ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 64–67 *Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 64–67*

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ВЕРШИН ПОПЕРЕЧНОЇ ТРІЩИНИ У КОРОБЧАСТІЙ ОБОЛОНЦІ

В'ячеслав Воробель, Віктор Реут

Одеський державний університет ім. І.І.Мечникова

Розглянемо задачу про обчислення значення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) біля вершин прямолінійної наскрізної тріщини завдовжки $2c < 2a$, що є в одній з пластин коробчастої оболонки прямокутного перерізу, яка розташована перпендикулярно до ребер оболонки на однаковій відстані від них (рис. 1). До обох берегів тріщини прикладене однакове навантаження, симетричне щодо центра тріщини і яке не залежить від часу, у вигляді розподілених згинних моментів $m(x)$. Пластини, з яких складена оболонка, зроблені з одного матеріалу і мають однакову товщину h. З огляду на симетрію задачі щодо площин $Y = 0$ і $X = 0$ надалі розглядаємо тільки частину оболонки, що є в ділянці $Y \geq 0$, $X \geq 0$.

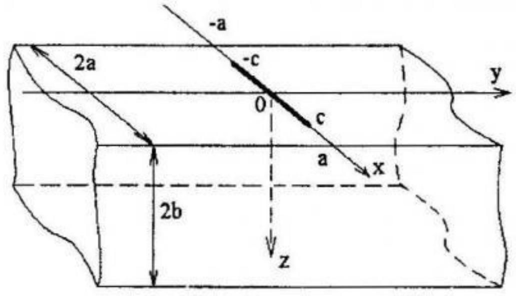

Рис. 1.

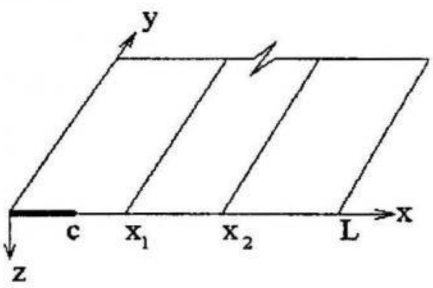

Рис. 2.

Для розв'язування задачі застосуємо підхід, запропонований Г.Я. Поповим і В.В. Реутом [4], що дає змогу звести задачі про напружено-деформований стан коробчастих оболонок до спільного плоского і згинного стану фіктивної пластини з дефектами (рис. 2), роль яких відіграють ребра оболонки (під дефектом розуміємо частину поверхні (або лінію), під час переходу через яку виникають розриви першого роду зусилля або зміщення). У [1, 2] зазначено, що в припущенні малості параметра $\varepsilon = h/p$, де p – характерний геометричний розмір оболонки, задачу можна розбити на дві (згинну і плоску), які послідовно розв'язують, з точністю до $O(\varepsilon^2)$, де згинна задача є, по суті, задачею про нерозрізну пластину у формулюванні Смотрова [6]. У [2] показано, що у разі дії згинального навантаження достатньо розглядати тільки згинну задачу, бо плоскі напруження і деформації малі порівняно зі згинними.

Оскільки в задачі, яку розглядаємо, діє чисто згинальне навантаження, то аналізуватимемо тільки згинну задачу.

Математичне формулювання задачі, згідно з [1, 2], зводиться до розв'язання бігармонічного рівняння прогину смугоподібної пластинки (див. рис. 2)

$$\Delta^2 w(x,y) = 0, \quad 0 < x < L\ , \ 0 < y < +\infty, x \neq x_i \ , i = \overline{1,2}\,, \tag{1}$$

(де $L = 2(a+b)$, $x_1 = a$, $x_2 = L - a$) з крайовими умовами

$$\varphi_x(0,y) = 0, \quad \varphi_x(L,y) = 0, \quad V_x(0,y) = 0, \quad V_x(L,y) = 0\,; \tag{2}$$

умовами на ребрах

$$\langle \varphi_x(x_i,y) \rangle = \langle M_x(x_i,y) \rangle = 0, \ w(x_i \pm 0, y) = 0, \ 0 \le y < \infty, i = \overline{1,2}; \tag{3}$$

