ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2000. Вип. 57. С. 88–92 *Ser. mech.-math. 2000. No. 57. P. 88–92*

УДК 539.3

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО ЗНОШУВАННЯ ПРУЖНОГО ТІЛА З ТОНКИМ ПОКРИТТЯМ

Олександр Максимук

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України

Розглянемо квазістатичну плоску задачу про контактну взаємодію системи: жорсткий штамп, пружна тонка пластина, пружна півплощина. Приймемо, що штамп притискається до пластини силою P (рис. 1), а між пластиною та півплощиною виконуються умови ідеального контакту. Штамп рухається з усередненою швидкістю V в напрямі перпендикулярному до площини (рис. 1). Внаслідок тертя відбувається зношування. Процес зношування моделюється лінійною залежністю між інтенсивністю зношування та роботою сил тертя (теплові ефекти не враховуються) [3]

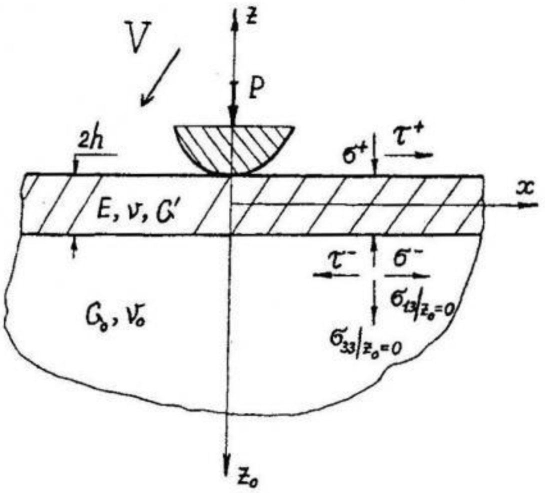

Рис. 1.

$$\partial w_*(x,t)/\partial t = fK_w Vp(x,t), \qquad (1)$$

де f – коефіцієнт тертя, $p(x,t)$ – контактний тиск під штампом, K_w – коефіцієнт інтенсивності зношування, t – час зношування, $w_*(x,t)$ – зміщення внаслідок зношування.

Рівняння рівноваги для покриття в переміщеннях мають вигляд

$$B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tau, \ -D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = (1 - \frac{D}{\Lambda'}\frac{\partial^2}{\partial x^2})(p-q) - h\frac{\partial \tau}{\partial x}, \qquad (2)$$

де

$$B = \frac{2Eh}{1-\nu^2}, \ D = \frac{Bh^2}{3}, \ \Lambda' = \frac{5hG'}{3}, \ \tau = \tau^-, \ \tau^+ = 0, \ q = \sigma^-, \ p = \begin{cases} \sigma^+, & |x| \le a(t) \\ 0 & |x| \ge a(t) \end{cases}.$$

В умовах плоскої деформації напружено-деформований стан півплощини описується співвідношеннями ($x_0 = x$) [1]

$$\Delta u_0 + \frac{\partial \theta_0}{\partial x} = 0, \ \Delta w_0 + \frac{\partial \theta_0}{\partial z_0} = 0, \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}, \ \theta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial z_0}; \qquad (3)$$

$$\sigma_{11} = \frac{2G_0}{1-2\nu_0}\left[(1-\nu_0)\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu_0\frac{\partial w_0}{\partial z_0}\right], \ \sigma_{13} = G_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial z_0} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right),$$

$$\sigma_{33} = \frac{2G_0}{1-2\nu_0}\left[(1-\nu_0)\frac{\partial w_0}{\partial z_0} + \nu_0\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]. \qquad (4)$$

Задача полягає в сумісному розв'язанні систем рівнянь (2), (3) за умов контакту між пластиною і півплощиною

$$u_1(x,-h) = u_0(x,0),\ \ u_3(x,-h) = w_0(x,0),\ \ q = -\sigma_{33}^0(x,0),\ \ \tau = -\sigma_{13}^0(x,0) \qquad (5)$$

та умові контакту штампа з пластиною

$$\delta(t) - f(x) = u_3(x,+h,t) + w_*(x,t), \qquad |x| \le a(t), \qquad (6)$$

де $\delta(t)$ − переміщення штампа як жорсткого цілого, $f(x)$ − форма профілю штампа, $a(t)$ − область контакту штампа з пластиною. Диференціюючи перше рівняння (3) за x, друге за z_0 та додаючи їх, отримуємо, що $\Delta\theta_0 = 0$. Застосувавши оператор Δ до рівнянь (3), одержимо, що переміщення u_0, w_0 задовольняють співвідношення

$$\Delta\Delta u_0 = 0, \quad \Delta\Delta w_0 = 0. \qquad (7)$$

До (7) застосовуємо перетворення Фур'є за змінною x. З врахуванням умови, що $u_0, w_0 \to 0$ при $z_0 \to \infty$, розв`язок рівнянь (7) можемо записати у вигляді (t відіграє роль параметра, U_0, W_0 − трансформанти Фур'є)

$$U_0(\alpha,z,t) = a_1(\alpha,t)e^{-|\alpha|z_0} + z_0 b_1(\alpha,t)e^{-|\alpha|z_0},$$

$$W_0(\alpha,z,t) = a_2(\alpha,t)e^{-|\alpha|z_0} + z_0 b_2(\alpha,t)e^{-|\alpha|z_0}. \qquad (8)$$

