

УДК 539.3

КРУЧЕННЯ ОРТОТРОПНОГО ТОНКОСТІННОГО ПРИЗМАТИЧНОГО СТРИЖНЯ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ НА БОКОВІЙ ПОВЕРХНІ

Олександр Космодаміанський, Роман Нескородєв

Донецький державний університет

Розглянемо тонкостінний коробчастий стрижень прямокутного перерізу, віднесений до декартової системи координат $O_1x_1x_2x_3$. На одній з граней стрижня маємо еліптичний отвір з півсями a і b . Вважаємо отвір малим і розміщеним далеко від країв грані. Товщина стінки $2h$ є також малою порівняно з розмірами отвору. Головні осі еліпса збігаються з напрямками осей Ox і Oz локальної системи координат $Oxzy$, пов'язаної з центром отвору. Цю систему отримано з $O_1x_1x_2x_3$ перенесенням $z = x_3 - l$, $y = x_2 - (b_1 - h)$, $x = x_1$, так що серединна площина грані збігається з

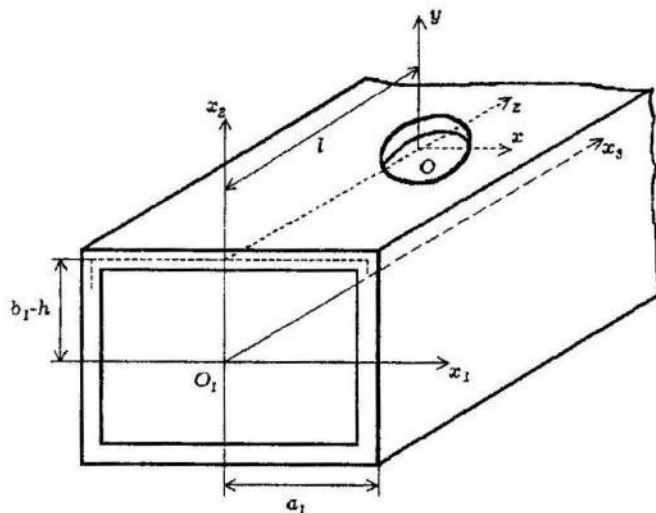


Рис. 1.

площиною Oxz ($-h \leq y \leq h$) (рис. 1). Припустимо, що в кожній точці стрижня є три площини пружної симетрії, які ортогональні до стінок коробки. Стрижень скручується моментами, прикладеними до його торців, а контур еліптичного отвору вільний від зовнішніх зусиль.

Розв'язок задачі, який відповідає основному напруженому стану, що виникає в стрижні без отвору, шукають у вигляді ряду за системою фундаментальних розв'язків відповідного диференціаль-

ного рівняння. Коефіцієнти розкладу визначають з крайової умови на боковій поверхні стрижня [2, 3]. Дослідження проводили для різноманітних матеріалів і товщин стінок коробки. Отримані результати апроксимували в околі еліптичного отвору степеневими функціями в системі координат $Oxzy$. Апроксимування засвідчило, що по товщині стінок дотичні напруження $\tau_{yz}^0 = 0$, а τ_{xz}^0 змінюються за лінійним законом (за винятком невеликих зон, що прилягають до місць різкої зміни форми стрижня):

$$\tau_{xz}^0 = (p_0 + p_1 y) A_{55} \vartheta b_1, \quad (1)$$

де A_{55} – модуль пружності; ϑ – відносний кут закручування, а сталі ве-

личини p_0 і p_1 залежать від геометричних та пружних параметрів розв'язку задачі кручення стрижня без еліптичного отвору.

Для відшукування другого поля напружень стінку коробки поблизу отвору будемо вважати тонкою пластиною. Інтегрування рівнянь теорії пружності ортотропного тіла для тонкої пластини в системі координат $Oxyz$, коли її бокові поверхні вільні від навантажень ($\tau_{yz} = \tau_{xy} = \sigma_y = 0$ при $y = \pm h$), виконаємо засобом малого параметра, за який виберемо величину h і товщинну координату y . Для цього розкладемо переміщення $u_i(x, z, y)$ в ряди за змінною y :

$$u_i = u_{i0}(x, z) + y u_{i1}(x, z) + \frac{y^2}{2!} u_{i2}(x, z) + \dots \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (2)$$

Процес інтегрування рівнянь теорії пружності ортотропного тіла поділяють на дві задачі: розтягу-стиску (задача А) та згину (задача В). Наведемо остаточні результати за кожною з цих задач з точністю до значень, що містять малий параметр в степені не вище першого.