умовою на тріщині

$$M_y(x,0) = m(x), \quad V_y(x,0) = 0, \quad x \in [0,c) \tag{4}$$

й умовами симетрії задачі

$$V_y(x,0) = 0, \ \varphi_y(x,0) = 0, \ x \in [c, L]\,. \tag{5}$$

Тут w – згин пластини в напрямі осі z; M_n – згинний момент; V_n – узагальнена поперечна сила; φ_n – кут повороту пластини по перерізу з нормаллю n; уведені також безрозмірні величини, позначені тими ж буквами, що й відповідні фізичні, які, на відміну від перших, позначені зірочкою:

$$(x,y,a,b,L) = (x_*,y_*,a_*,b_*,L_*)/c_*\,, \ w(x,y) = D_1 \varepsilon^3 w_*(x_*,y_*)/c_*\,,$$

$$M_n = M_{n*}/E_* c_*^2\,, \quad V_n = V_{n*}/E_* c_*\,, \qquad \varphi_n = \varphi_{n*} D_1 \varepsilon^3,$$

$$m(x) = m_*(x_*)/E_* c_*^2\,, \ D_1 = D_*/E_* h_*^3\,, \ \varepsilon = h_*/c_*\,, \ c = h = E = D = 1\,, \tag{6}$$

де h_* – товщина; ν – коефіцієнт Пуассона; E_* – модуль Юнга; D_* – циліндрична жорсткість платівок.

Уведемо невідому на $[0, c)$ функцію

$$\frac{\partial}{\partial y} w(x,0) = \chi(x), \quad \chi(x) \equiv 0, \ x \notin [0,c)\,. \tag{7}$$

За допомогою косинус інтегрального перетворення Фур'є задача (1)–(4) зводиться до одновимірної розривної крайової задачі

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)^2 w_\lambda(x) = \nu\chi''(x) - \lambda^2\chi(x)\,, \ 0 < x < L\,, \ x \neq x_i\,, \ i = \overline{1,2}; \tag{8}$$

$$w'_\lambda(0) = 0, \ \ w'_\lambda(L) = 0, \ \ w'''_\lambda(0) = 0, \ \ w'''_\lambda(L) = 0; \tag{9}$$

$$\langle w_\lambda(x_i) \rangle = \langle w'_\lambda(x_i) \rangle = \langle w''_\lambda(x_i) \rangle = 0; \tag{10}$$

$$w_\lambda(x_i \pm 0) = 0\,, \quad i = \overline{1,2}; \tag{11}$$

розв'язування якої будують згідно з [3]. Обертаючи інтегральне перетворення Фур'є, реалізовуємо умову на тріщині (4), яка після виділення інтегралів, що нерівномірно сходяться, приводить до такого інтегро-диференціального рівняння (з урахуванням парності розв'язку за змінною x інтегральне рівняння продовжено на інтервал [-1, 1])

$$-\frac{1}{\pi}\frac{d^2}{dx^2}\int_{-1}^{1}\chi(\xi)\ln\frac{1}{|x-\xi|}d\xi+\int_{-1}^{1}\chi(\xi)R(x,\xi)d\xi=m_1(x),\ |x|<1, \tag{12}$$

де $R(x,\xi)$ – регулярна функція, $m_1(x)=m(x)/2\aleph$, $\aleph=(1-\nu)(3+\nu)/4$. Розв'язок (12) шукають згідно з методом ортогональних багаточленів [3] у вигляді ряду за багаточленами Чебишова другого роду, причому внаслідок парності функції $\chi(x)$ в розкладанні беруть участь тільки парні багаточлени.

$$\chi(\xi)=\sqrt{1-\xi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\chi_k U_{2k}(\xi). \tag{13}$$

Підставляючи (13) в (12) і використовуючи спектральне співвідношення для багаточленів Чебишова і властивість ортогональності, одержуємо нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) другого роду типу Пуанкаре – Коха:

$$(2n+1)\chi_n+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2n,2k}\chi_k=m_{2n},\ n=\overline{0,\infty}, \tag{14}$$

наближений розв'язок якої будували за допомогою методу редукції (обґрунтованість застосування якого доведена в [5]).

