УДК 536.2

УЗАГАЛЬНЕНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ТЕРМОЧУТЛИВОГО ПІВПРОСТОРУ, ЗУМОВЛЕНЕ ОПРОМІНЮВАННЯМ КОНЦЕНТРОВАНИМ ПОТОКОМ ЕНЕРГІЇ (КПЕ)

Олександр Кулик*, Ігор Махоркін*, Андрій Сеник**

**Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*

*** Національний університет «Львівська політехніка»*

Нехай поверхня $z=0$ півпростору нагрівається нормально-розподіленим потоком енергії з коефіцієнтом зосередженності k

$$q = q_0 \exp(-kr^2), \qquad r^2 = x^2 + y^2 .$$

Приймаємо також, що початкова температура тіла та середовища, яке омиває граничну поверхню однакові і дорівнюють $t_c = \text{const}$, а швидкість нагрівання тіла дорівнює нулю.

Наведена схема є розрахунковою моделлю для визначення теплового стану масивного тіла, поверхня якого опромінюється КПЕ [5]. Визначення температурного поля t проводиться на основі класичних співвідношень лінійної теорії теплопровідності. Однак реальне одержання імпульсів КПЕ протяжності 10^{-11}–10^{-12} с. значної потужності вимагає враховувати час релаксації теплового потоку τ_r та теплову нелінійність матеріалу.

Для матеріалів з простою тепловою нелінійністю $\left(a = \lambda_t(t)/c_v(t) = \text{const}\right)$, нехтуючи теплообміном, крайову задачу узагальненої теплопровідності [3] запишемо так:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} + c_q^{-2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \tau^2},$$

$$\lambda_t^* \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right|_{z=0} = -q_0 \exp\left(-kr^2\right)\left[S_+(\tau) + \tau_r \delta_+(\tau)\right],$$

$$\vartheta|_{r=0} \neq \infty, \quad \vartheta|_{r\to\infty} = 0, \quad \vartheta|_{z\to\infty} = 0, \quad \left.\left(\vartheta, \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\right)\right|_{\tau=0} = 0; \tag{1}$$

$$\vartheta = \frac{1}{\lambda_t^*}\int_{t_c}^{t} \lambda_t(\xi)\,d\xi, \tag{2}$$

де $q_0 = Qk/\pi$ – густина потужності випромінювання в центрі плями нагрівання, Q – загальна потужність випромінювання, $c_q = \sqrt{a/\tau_r}$ – швидкість розповсюдження тепла, $c_v(t)$, $\lambda_t(t)$ – температурні залежності коефіцієнтів об'ємної теплоємності та теплопровідності відповідно, λ_t^* – опорне значення коефіцієнта теплопровідності, $S_+(\zeta) = \{1, \zeta > 0;\ 0, \zeta \le 0\}$ – асиметрична функція Гевісайда $\delta_+(\zeta) = S'_+(\zeta)$.

Розв'язок крайової задачі (1) в трансформантах Ганкеля за радіальною координатою r та Лапласа за часом τ має вигляд

$$\tilde{\bar{\vartheta}} = \frac{1+s\tau_r}{2ks\eta} q_0 \exp\left(-\frac{\xi^2+4k\eta z}{4k}\right). \tag{3}$$

Тут $\tilde{\bar{\vartheta}} = \int_0^\infty \bar{\vartheta} \exp(-s\tau)\, d\tau$, $\bar{\vartheta} = \int_0^\infty r\vartheta J_0(\xi r)\, dr$, $\eta^2 = \xi^2 + \frac{s}{a} + \frac{s^2}{c_q^2}$, ξ, s – параметри перетворення Ганкеля та Лапласа [1] відповідно; $J_0(\varsigma)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Переходячи в (3) до оригіналів, використавши довідкові дані [2] та теорему про згортку, отримуємо, що змінна Кірхгофа ϑ описується виразом

$$\vartheta = \frac{q_0 c_q}{2k\lambda_t^*}\left\{\tau_r \exp\left(-\frac{\tau}{2\tau_r}\right)\int_0^\infty \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4k}\right) I_0(f(\tau,\xi,z))\, J_0(\xi r)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{z/c_q}^{\tau} \exp\left(-\frac{\varsigma}{2\tau_r}\right)\int_0^\infty \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4k}\right) \mathrm{I}_0(f(\varsigma,\xi,z))\, J_0(\xi r)\, d\xi d\varsigma\right\} S_+\left(\tau - \frac{z}{c_q}\right), \tag{4}$$