1. Задача А. Розклади (2) і напруження набувають вигляду:

$$(u_1, u_3) = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} (\delta_{1j}, \delta_{3j}) \varphi_j(z_j^0), \quad u_2 = y \left(2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} \delta_{2j} \varphi_j'(z_j^0) \right); \quad (3)$$

$$(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} (\mu_j^2, 1, -\mu_j) \varphi_j'(z_j^0), \quad \tau_{yz} = \tau_{xy} = \sigma_y \equiv 0. \quad (4)$$

Тут $\varphi_j(z_j^0)$ – довільні функції узагальнених комплексних змінних $z_j^0 = x + \mu_j z$. Комплексні параметри μ_j є коренями рівняння

$$c_{11} A_{55} + (c_{11} c_{33} + A_{55}^2 - (c_{13} + A_{55})^2) \mu^2 + c_{33} A_{55} \mu^4 = 0, \quad (5)$$

а коефіцієнти δ_{kj} визначені співвідношеннями

$$\delta_{1j} = p_j / \Delta_j, \quad \delta_{3j} = q_j / \Delta_j, \quad \delta_{2j} = -(A_{21} \delta_{1j} + A_{23} \delta_{3j} \mu_j) / A_{22},$$

$$p_j = (c_{13} + A_{55}) \mu_j, \quad q_j = -(c_{11} + A_{55} \mu_j^2),$$

$$\Delta_j = c_{31} p_j + c_{33} \mu_j q_j, \quad c_{ij} = A_{ij} - A_{i2} A_{2j} / A_{22}, \quad i, j = 1, 3.$$

Крайові умови для функцій $\varphi_j(z_j^0)$ мають вигляд

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} \mu_j \varphi_j = p_0 x, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} \varphi_j = p_0 z. \quad (6)$$

2. Задача В. Розклади (2) і напруження набувають вигляду

$$(u_1, u_3) = -y \left(2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} (1, -\lambda_j) w_j' \right), \quad u_2 = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} w_j; \quad (7)$$

$$(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}) = -y \left(2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} (p_j, q_j, r_j) w_j'' \right), \quad \sigma_y = 0;$$

$$\tau_{yz} = -f_2 (2 \operatorname{Re} (s_1 w_1'' + s_2 w_2'')), \quad \tau_{xy} = f_2 (2 \operatorname{Re} (\lambda_1 s_1 w_1'' + \lambda_2 s_2 w_2'')). \quad (8)$$

Тут $w_j(z_j^1)$ – довільні функції узагальнених комплексних змінних $z_j^1 = x + \lambda_j z$. Параметри λ_j задовольняють характеристичне рівняння

$$c_{11} + 2(c_{13} + 2A_{55})\lambda^2 + c_{33}\lambda^4 = 0. \quad (9)$$

У співвідношеннях (8) уведено такі позначення:

$$p_j = c_{11} + c_{13}\lambda_j^2, \quad q_j = c_{31} + c_{33}\lambda_j^2, \quad r_j = 2A_{55}\lambda_j, \quad f_2 = (y^2 - h^2)/2,$$

$$s_j = (c_{11} + (c_{13} + 2A_{55})\lambda_j^2)/\lambda_j = p_j/\lambda_j + r_j = -r_j - q_j\lambda_j.$$

Крайові умови для визначення функцій $w_j(z_j^1)$ описують співвідношення:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} \frac{p_j}{\lambda_j} w_j' = -(p_1 - c)x, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1,2} q_j w_j' = -(p_1 + c)z. \quad (10)$$

Тут, як і в прикладній теорії тонких плит, враховані крайові умови для напружень τ_{xy} і τ_{yz} . Ці умови дадуть співвідношення $2 \operatorname{Re} (s_1 w_1'' + s_2 w_2'') = c$, яке використовували у разі виведення (10). Стала c визначена з умови однозначності переміщень u_2 у (7).