Далі застосовуємо перетворення Фур'є до системи рівнянь (3) і знайдені розв'язки (8) підставляємо в (3), в результаті одержуємо

$$b_1 = (ia_2\alpha - a_1|\alpha|)/\chi, \quad b_2 = (a_2|\alpha| + ia_1\alpha)/\chi, \quad \chi = 3 - 4\nu_0.$$

Для знаходження a_1, a_2 використовуємо умови контакту (5) та рівняння (2). Застосувавши перетворення Фур'є до (2) і (5) з використанням (8), отримуємо систему рівнянь для визначення a_1, a_2. Не обмежуючи загальності постановки, проведемо цю процедуру в спрощеному варіанті. Розглядатимемо окремо задачу про накладку (термін введено в [1]) і задачу про згин пластини зчепленої з пружною півплощиною. В цьому випадку з (2) і (5) можемо записати ($z_0 = 0$)

$$\sigma_{13}^0 = G_0\left(\frac{\partial u_0}{\partial z_0} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) = 0,$$

$$-D\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} = \left(1 - \frac{D}{\Lambda'}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)p(x,t) + \frac{G_0}{1-2\nu_0}\left((1-\nu_0)\frac{\partial w_0}{\partial z_0} + \nu_0\frac{\partial u_0}{\partial x}\right). \qquad (9)$$

Застосувавши до (9) перетворення Фур'є та скориставшись співвідношеннями, що випливають з (8), остаточно одержуємо

$$a_1 = -\frac{i\alpha a_2(\chi - 1)}{(\chi + 1)|\alpha|}, \quad a_2 = -P(\alpha, t)\left(1 + \frac{D}{\Lambda'}\alpha^2\right)\Big/\left(D\alpha^4 - |\alpha|\frac{G_0}{1 - \nu_0}\left(1 + \frac{D}{\Lambda'}\alpha^2\right)\right). \quad (10)$$

Для визначення контактного тиску під штампом використовуємо умову контакту (6). Оскільки в задачах зносостійкості важливо знати контактний тиск, умову (6) попередньо диференціюємо за x, довизначаємо функції на всю дійсну вісь [2] та застосовуємо пряме і обернене перетворення Фур'є. В результаті перетворень отримуємо інтегральне рівняння задачі вигляду (штрих означає похідну за x)

$$-f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a(t)}^{a(t)} p(\xi, t) g(x - \xi) d\xi + fK_w V \int\limits_0^t p'(x, t) dt, \quad |x| \le a(t), \quad (11)$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty G(\alpha) \sin \alpha x d\alpha, \quad G(\alpha) = \left(1 + \frac{D}{\Lambda'}\alpha^2\right)\Big/\left(D|\alpha|^3 - \frac{G_0}{1 - \nu_0}\left(1 + \frac{D}{\Lambda'}\alpha^2\right)\right).$$

Розв'язок інтегрального рівняння (11) шукаємо за умови рівноваги штампа.

З інтегрального рівняння (11) легко одержати часткові випадки:

1) прийнявши, що $G' = \infty$, отримуємо покриття, яке моделюється класичною теорією пластин Кірхгофа – Лява;
2) при $h = 0$ маємо інтегральне рівняння задачі про зношування пружної півплощини

$$-f'(x) = -\frac{1}{\pi\theta} \int\limits_{-a(t)}^{a(t)} \frac{p(x, \xi)}{\xi - x} d\xi + fK_w V \int\limits_0^t p'(x, t) dt, \quad |x| \le a(t), \quad (12)$$

де $\theta = G_0/(1 - \nu_0)$. Якщо в (12) прийняти, що $V = 0$, одержимо відоме в літературі [4] сингулярне інтегральне рівняння першого роду;

3) якщо покриття моделювати вінклеровським шаром у вигляді неперервно розподілених пружних стрижнів (це відбувається, коли жорсткість покриття співвимірна або менша жорсткості основного тіла), тоді в умову контакту треба додати доданок пропорційний контактному тиску з коефіцієнтом Вінклера $K_B = 2h(1 - 2\nu)(1 + \nu)/(E(1 - \nu))$. Інтегральне рівняння в цьому випадку матиме вигляд

$$-f'(x) = -\frac{1}{\pi\theta} \int\limits_{-a(t)}^{a(t)} \frac{p(x, \xi)}{\xi - x} d\xi + K_B p'(x, t) + fK_w V \int\limits_0^t p'(x, t) dt, \quad |x| \le a(t). \quad (13)$$

Зауважимо, що в загальному випадку інтегрального рівняння (11) (трансформанта Фур'є ядра має полюс на дійсній осі) маємо особливий випадок [2], а розв'язок необхідно шукати в просторі узагальнених функцій (рівняння першого роду).