де $f(\varsigma,\xi,z) = \frac{\varsigma}{2\tau_r}\sqrt{1-4a\tau_r\xi^2}\sqrt{1-z^2/(c_q\varsigma)^2}$, $I_0(\eta)$ – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Аналітично виразити t через ϑ можна лише в найпростіших випадках. Наприклад, коли $\lambda_t(t) = \lambda_t^*(1 \pm æt)$. На практиці залежність $\lambda_t(t)$ здебільшого задається таблично і її, з відомою точністю, можемо апроксимувати виразом [4]

$$\lambda_t(t) \approx a_0 + \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})S_+(t-t_i) + \left\{b_0 + \sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1})S_+(t-t_i)\right\} t, \tag{5}$$

де $a_i = \frac{\lambda_i t_{i+1} - \lambda_{i+1} t_i}{t_{i+1} - t_i}$, $b_i = \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{t_{i+1} - t_i}$, $t_n = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = t_K$, $\lambda_i = \lambda_t(t_i)$, $[t_П; t_K]$ – область визначення температурної залежності коефіцієнта теплопровідності. Зауважимо, що співвідношенням (5), з заданим степенем точності, можна описувати і довільно задані залежності $\lambda_t(t)$. Враховуючи, що при $\vartheta'(t) = \lambda_t(t)/\lambda_t^* > 0$ правильне співвідношення $S_+(\vartheta - \vartheta_i) = S_+(t - t_i)$, з (2) отримуємо [4]

$$t = \begin{cases} \frac{1}{b(\vartheta)}\left\{\sqrt{a^2(\vartheta) + 2b(\vartheta)\left(\lambda_t^*\vartheta + \vartheta_c + \sum_{i=1}^{n} F_i S_+(\vartheta - \vartheta_i)\right)} - a(\vartheta)\right\}, & \text{при } b(\vartheta) \neq 0; \\ \frac{1}{a(\vartheta)}\left(\lambda_t^*\vartheta + \vartheta_c + \sum_{i=1}^{n} F_i S_+(\vartheta - \vartheta_i)\right), & \text{при } b(\vartheta) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Тут

$$F_i = \left(a_i - a_{i-1} + \frac{b_i - b_{i-1}}{2} t_i\right) t_i, \ \{a(\vartheta), b(\vartheta)\} \sim p(\vartheta) = p_0 + \sum_{i=1}^{n} (p_i - p_{i-1}) S_+(\vartheta - \vartheta_i),$$

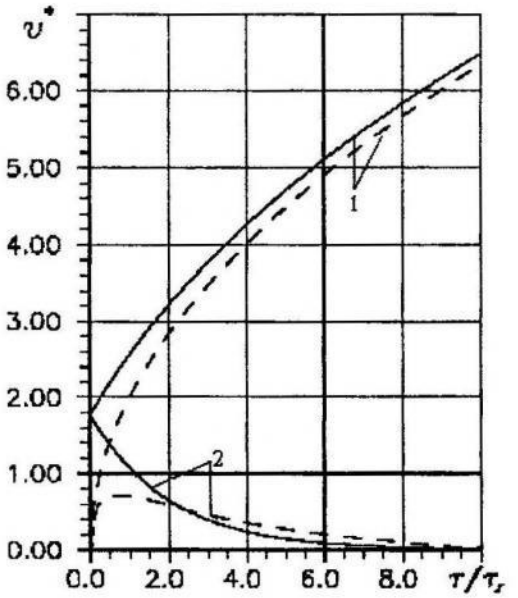
$$\vartheta_c = \left(a_0 + \frac{b_0}{2} t_c\right) t_c + \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - a_{i-1} + \frac{b_i - b_{i-1}}{2}(t_c - t_i)\right)(t_c - t_i) S_+(t_c - t_i), \ \vartheta_i = \vartheta(t_i).$$

Якщо прийняти $\lambda_t(t) \approx \lambda_t^* = \text{const}$, то з (2) випливає, що змінна Кірхгофа (4) описує поле приростів температури $t - t_c$ нетермочутливого півпростору. Згідно з класичною теорією теплопровідності ($\tau_r = 0$) температурне поле нетермочутливого півпростору для цього випадку визначається виразом [5]

$$t = t_c + \frac{q_0}{\lambda_t^*} \sqrt{\frac{a}{\pi}} S_+(\tau) \int_0^{\tau} \exp\left[-\left(\frac{kr^2}{4ka\zeta + 1} - \frac{z^2}{4a\zeta}\right)\right] \Big/ \left[\sqrt{\zeta}\,(4ka\zeta + 1)\right] d\zeta. \qquad (7)$$

Вираз (7) для t отримуємо також і з (4) граничним переходом при $\tau_r \to 0$.