Числові дослідження напруженого стану поблизу отвору проводили для ізотропного матеріалу (коефіцієнт Пуассона дорівнює 1/3) й ортотропного склопластика з пружними сталими [1]:

$$E_x = 4.76E, \quad E_y = 2.07E, \quad E_z = 1.45E, \quad G_{xy} = 0.531E, \quad G_{yz} = 0.434E,$$

$$G_{zx} = 0.501E, \quad \mu_{xy} = 0.149, \quad \mu_{yz} = 0.325, \quad \mu_{zx} = 0.099, \quad E = 10^4 \text{ МПа}.$$

Переріз коробки вважають квадратним ($a_1 = b_1$), товщина стінки $2h = 0.05b_1$. У цьому випадку $p_0 = -1$, $p_1 = -2$ для ізотропного матеріалу ($g = A_{55}/A_{44} = 1$) і $p_0 = -0.95$, $p_1 = -2$ для ортотропного ($g = 1.154$). Напруження σ_θ , що виникають поблизу контуру отвору на площадках, нормальних до нього, обчислювали за формулою $\sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^1 y$, де σ_θ^0 – складова задачі розтягу-стиску, а σ_θ^1 – згину.

У випадку кругового отвору ($a = b = 0.2b_1$) максимальні напруження σ_θ в ізотропному матеріалі досягають при $\theta = 45^\circ$, а в ортотропному – при

$\theta = 68^\circ$, вони, відповідно, такі:

$$\sigma_\theta = (4.00 + 3.20y)p,$$

$$\sigma_\theta = (3.95 + 1.69y)p$$

($p = A_{55} \theta b_1$). На рис. 2 показаний розподіл напружень σ_θ / p у точках серединної площини кругового отвору. Крива 1 відповідає ізотропному випадку, а крива 2 – ортотропному.

Дослідження також проводили для еліптичного отвору $2a = b = 0,2b_1$. Наведемо максимальні значення напружень:

$$\text{ізотропний матеріал: } \theta = 63^\circ, \sigma_\theta = (4.50 + 4.07y)p;$$

$$\text{ортотропний матеріал: } \theta = 78^\circ, \sigma_\theta = (4.765 + 0.20y)p.$$

Отже, поправка, яку вносить згинна складова, мала порівняно зі складовою розтягу-стиску. Її максимальне значення не перевищує $h \max |\sigma_\theta^1|$ і становить до 3% від напружень розтягу-стиску. Зі зменшенням товщини стінок вона наближається до нуля.

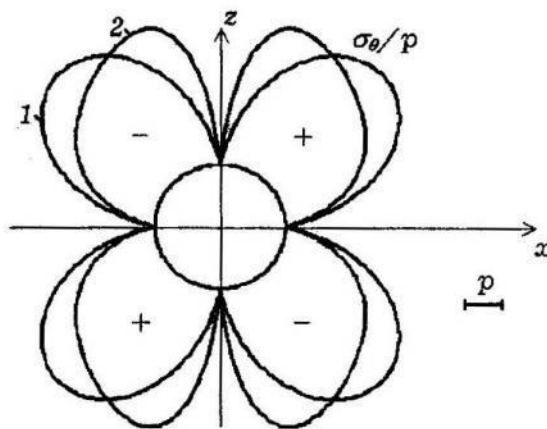


Рис. 2.

1. Ашкенази Е. К., Ганов Е. В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
2. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – К. – Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
3. Нескородев Р. Н. Кручение полых анизотропных стержней произвольного поперечного сечения // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 1998. – Вип. 1. – С. 67–74.

TORSION OF AN ORTHOTROPIC THIN-WALLED PRISMATIC ROD WITH AN ELLIPTIC HOLE ON A LATERAL AREA

Alexander Kosmodamiansky, Roman Neskorohev

Donetsk state university

In the article a thin-walled prismatic rod twisted on butt-end and having an elliptic hole on a lateral area is considered. At determination of a strain state near a hole the task was divided in two: stretchings-compression and curving. The numerical researches for isotropic and orthotropic materials in case of circular and elliptic holes are given.

Стаття надійшла до редколегії 12.12.1999