Коефіцієнт інтенсивності напружень біля вершини тріщини визначимо так [2]:

$$K_*(c_*)=\frac{6}{h_*^2}\lim_{x_*\to c_*+0}\sqrt{2\pi(x_*-c_*)}\left|M_{y_*}(x_*,0)\right|=6\varepsilon^{-2}\sqrt{\pi c_*}E_*K(1), \tag{15}$$

де

$$K(1)=\lim_{x\to 1+0}\sqrt{x^2-1}\left|M_y(x,0)\right|=2\aleph\left|\sum_{k=0}^{N}\chi_k U_{2k}(1)\right| \tag{16}$$

– безрозмірний аналог КІН, для здобуття якого було використано спектральне співвідношення В.2.4 [3] для багаточленів Чебишова на проміжку $|x|>1$.

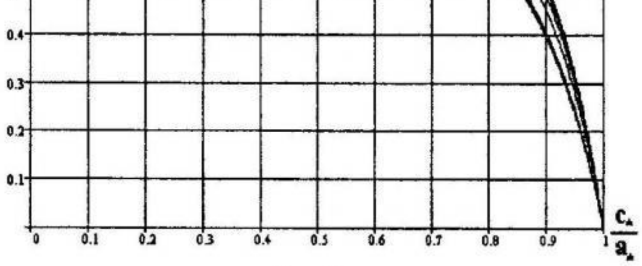

Рис. 3.

На рис. 3 зображено графіки залежності КІН від співвідношення c_*/a_* для таких значень параметрів задачі: $m(x)=m_*(x_*)/E_*c_*^2\equiv 1$ рівномірно розподілене навантаження); $\nu=0.4$; $b_*/a_*=10$, 1, 1/2, 1/4, 1/10, 1/50, 1/100 (відповідні графіки на рис. 3 розташовані послідовно зверху вниз).

На підставі отриманих результатів можна зробити такі висновки. У разі наближення тріщини до ребра оболонки ($c_*/a_* \to 1$) концентрація напружень монотонно зменшується до нуля, причому ядро $R(x)$, при зближенні тріщини, є регулярним, і СЛАР (14) вже не має властивості систем типу Пуанкаре – Коха; при $c_*/a_* \to 0$, $K(1) \to 1$, що збігається з результатом відомої задачі про тріщину в нескінченній площині. Було також виявлено, що КІН практично перестає залежати від b_*/a_*, коли $b_*/a_* >> 1$ або $b_*/a_* << 1$. При $b_*/a_* << 1$ це можна пояснити так: пластини суміжні з тим, який містить тріщину, відіграють роль затиснення. При $b_*/a_* >> 1$ це можна пояснити тим, що згинні напруження, які спадають у разі віддалення від місця прикладання навантаження, практично не передаються на пластину, протилежну до тієї, яка містить тріщину, і тепер уже ця пластина працює як затиснення для суміжних з нею пластин.

Виконано порівняння з результатами [2], де досліджено задачу для випадку двох тріщин, симетрично розташованих на протилежних гранях оболонки, з якого випливає, що наявність другої тріщини зменшує концентрацію напружень.

---

1. *Гришин В. А., Попов Г. Я., Реут В. В.* Расчёт коробчатых оболочек прямоугольного сечения // Прикл. математика и механика. – 1990. – Т. 54. – Вып. 4. – С. 605–612.
2. *Гришин В. А.* Расчёт пластинчатых оболочек: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1990. – 18 с.
3. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
4. *Попов Г. Я., Реут В. В.* Расчёт коробчатых оболочек // Тр. XIV Всесоюзн. конф. по пластинкам и оболочкам. – Тбилиси, 1987.– Т. 2. – С. 327–332.
5. *Реут В. В.* Краевые задачи для бигармонического уравнения в клиновидной области при наличии дефектов и усложненных граничных условий: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1984. – 18 с.
6. *Смотров А. Ф.* Жесткие коробки. – М.; Л.: ГНТИ, 1931. – 40 с.

STRESS CONCENTRATION NEAR THE ENDS OF A CROSS CRACK IN A BOX SHELL

Viacheslav Vorobel, Victor Reut

Mechnikova State University Odessa

The problem, as a result the applying of Fourier transformation and solving of the one-dimensional discontinuous boundary value problem, has been reduced to the singular integral equation, the solution of which is constructed by the help of orthogonal polynomials method in the form of series by Chebyshev polynomials of second kind. The cofficients of the series are the solutions of the infinite system of the linear algebraic equations of the second kind of a type Poincare-Koch.

Стаття надійшла до редколегії 27.11.1999