переміщення $U_1$ і прогину вздовж твірної (вісь $x_1$, $\varphi = 0$), цифрами 2 і 4 позначені графіки для переміщення $U_2$ і прогину уздовж напрямної (вісь $x_2$, $\varphi = \pi/2$). Штриховою лінією показаний графік для переміщення $U_1$ уздовж осі $x_1$ $(\varphi = 0)$, пунктирною – для переміщення $U_2$ уздовж осі $x_2$ $(\varphi = \pi / 2)$.

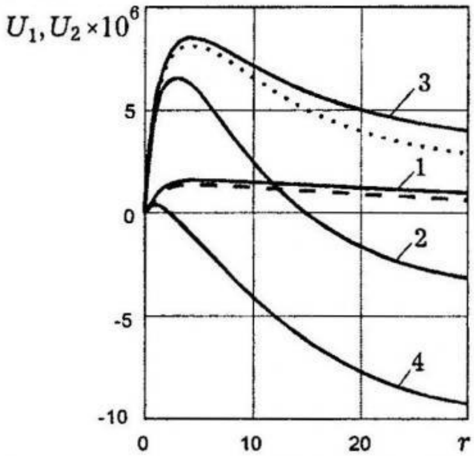

Рис. 1.

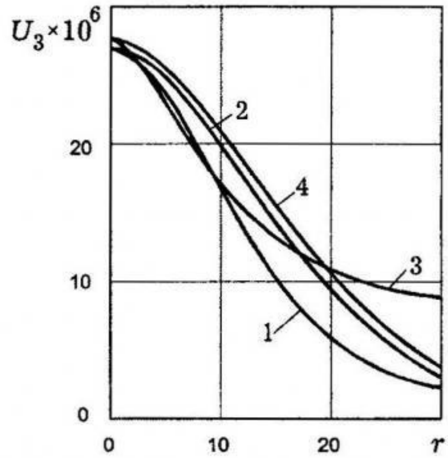

Рис. 2.

З графіків видно, що фундаментальний розв'язок термопружності ортотропних циліндричних оболонок суттєво залежить від кривини та параметрів ортотропії.

---

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
2. *Гольцев А. С.* Фундаментальное решение уравнений термоупругости для тонких ортотропных пластин в случае теплообмена // Труды междунар. научн. конф. «Современные проблемы концентрации напряжений». – Донецк: Кассиопея, 1998. – С. 56–60.
3. Механика композитов: В 12т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 7: Концентрация напряжений / *Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др.* – К.: А. С. К., 1999. – 387 с.
4. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – К.: Наук. думка, 1976. – 311 с.
5. *Швец Р. Н., Лунь Е. И.* Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учетом инерции вращения и поперечного сдвига // Прикладная механика. – 1971. – Т. 7, № 10. – С. 121-125.

## FUNDAMENTAL SOLUTION OF THERMOELASTICITY FOR ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS

**Arkadiy Goltsev, Vladimir Shevchenko**

*Donetsk state university*

The fundamental solution of thermoelasticity for the thin shallow orthotropic cylindrical shells is obtained by means of two-dimensional integral Fourier transform. The linear distribution of the temperature along the thickness is assumed. The convective heat exchange with the surrounding medium is taken into account. The dependence of displacements from the radial coordinate is investigated.

Стаття надійшла до редколегії 16.11.1999