ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 72–75 *Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 72–75*

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК

Уляна Жидик

Українська академія друкарства

Розглянемо оболонку сталої товщини $2h$, точки простору якої віднесені до нормальної криволінійної системи $\mathbf{x} = \{x^\alpha, x^3\}$ $(\alpha = 1,2)$, де $x^3 = 0$ описує середню поверхню G оболонки, обмежену контуром g. Матеріал оболонки є неоднорідним анізотропним двокомпонентним твердим розчином, який має в кожній точці лише одну площину симетрії стосовно фізико-механічних властивостей.

Нехай у момент часу τ під дією зовнішнього силового навантаження $\mathbf{q} = \{q^\alpha, q^3\}$, $\mathbf{m} = \{m^\alpha, m^3\}$, початкових деформацій [1, 3] $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \{\varepsilon^0_{\alpha\beta}, \varepsilon^0_{\alpha 3}, \varepsilon^0_{33}\}$, $\boldsymbol{\ae}^0 = \{\ae^0_{\alpha\beta}, \ae^0_{\alpha 3}\}$, тепло- масообміну [2, 5] з зовнішнім середовищем, джерел тепла $W_{(n)}$ і маси $V_{(n)}$ $(n = 1,2)$, а також контурних силових і термоконцентраційних факторів в оболонці виникнуть: переміщення $\mathbf{u} = \{u_\alpha, u_3\}$ і кути повороту $\gamma = \{\gamma_\alpha, \gamma_3\}$, потоки тепла $\mathbf{Q}_{(n)} = \{Q^\alpha_{(n)}, Q^3_{(n)}\}$ і маси $\mathbf{P}_{(n)} = \{P^\alpha_{(n)}, P^3_{(n)}\}$, температурне поле $T_{(n)}$ і хімічний потенціал $\mathcal{M}_{(n)}$, ентропія $S_{(n)}$ і концентрація $C_{(n)}$, зусилля-моменти $\mathbf{N} = \{N^{\alpha\beta}, N^{\alpha 3}, N^{33}\}$, $\mathbf{M} = \{M^{\alpha\beta}, M^{\alpha 3}\}$ і деформації $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha 3}, \varepsilon_{33}\}$, $\boldsymbol{\ae} = \{\ae_{\alpha\beta}, \ae_{\alpha 3}\}$. Перелічені величини віднесені до середньої поверхні оболонки і тому є функціями поверхневих координат x^α і часу τ.

Фізико-механічний стан розглядуваної оболонки опишемо математичною моделлю, яка складається з системи диференціальних рівнянь і крайових умов, одержаних шляхом прийняття гіпотез про лінійний характер розподілу компонент вектора переміщень, температури і хімічного потенціалу по товщині стінки [5]. Цю систему виведемо, усереднюючи відповідну тривимірну задачу [4]. В результаті одержимо:
рівняння руху

$$\nabla_\beta N^{\beta\alpha} - b^\alpha_\beta N^{\beta 3} + q^\alpha - \ddot{I}^\alpha_N = 0,\ \ \nabla_\beta N^{\beta 3} + b_{\alpha\beta} N^{\beta\alpha} + q^3 - \ddot{I}^3_N = 0,$$

$$\nabla_\beta M^{\beta\alpha} - N^{\alpha 3} + m^\alpha - \ddot{I}^\alpha_M = 0,\ \ \nabla_\beta M^{\beta 3} + b_{\alpha\beta} M^{\beta\alpha} - N^{33} + m^3 - \ddot{I}^3_M = 0 \quad ; \quad (1)$$

балансові рівняння

$$T_0 \dot{S}_{(n)} - W_{(n)} = -\nabla_\alpha Q^\alpha_{(n)} + b^\alpha_\alpha Q^3_{(n)} - \frac{2n-1}{2h}\left[q^+ - (-1)^n q^- - 2(n-1) Q^3_{(1)}\right],$$

$$\dot{C}_{(n)} - V_{(n)} = -\nabla_\alpha P^\alpha_{(n)} + b^\alpha_\alpha P^3_{(n)} - \frac{2n-1}{2h}\left[p^+ - (-1)^n p^- - 2(n-1)P^3_{(1)}\right]; \tag{2}$$