Шукаємо розв'язок інтегрального рівняння (13) у випадку дії параболічного штампа ($f(x) = x^2/2R$). Оскільки інтегральне рівняння (13) залежить від двох змінних, час зношування розбиваємо на досить малі відрізки Δt і приймаємо допущення, що на кожному з них контактний тиск і область контакту є сталими.

При $t = 0$ $(i = 0)$ в безрозмірних величинах $\bar{x} = x/a_i$, $\bar{p} = p/\theta$, (рисочки надалі опущені) інтегральне рівняння (13) можемо записати у вигляді

$$p_0'(x) - \lambda \int_{-1}^{1} \frac{p_0(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\lambda \pi a_0 x / R, \quad \lambda = a_0 (\pi \theta K_B)^{-1}, \quad |x| \le 1, \tag{14}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді ряду за поліномами Чебишова другого роду [4]

$$p_0(x) = \sqrt{1 - x^2} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}^{(0)} U_{2m}(x). \tag{15}$$

Підставляючи (15) в (14), використовуючи спектральне співвідношення для поліномів Чебишова [4] та умову їхньої ортогональності, задачу приводимо до системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно коефіцієнтів $b_{2m}^{(0)}$

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}^{(0)} \delta_{mk} - \frac{2k+1}{2\lambda} b_{2k}^{(0)} = -a_0 \delta_{0k} / R, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{16}$$

де

$$\delta_{mk} = \int_{-1}^{1} T_{2m+1}(x) T_{2k+1}(x) dx = \frac{1}{1 - 4(m + k + 1)^2} + \frac{1}{1 - 4(m - k)^2}.$$

Зв'язок між P і a_0 одержуємо з умови рівноваги штампа.

На проміжку $t \in [0, t_1 = \Delta t]$ розв'язок $p_1(x)$ знаходимо аналогічно. Коефіцієнти $b_{2m}^{(1)}$ обчислюємо з системи (16), замінивши λ-на $\lambda_* = \lambda / (1 + \lambda \delta \Delta t)$, де $\delta = \pi f K_w V \theta / a_1$. На наступному кроці $t \in [t_1, t_2 = t_1 + \Delta t]$ розв'язок $p_2(x)$ (коефіцієнти $b_{2m}^{(2)}$) знову знаходимо з системи (16), в якій $\lambda = \lambda_*$, а до правої частини додається доданок $\delta \Delta t b_{2m}^{(1)} (2k + 1) / 2$ ($b_{2m}^{(1)}$ – розв'язок отриманий на попередньому кроці) і т.д.

Числові результати одержано шляхом редукції нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь (16). Проведено обчислення за таких значень параметрів: $\nu = \nu_0 = 0.3$, $\dfrac{E}{E_0} = 1$, $\dfrac{h}{R} = 0.1$, $\dfrac{a}{h} = 0.5$, $f = 0.1$, $V = 1$ м/с; $\Delta t = 100$ с, для пари тертя чавун – чавун $\theta K_w = 4 \cdot 10^{-5}$. На рис. 2 зображено розподіл контактного тиску в процесі

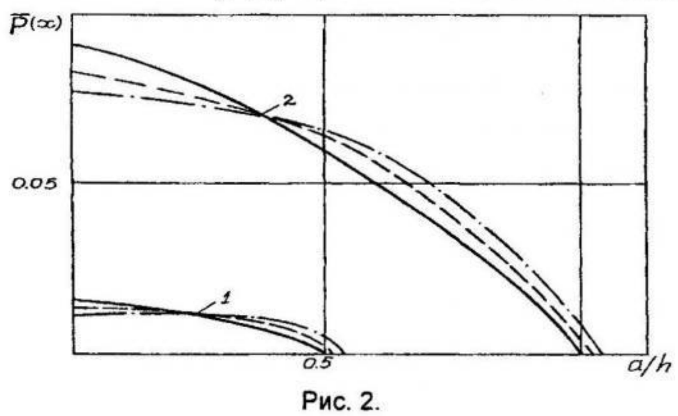

Рис. 2.

зношування для $(1 - a/h = 0.5; 2 - 1)$. Суцільна лінія відповідає $t = 0$, пунктирна – $t = 100\,с$, штрихпунктирна – $t = 200с$.

Розв'язок поставленої задачі дає змогу дослідити вплив покриття на процес зношування (співвідношень фізико-механічних характеристик контактуючих тіл, товщини покриття, фрикційних параметрів і т.п.), а наявність проміжкового шару Вінклера допомагає враховувати якість обробки поверхонь контактуючої пари.

1. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. – 487 с.
2. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 295 с.
3. *Горячева И. Г., Добычин М. Н.* Контактные задачи в трибологии. – М.: Машиностроение, 1988. – 251 с.
4. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 342 с.

CONTACT PROBLEM ABOUT WEAR OF RIGID BODY WITH THIN SURFACE

Oleksandr Maksymuk

Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine

The article presents a mathematical model of contact interaction of rigid bodies with elastic protected thin surfaces with regard for their wear. The theory allowing to model the surface in the wide diapason of changes of its parameters is used. The problem is reduced to integro-differential singular equation approximate solution of which is obtained by the method of Chebyshev polinomials.

Стаття надійшла до редколегії 17.01.2000