Числовий аналіз, виконаний на основі співвідношень (6), засвідчив, що врахування простої теплової нелінійності не впливає на якісний розподіл та часову поведінку значень температурного поля. Одержані значення температури можуть більше ніж на 20–25% відрізнятись від значень розрахованих при постійних теплофізичних характеристиках, що відповідають природній температурі $t_{np} \sim [18-27\ °\text{C}]$. Використання середньоінтегральних значень теплофізичних характеристик $\left[\lambda_t^*, c_v^*\right] \sim \frac{1}{t_K - t_c} \int_{t_c}^{t_K} P(\xi)\, d\xi$ допомагало значно зменшити цю розбіжність, зробивши її в більшості випадків не



зробивши її в більшості випадків не більшою за 10%.

На рисунку зображено часову зміну $\vartheta^* = \vartheta \lambda_t^* \sqrt{\pi k} / (q_0 \sqrt{F_{or}})$ (криві *1*) в центрі плями нагріву поверхні для значень комплексу $F_{or} = ak\tau_r < 10^{-5}$. Криві *2* відповідають значенням ϑ^* на осі потоку в точці $z = c_q \tau$ і характеризують зміну фронту температурної хвилі в часі. Суцільними лініями нанесені значення, які отримали на основі узагальненої моделі теплопровідності, штриховими – класичної.

З цих результатів випливає, що, аналізуючи тепловий стан тіл, зумовлений дією КПЕ, в моменти часу $\tau < 10 \cdot \tau_r$ необхідно враховувати скінченність швидкості розповсюдження тепла. В моменти часу $\tau > 10 \cdot \tau_r$ дослідження температури можна вести, враховуючи класичну теорію теплопровідності, але густина теплового потоку q_0 не повинна перевищувати 10^{13} Вт/м^2. Аналогічні висновки, на підставі фізичних міркувань, отримано в [5].

Треба зауважити таке оскільки τ_r приймає значення $10^{-9} - 10^{-11}$ с, то з виразу (4) одержуємо просту формулу для обчислення температури поверхні нетермочутливого півпростору

$$t = t_c + \frac{q_0\sqrt{a\tau_r}}{\lambda_t^*}\exp\left(-kr^2 - \frac{\tau}{2\tau_r}\right)\left[\left(1+\frac{\tau}{\tau_r}\right)I_0\left(\frac{\tau}{2\tau_r}\right) + \frac{\tau}{\tau_r}I_1\left(\frac{\tau}{2\tau_r}\right)\right],$$

похибка обчислень за якою при $\tau \in [0;10\tau_r]$ не перевищує $0{,}1\%$.

1. *Галицын А. С., Жуковский А. Н.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – К.: Наук. думка, 1976. – 282 с.
2. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая шк., 1965. – 466 с.
3. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. *Кулик О. М., Махоркін І. М.* Температурне поле термочутливого клина при опроміненні концентрованим потоком енергії // Крайові задачі термомеханіки: Зб. наук. праць. – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – Ч. 2. – С. 190–191.
5. *Лазерная* и электронно-лучевая обработка материалов: Справочник / *Н.Н. Рыкалин, А.А. Углов, И.В. Зуев, А.Н. Кокора.* – М.: Машиностроение, 1985. – 496 с.

GENERALIZED TEMPERATURE FIELD IN A THERMOSENSIBLE HALF-SPACE CAUSED BY CONCENTRATED ENERGY FLUX RADIATION

Olexandr Kulyk*, Ihor Makhorkin*, Andriy Senyk**

**Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics National Academy of Sciences of Ukraine*

***National University «Lvivska Politechnika»*

Based on the generalized Fourier law the heat conduction problem is solved for heating a semi-infinite body with the simple heat nonlinearity by the normal distributed heat flux. The numerical investigation is carried out.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.1999