рівняння теплопровідності і дифузії

$$\sum_{m=1}^{2} k^{(n,m)}_{\alpha\beta} l Q^\alpha_{(m)} = -\frac{2h}{2n-1}\nabla_\beta T_{(n)}, \qquad \sum_{m=1}^{2} k^{(n,m)}_{33} l Q^3_{(m)} = -2(2-n)T_{(2)},$$

$$\sum_{m=1}^{2} K^{(n,m)}_{\alpha\beta} l' P^\alpha_{(m)} = -\frac{2h}{2n-1}\nabla_\beta \mathcal{M}_{(n)}, \qquad \sum_{m=1}^{2} K^{(n,m)}_{33} l' P^3_{(m)} = -2(2-n)\mathcal{M}_{(2)}; \tag{3}$$

рівняння стану

$$N^{\beta\alpha} = D^{\alpha\beta\gamma\delta}_{(1)}\left(\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon^0_{\gamma\delta}\right) + D^{\alpha\beta\gamma\delta}_{(2)}\left(æ_{\gamma\delta} - æ^0_{\gamma\delta}\right) + D^{\alpha\beta 33}_{(1)}\left(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}\right) -$$

$$-\sum_{m=1}^{2}\left(\beta^{\beta\alpha}_{(m)} T_{(m)} - \gamma^{\beta\alpha}_{(m)}\mathcal{M}_{(m)}\right),$$

$$N^{33} = D^{33\gamma\delta}_{(1)}\left(\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon^0_{\gamma\delta}\right) + D^{33\gamma\delta}_{(2)}\left(æ_{\gamma\delta} - æ^0_{\gamma\delta}\right) + D^{3333}_{(1)}\left(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}\right) -$$

$$-\sum_{m=1}^{2}\left(\beta^{33}_{(m)} T_{(m)} - \gamma^{33}_{(m)}\mathcal{M}_{(m)}\right),$$

$$M^{\beta\alpha} = D^{\alpha\beta\gamma\delta}_{(2)}\left(\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon^0_{\gamma\delta}\right) + D^{\alpha\beta\gamma\delta}_{(3)}\left(æ_{\gamma\delta} - æ^0_{\gamma\delta}\right) + D^{\alpha\beta 33}_{(2)}\left(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}\right) -$$

$$-h\sum_{m=1}^{2}\left(\beta^{\beta\alpha}_{(m+1)} T_{(m)} - \gamma^{\beta\alpha}_{(m+1)}\mathcal{M}_{(m)}\right),$$

$$N^{3\alpha} = D^{3\alpha\gamma\delta}_{(1)}\left(\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon^0_{\gamma\delta}\right) + D^{3\alpha\gamma\delta}_{(2)}\left(æ_{\gamma\delta} - æ^0_{\gamma\delta}\right) + D^{3\alpha 33}_{(1)}\left(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}\right),$$

$$M^{3\alpha} = D^{3\alpha\gamma\delta}_{(1)}\left(\varepsilon_{\gamma\delta} - \varepsilon^0_{\gamma\delta}\right) + D^{3\alpha\gamma\delta}_{(2)}\left(æ_{\gamma\delta} - æ^0_{\gamma\delta}\right) + D^{3\alpha 33}_{(1)}\left(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{\gamma 33}\right),$$

$$\frac{2h}{2n-1} S_{(n)} = \sum_{m=1}^{2}\left(\frac{1}{T_0} C^{e,M}_{(n,m)} T_{(m)} + d^M_{(n,m)}\mathcal{M}_{(m)}\right) +$$

$$+\beta^{\alpha\delta}_{(n)}\left(\varepsilon_{\alpha\delta} - \varepsilon^0_{\alpha\delta}\right) + h\beta^{\alpha\delta}_{(n+1)}\left(æ_{\alpha\delta} - æ^0_{\alpha\delta}\right) + \beta^{33}_{(n)}\left(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}\right),$$

$$\frac{2h}{2n-1} C_{(n)} = \sum_{m=1}^{2}\left(d^M_{(n,m)} T_{(m)} + d^S_{(n,m)}\mathcal{M}_{(m)}\right) +$$

$$+\gamma^{\alpha\delta}_{(n)}\left(\varepsilon_{\alpha\delta} - \varepsilon^0_{\alpha\delta}\right) + h\gamma^{\alpha\delta}_{(n+1)}\left(æ_{\alpha\delta} - æ^0_{\alpha\delta}\right) + \gamma^{33}_{(n)}\left(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}\right); \tag{4}$$

геометричні співвідношення

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \left(\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta\right)/2 + b_{\alpha\beta} u_3, \quad \varepsilon_{\alpha 3} = \gamma_\alpha + \nabla_\alpha u_3 + b^\beta_\alpha u_\beta,$$

$$æ_{\alpha\beta} = \left(\nabla_\beta \gamma_\alpha + \nabla_\alpha \gamma_\beta\right)/2 + b_{\alpha\beta}\gamma_3, \quad æ_{\alpha 3} = \nabla_\alpha \gamma_3, \quad \varepsilon_{33} = \gamma_3; \tag{5}$$

умови тепло- масообміну на поверхнях $x^3 = \pm\ h$

$$q^{\pm} = \alpha_{\pm}\left(t^{\pm} - t_c^{\pm}\right), \quad p^{\pm} = \alpha_{\pm}^{*}\left(\mu^{\pm} - \mu_c^{\pm}\right); \tag{6}$$

граничні умови на контурі g :

механічні $\quad N^{\alpha i}\nu_{\alpha} = \bar{N}^{i}, \quad M^{\alpha i}\nu_{\alpha} = \bar{M}^{i},$

теплофізичні $\quad Q_{(n)}^{\alpha}\nu_{\alpha} = \alpha_g\left(T_n - T_{(n)}^{c}\right), \quad P_{(n)}^{\alpha}\nu_{\alpha} = \alpha_g^{*}\left(\mathcal{M}_{(n)} - \mathcal{M}_{(n)}^{c}\right); \quad (7)$

початкові умови при $\tau = 0$:

механічні $\quad u_i = u_i^{\circ}, \ \gamma_i = \gamma_i^{\circ}, \ \dot{u}_i = \bar{u}_i^{\circ}, \ \dot{\gamma}_i = \bar{\gamma}_i^{\circ},$

теплофізичні $\quad T_{(n)} = T_{(n)}^{\circ}, \ \mathcal{M}_{(n)} = \mathcal{M}_{(n)}^{\circ}, \ \dot{T}_{(n)} = \bar{T}_{(n)}^{\circ}, \ \dot{\mathcal{M}}_{(n)} = \bar{\mathcal{M}}_{(n)}^{\circ}. \quad (8)$

Введені позначення

$$\left\{T_{(n)}, S_{(n)}, Q_{(n)}^{i}, \mathcal{M}_{(n)}, C_{(n)}, P_{(n)}^{i}, W_{(n)}, V_{(n)}\right\} = \int_{-h}^{h}\left\{t, s, q_t^{i}, \mu, c, p_c^{i}, w_t, v_c\right\}\left(\frac{x^3}{h}\right)^{n-1} dx^3;$$

$$\left\{k_{ij}^{(n,m)}, K_{ij}^{(n,m)}, C_{(n,m)}^{e,M}, d_{(n,m)}^{M}, d_{(n,m)}^{S}\right\} = \int_{-h}^{h}\left\{k_{ij}, K_{ij}, C^{e,M}, d_M, d_S\right\}\left(\frac{x^3}{h}\right)^{m+n-2} dx^3;$$

$$I_N^{i} = \rho_{(1)}u^{i} + \rho_{(2)}\gamma^{i}; \quad I_M^{i} = \rho_{(2)}u^{i} + \rho_{(3)}\gamma^{i};$$

$$\left\{\beta_{(n)}^{ij}, \gamma_{(n)}^{ij}\right\} = \int_{-h}^{h}\left\{\beta^{ij}, \gamma^{ij}\right\}\left(\frac{x^3}{h}\right)^{n-1} dx^3; \quad \rho_{(q)} = \int_{-h}^{h}\rho\left(x^3\right)^{q-1} dx^3 \quad (q = 1,2,3);$$

$$C^{e,M} = C^{e,c} + T_0\, d_T^{e,c}\, d_M; \quad d_M = d_T^{e,c} / d_c^{e,t}; \quad d_S = 1/d_c^{e,t};$$

$$\beta^{ij} = \beta_T^{ij} + \gamma^{ij}\, d_T^{e,c}; \quad \gamma^{ij} = \gamma_c^{ij}\, d_S; \quad l = 1 + \tau_r\frac{\partial}{\partial\tau}; \quad l' = 1 + \tau_r'\frac{\partial}{\partial\tau};$$

$D_{(q)}^{ijkl}(\mathbf{x})$ – інтегральні характеристики тензора жорсткості анізотропного тіла; $\beta_T^{ij}(\mathbf{x})$ і $\gamma_c^{ij}(\mathbf{x})$ – компоненти тензорів термопружності і механодифузії; $k_{ij}(\mathbf{x})$ і $K_{ij}(\mathbf{x})$ – компоненти тензорів теплового і концентраційного опору; $C^{e,c}(\mathbf{x})$ – теплоємність при сталій деформації та концентрації; $\rho(\mathbf{x})$ – густина матеріалу; $d_T^{e,c}(\mathbf{x})$ і $d_c^{e,t}(\mathbf{x})$ – коефіцієнти, які характеризують залежність хімічного потенціалу $\mu(\mathbf{x},\tau)$ від температури $t(\mathbf{x},\tau)$ і концентрації $c(\mathbf{x},\tau)$. τ_r і τ_r' – час релаксації потоків тепла і маси; $s(\mathbf{x},\tau)$ – ентропія одиниці об'єму; $w_t(\mathbf{x},\tau)$ і $v_c(\mathbf{x},\tau)$ – інтенсивності джерел тепла і маси;

$q_t^i(\mathbf{x},\tau)$ і $p_c^i(\mathbf{x},\tau)$ – компоненти векторів потоку тепла і маси; $\alpha_\pm$, $\alpha_\pm^*$, α_g, α_g^* – коефіцієнти тепло- і масовіддачі з граничних поверхонь $x^3 = \pm h$ і контура g відповідно; ν_α – компоненти вектора нормалі до контура g; ∇_α – символ коваріантної похідної в метриці серединьої поверхні; $b_{\alpha\beta}$ – поверхневий тензор кривини; індекси, позначені грецькими буквами, приймають значення 1, 2, латинськими – 1, 2, 3; індекси n і m в дужках не мають тензорного характеру і приймають значення 1, 2; використовується правило підсумовування за індексами, що повторюються; крапкою зверху позначена часткова похідна за часом.

Рівняння (1)–(8) становлять повну систему рівнянь математичної моделі, яка описує процес механотермодифузії в неоднорідних анізотропних оболонках з дисторсіями.

1. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
2. *Підстригач Я. С.* Диференціальні рівняння задачі термодифузії в твердому деформованому тілі // Доп. АН УРСР. – 1961. – № 2. – С. 169–173.
3. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М.* Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 29–41.
4. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наук. думка, 1978. – 344 с.
5. *Швец Р. Н., Флячок В. М.* Уравнения механотермодиффузии анизотропных оболочек с учетом поперечных деформаций // Мат. методы и физ.-мех. поля – 1984. – Вып. 20. – С. 54–61.

MATHEMATICAL MODELING THE THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF NONHOMOGENEOUS ELASTIC ANISOTROPIC SHELLS

Ulyana Zhydyk

The Ukrainian academy of a print

Model of thermodiffusion processes in nongomogeneous elastic anisotropic shells with distortions is proposed. The model processes effect of transverse mechanical and thermal material anisotropy.

Стаття надійшла до редколегії 26.11.1999